第十章重整化群理论

10.1 引言

相变理论的核心问题：求临界指数和标度律，阐明相变普适类的根源。

• 最直接的方法？ ---- 求配分函数！因为配分函数包含了统计平衡系统的几乎全部热力学信息。遗憾的是，除了理想气体和少数几个有相互作用的气体，严格求解配分函数十分困难！

• 朗道平均场理论？---- 可用来求临界指数和标度律，但结果多数情况下与实验结果不符！它只对 $d \geq 4$ 的系统适用。而且有两个缺陷（1）它假设自由能是序参量的解析函数，于是可用序参量的幂级数来展开，但这与临界点附近热力学量有奇异性看似是矛盾的；（2）它忽略了涨落，但涨落在发生相变时是很重要的。

• 标度理论？---- 认为自由能可写为广义齐次函数，是一个形式理论，只可以求出标度律，但不能求出临界指数的值！

• 数学上的一些严格/近似方法 --- 只针对一些具体的系统求解，不能一般的处理求临界指数的问题。

出路？ 考虑系统在相变点附近的对称性！不去求配分函数，而是去寻找保持系统不变的对称变换！（由于系统在这时有标度不变性）普适的临界指数应该对对称性的性质给出描述（普适类的根源）。

这些对称变换的集合形成了一个半群，即重整化群。

10.2 卡丹诺夫变换，块自旋

由于系统在相变点附近有标度不变性，为了考察对称变换的性质，我们将改变观看原系统的（尺度）大小。

唯一相关的尺度是关联长度ξ。系统的临界性质于是不依赖于系统在短距离内的详细细节，只依赖于长程涨落。因此我们可以采用粗粒化(coarse graining)技术把短距离内的细节平均掉。由于系统的最小尺寸为晶格常数 a，我们知道当$a < ba < \xi, b$ 为常数时，做这样的尺度变化不会改变系统的性质！

由此我们引入块自旋变换（卡丹诺夫变换）：在临界点附近，重要的是大块内的平均自旋而不是格点上的单个自旋，因此可以用只含块自旋的有效哈密顿量来描述系统！

以Ising模型为例，（格点）哈密顿量为

$$-\beta H = K\sum_{\langle ij\rangle} s_i s_j + h\sum_i^N s_i$$

把晶格分为 b^d 大小的单元块，定义块自旋$S_I = \pm 1$，它可写为原来格点的平均：

$$S_I = \frac{1}{\mathcal{L}b^d}\sum_{i\in I} s_i$$

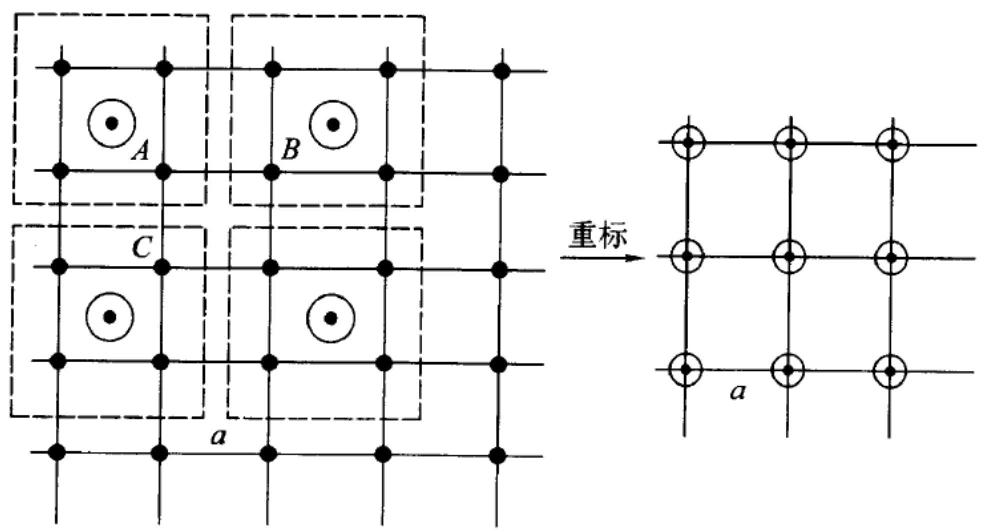
变换后新的哈密顿量为：

$$-\beta H = K_b\sum_{\langle IJ\rangle} S_I S_J + h_b\sum_I^{N/b^d} S_I$$

这就保持了对称性，只需

$$K \to K_b, \quad h \to h_b, \quad s_i \to S_I$$

显然还有 $N \to N' = b^{-d}N, \quad \xi \to \xi_b = \xi/b.$



块自旋变换：平均掉块内自旋（虚线围成一个块），然后重标晶格回到原来大小. • 代表格点自旋，⊙代表块自旋

这么做的一些问题：一般而言系统的哈密顿量可能会发生改变（如果不是仅有最近邻相互作用的话），但我们以后会看到这些多余的耦合不会改变临界指数。

和标度理论的关系：

（1）系统自由能：其奇异部分在变换前后有：$Nf_s(t,h)=\frac{N}{b^d}f_s(t_b,h_b)$，$f_s$为单个自由度的自由能。

令 $t_b=tb^{y_t}\quad(y_t>0);\qquad h_b=hb^{y_h}\quad(y_h>0)$

即得 $f_s(t,h)=b^{-d}f_s(tb^{y_t},hb^{y_h})$，这即是我们前面讨论过的广义齐次函数。

（2）关联函数：块自旋关联函数可定义为（两点距离为$r_b=r/b$）：

$$\Gamma(r_b,t_b)=\langle S_I S_J\rangle-\langle S_I\rangle\langle S_J\rangle=\frac{1}{\mathcal{L}^2 b^{2d}}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}[\langle s_i s_j\rangle-\langle s_i\rangle\langle s_j\rangle]$$

由 $$h\sum_i^N s_i=h\sum_I^{N/b^d}\sum_{i\in I}^{b^d}s_i=h\sum_I^{N/b^d}S_I\mathcal{L}b^d=h_b\sum_I^{N/b^d}S_I$$

易知 $h_b=hb^{y_h}=\mathcal{L}b^d h,\quad \mathcal{L}=b^{y_h-d}$

带入到关联函数定义式有：

$$\Gamma(r_b,t_b)=\frac{1}{b^{2(y_h-d)}b^{2d}}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}[\langle s_i s_j\rangle-\langle s_i\rangle\langle s_j\rangle]=\frac{1}{b^{2(y_h-d)}b^{2d}}b^d b^d[\langle s_i s_j\rangle-\langle s_i\rangle\langle s_j\rangle]=b^{2(d-y_h)}\Gamma(r,t)$$

这即是我们前面讨论过的广义齐次函数。一般地，有

$$\Gamma(r/b,tb^{y_t},hb^{y_h})=b^{2(d-y_h)}\Gamma(r,t,h)$$

有限尺度标度(finite-size scaling)理论

这里我们考虑一种特别情形，即系统尺度 $L = L'/a$ 有限时 (L' 是系统实际线度大小，a 是晶格常数)在临界点附近的性质。这种情形常见于我们对系统进行Monte Carlo模拟时。

这时系统自由能是含L的解析函数，但当$L \to \infty$时其某阶导数可能出现奇异性。当L有限时，我们仍然可以把可能出现奇异性的、有自相似性的部分称为自由能的奇异部分。保持系统实际线度L'不变，我们进行块自旋变换。和前面讨论类似，单个自由度的自由能的奇异部分变换为：

$$f_s(t, h, L^{-1}) = b^{-d} f_s(tb^{y_t}, hb^{y_h}, bL^{-1}).$$

这里我们也可以认为$y_L = 1$. 热力学极限对应于 $L^{-1} \to 0$ 的情形，$t = h = L^{-1} = 0$ 是相变的临界点。为简单起见，我们下面仅讨论外场h=0的情形。由标度理论，取 $b = t^{-1/y_t}$, 我们有磁化率：

$$\chi(t, L^{-1}) \sim \frac{\partial^2 f_s}{\partial h^2}\Big|_{h=0} \propto |t|^{\frac{d-2y_h}{y_t}} \phi(L^{-1}|t|^{-\frac{1}{y_t}}) = |t|^{-\gamma}\phi(L^{-1}|t|^{-\nu}) \sim |t|^{-\gamma}\phi'(L^{-1}\xi_\infty(t))$$

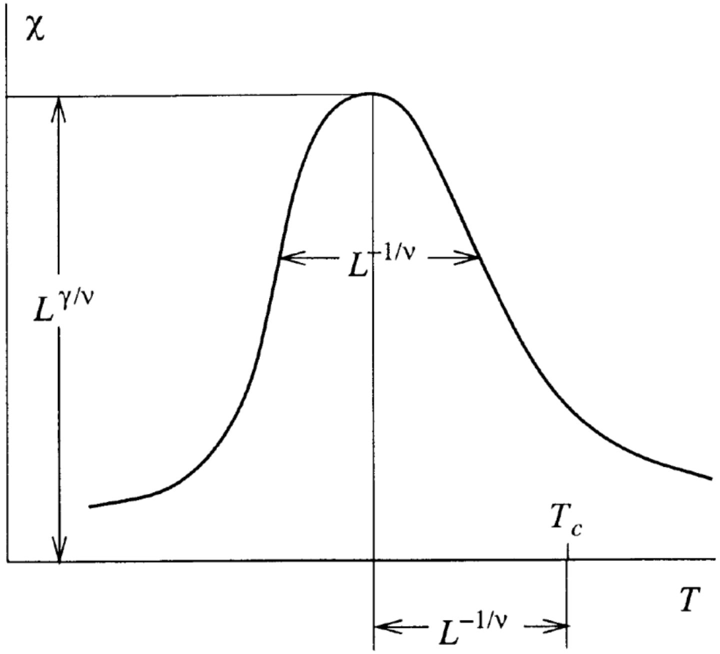
其中 $\xi_\infty(t) \sim |t|^{-\nu}$ 是无限大系统在临界点附近的关联长度。类似对比热我们也有：

$$C(t, L^{-1}) \sim \frac{\partial^2 f_s}{\partial t^2}\Big|_{h=0, L^{-1}\approx 0} \propto |t|^{-\alpha}\varphi(L^{-1}|t|^{-\nu}) \sim |t|^{-\alpha}\varphi'(L^{-1}\xi_\infty(t))$$

有限尺度下磁化率χ和比热C随温度的变化：

- 当$L \gg \xi_\infty(t)$时，关联长度感觉不到系统边界，有限系统的行为和无限系统类似:$\chi(t, L^{-1}) \sim |t|^{-\gamma}$;
- 当$|t| = t_X \sim L^{-1/\nu}$ 时，有限系统的行为开始偏离无限系统，有限尺度效应出现；
- 对更小的 t，有限系统行为不由临界点确定。由于自由能是解析函数， χ和C会出现圆滑的峰。即在 t 的有限变化范围内可近似认为是常数。由此有$\phi(x) \sim x^{-\gamma/\nu}$， 当 $x \to \infty$. 这时χ的标度形式可能用下式更方便（C的类似）： $\chi(t, L^{-1}) \sim L^{\gamma/\nu}\tilde{\phi}(L^{1/\nu}t)$, and $\chi_{\max} \sim L^{\gamma/\nu}$.

有限尺度下磁化率χ示意图：



对有限系统，我们可以把磁化率χ或比热C出现极大值的温度认为是有限系统的“临界温度” $T_c(L)$ 。一般而言，这和无限系统的临界温度T_c并不相等。

假设 $\tilde{\phi}(L^{1/\nu}t)$ 的极大值出现在$L^{1/\nu}t = a$处，我们有（其中 a, b 是常数）：

$$T_c(L) = T_c + aT_cL^{-1/\nu} = T_c + bL^{-1/\nu}.$$

对有限系统我们假设周期性或固定边界条件时，一般有$T_c(L) > T_c$ ，自由边界条件时一般有 $T_c(L) < T_c$. （考虑边界对涨落的影响，涨落足够大时破坏有序态产生相变）

10.3 重整化群的定义

仍以Ising模型为例，一般的哈密顿量可写为：

$$-\beta H(\boldsymbol{K},\{s_i\}) = \sum_{\alpha} K_\alpha S_\alpha, \quad \text{where } \boldsymbol{K} = \{K_\alpha\}, S_\alpha = \phi_\alpha(s_i).$$

其中*α*表示某类相互作用（如最近邻、次近邻、与外界作用等）。由上节可知，重整化群变换包括两部分（1）块自旋变换以缩小分辨率；（2）重标变换以恢复到和原有模型一致。

块自旋S_I和第I块中原有格点的关系为一映射：$S_I = M\{s\}_I$，因此可定义函数$P_I = \delta(S_I, M\{s\}_I)$

对整个系统则可定义：$P(\{s_i\},\{S_I\}) = \prod_I P_I$

易知有 $P(\{s_i\},\{S_I\}) \geq 0;$ $\sum_{\{S_I\}} P(\{s_i\},\{S_I\}) = 1.$

用块自旋表示的哈密顿量为：$-\beta H'(\boldsymbol{K}',\{S_I\}) = Ng(\boldsymbol{K}) + \sum_{\alpha} K'_\alpha S'_\alpha, \quad \text{where } S'_\alpha = \phi_\alpha(S_I).$

做变换时我们应**保持配分函数不变**，因此有

$$Z_N(\boldsymbol{K}) = \sum_{\{s_i\}} \mathrm{e}^{-\beta H(\boldsymbol{K},\{s_i\})} = \sum_{\{s_i\}} \left(\sum_{\{S_I\}} P(\{s_i\},\{S_I\}) \right) \mathrm{e}^{-\beta H(\boldsymbol{K},\{s_i\})}$$

$$= \sum_{\{S_I\}} \left\{ \sum_{\{s_i\}} P(\{s_i\},\{S_I\}) \mathrm{e}^{-\beta H(\boldsymbol{K},\{s_i\})} \right\} = \sum_{\{S_I\}} \mathrm{e}^{-\beta H'(\boldsymbol{K}',\{S_I\})} = Z_{N'}(\boldsymbol{K}')$$

于是重整化变换满足（*）：

$$\mathrm{e}^{-\beta H'(\boldsymbol{K}',\{S_I\})} = \sum_{\{s_i\}} P(\{s_i\},\{S_I\}) \mathrm{e}^{-\beta H(\boldsymbol{K},\{s_i\})}$$

这时每个自由度的自由能（奇异部分）为：$f(\boldsymbol{K}) = -\frac{k_B T}{N}\ln Z_N(\boldsymbol{K}) = b^{-d}\frac{(-k_B T)}{N'}\ln Z_{N'}(\boldsymbol{K}') = b^{-d} f(\boldsymbol{K}')$.

重整化群变换（*）说明耦合常数 $\boldsymbol{K}'$ 和 $\boldsymbol{K}$ 间有某种确定的函数关系：

$$\boldsymbol{K}' = R_b(\boldsymbol{K}).$$

这个函数关系易知满足 $R_{b_2 b_1} = R_{b_2} R_{b_1}$ ，且单位元为 $R_{b=1}$。这个群变换不含逆元（由于粗粒化，细节已经失去了，逆过程是不可能的），因此重整化群是个半群。

重整化群变换实际可由一个生成元 R_b 来构造。群的元素为：$R_b, R_{b^2}, R_{b^3}, \cdots, R_{b^n}, \cdots$

这时下列变换实际上与n无关（变换的递推关系）：$\boldsymbol{K}^{(n)} = R_b(\boldsymbol{K}^{(n-1)})$

10.4 重整化群变换的不动点

我们考虑耦合常数**K**组成的参数空间。如果这个参数空间的一个点在重整化群变换下不变，我们则称这个点是变换的**不动点**，即这个点满足:

$$\boldsymbol{K}^* = R_s(\boldsymbol{K}^*)$$

这个点在物理上是非常重要的。注意在这个点关联长度在重整化群变换下有：

$$\xi = \xi/s$$

要满足这个条件必有 $\xi = 0 \text{ or } \infty$, 这说明物理上的**临界点**与**非平庸不动点**有关。

现在我们来看一下系统在不动点附近的行为。

设 $\boldsymbol{K}$ 在 $\boldsymbol{K}^*$附近，我们可以写为：$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^*+\delta\boldsymbol{K},\delta\boldsymbol{K}$ 是一个小量。把变换$\boldsymbol{K}'=R_s(\boldsymbol{K})$ 在$\boldsymbol{K}^*$ 附近展开到线性项，我们有：

$$\boldsymbol{K}'=R_s(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{K}^*+\left.\frac{\partial R_s(\boldsymbol{K})}{\partial\boldsymbol{K}}\right|_{\boldsymbol{K}^*}\delta\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^*+\mathbf{M}^{(s)}\delta\boldsymbol{K},$$

这里 $\mathbf{M}^{(s)}$是变换矩阵。由此我们发现 $\delta\boldsymbol{K}'=\boldsymbol{K}'-\boldsymbol{K}^*=\mathbf{M}^{(s)}\delta\boldsymbol{K}$.
变换矩阵一般不是对称阵，因此其左右本征矢可以不一样。考虑变换矩阵的任一左本征矢 $\phi^{(\sigma)}$，而 $\Lambda_s^{(\sigma)}$ 为其本征值。由定义我们有：

$$\sum_\alpha \phi_\alpha^{(\sigma)}M_{\alpha\beta}^{(s)}=\Lambda_s^{(\sigma)}\phi_\beta^{(\sigma)}\quad(\sigma=1,2,\cdots)$$

现在我们定义一个标度场 $u_\sigma=\sum_\alpha\phi_\alpha^{(\sigma)}(K_\alpha-K_\alpha^*)$，这个标度场经重整化群变换后变为（**）：

$$u'_\sigma=\sum_\alpha\phi_\alpha^{(\sigma)}(K'_\alpha-K_\alpha^*)=\sum_\alpha\phi_\alpha^{(\sigma)}\sum_\beta M_{\alpha\beta}^{(s)}(K_\beta-K_\beta^*)=\Lambda_s^{(\sigma)}\sum_\beta\phi_\beta^{(\sigma)}(K_\beta-K_\beta^*)=\Lambda_s^{(\sigma)}u_\sigma,$$

这个变换对任意的s都成立。另外对任意的s和n有：$\Lambda_{s^n}^{(\sigma)}=\left(\Lambda_s^{(\sigma)}\right)^n$，要满足这一条件，必须有：

$$\Lambda_s^{(\sigma)}=s^{y_\sigma},$$

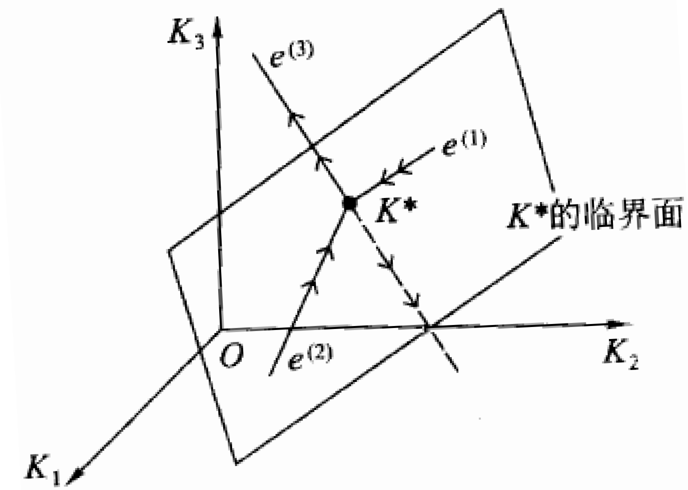
下面利用（**）式我们讨论本征值的大小：
（1）本征值大于一，我们称为关涉本征值，相应本征矢为关涉本征矢，在粗粒化过程中标度场将被不断放大，点也不断远离不动点；
（2）本征值小于一，我们称为非关涉本征值，相应本征矢为非关涉本征矢，在粗粒化过程中标度场将被不断缩小，点也不断靠近不动点；
（3）本征值等于一，我们称为边缘本征值，相应本征矢为边缘本征矢，它依赖于系统细节。

非关涉本征矢组成了一个“面”，在这个面上的任一点，经过粗粒化后都将趋于不动点！我们称这个面为临界面。下面是两个例子：

（1）

一维情形。K_2^* 是不稳定不动点。

（2）



沿临界面上的轴 $\boldsymbol{e}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{e}^{(2)}$,$\boldsymbol{K}$ 在变换下不断接近 $\boldsymbol{K}^*$,$\boldsymbol{K}^*$ 在这两个方向上是稳定不动点；在 $\boldsymbol{e}^{(3)}$ 方向上则是不稳定不动点。

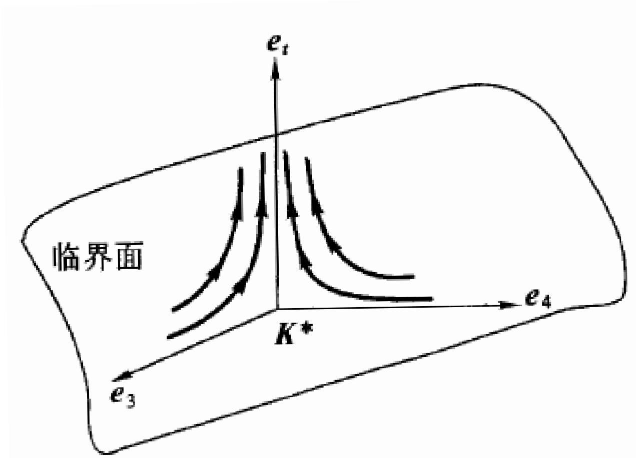
临界点和不动点的关系：

临界点必与**不稳定不动点**有关！进行一次重整化群变换，易知关联长度 $\xi \to \xi_b = \xi/b\,(b>1)$, 即系统远离不动点.。

从物理上看，一个临界系统只能存在两个关涉本征矢，分别为温度和磁场，因此它们称为关涉场。在它们的轴上，粗粒化的方向远离临界面。由此在不动点附近有

$$\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K}^* \pm |t| s^{y_t} \boldsymbol{e}_t + h s^{y_h} \boldsymbol{e}_h + A_3 s^{y_3} \boldsymbol{e}_3 + A_4 s^{y_4} \boldsymbol{e}_4 + \cdots$$

（1）当$t=0, h=0$ 时：$\boldsymbol{K}' = R_s(\boldsymbol{K}(0,0)) = \boldsymbol{K}^* + A_3 s^{y_3} \boldsymbol{e}_3 + \cdots$
于是当 $s \to \infty$ 时,$\boldsymbol{K}' \to \boldsymbol{K}^*$.
（2）当 $t=0^+, h=0$时：当s增加时，开始第四项以后起主要作用,$\boldsymbol{K}' \to \boldsymbol{K}^*$；但s足够大之后，第二项起主要作用,$\boldsymbol{K}'$ 又迅速背离 $\boldsymbol{K}^*$（如右图）。



- 标度指数：

考虑自由能的奇异部分，由前面的结果我们有： $b^{-d}f(\boldsymbol{K}')=f(\boldsymbol{K})$.

借助标量场u，我们可把上式改写为：

$$\begin{aligned} b^{-d}f(u_1',u_2',\cdots) &= b^{-d}f(\Lambda^{(1)}u_1,\Lambda^{(2)}u_2,,\cdots)=f(u_1,u_2,\cdots) \\ &= b^{-d}f(b^{y_t}u_1,b^{y_h}u_2,,\cdots) \end{aligned}$$

略去上式里的非关涉本征矢部分即有

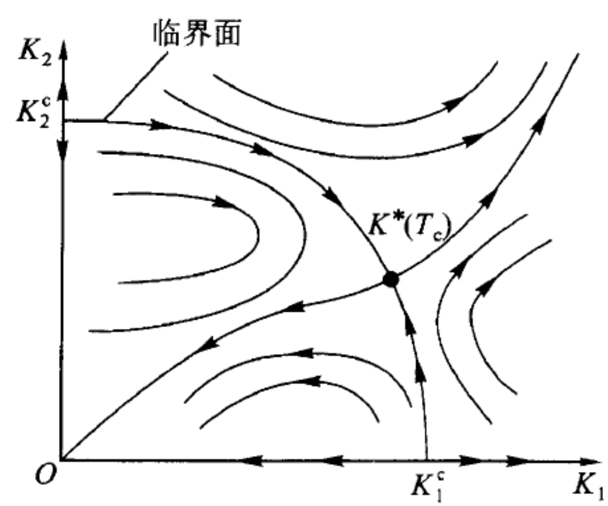
$$f(t,h,0,\cdots)=b^{-d}f(tb^{y_t},hb^{y_h},0,\cdots),\text{where }y_t=\frac{\ln\Lambda^{(1)}}{\ln b}\text{ and }y_h=\frac{\ln\Lambda^{(2)}}{\ln b}.$$

这即是我们在标度理论里用到的广义齐次函数。因此我们可以通过求本征值 $\Lambda^{(1,2)}$ 来获得标度指数！

- 普适性：

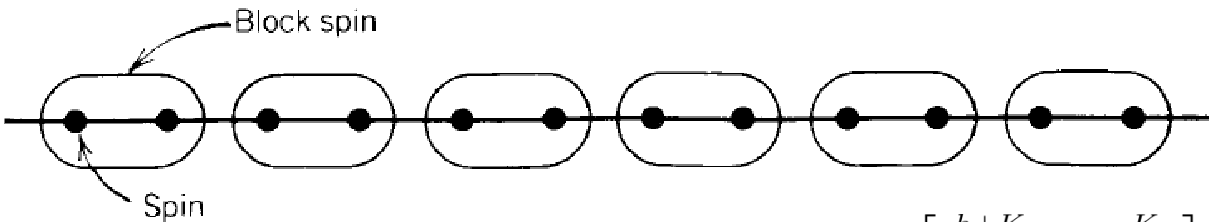
若几个系统的临界哈密顿量都在同一个临界面上且经过重整化群变换到达同一个不动点，则它们的临界行为属于同一个普适类。如右图，考虑最近邻和次近邻的Ising模型： $-\beta H=K_1\sum_{\langle ij\rangle}s_is_j+K_2\sum_{n,n,n}s_is_j$

在临界面（线）上，K_1^c 和 K_2^c分别对应于仅含最近邻和仅含次近邻相互作用的临界哈密顿量，它们的临界行为都由不动点 K^* 决定。



10.5 一维Ising模型（实空间重整化，精确结果）

对一维Ising模型我们可以得到严格结果。粗粒变换可取为：spin → 2-spin block，即



■ 方法一：由上章的结果，若令：$T_{s_i s_j} = \left[e^{\frac{h}{2}(s_i+s_j)+K s_i s_j}\right] = \begin{bmatrix} e^{h+K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{-h+K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(uv) & u \\ u & v/u \end{bmatrix}$
这里 $0 \le u = \mathrm{e}^{-K} \le 1, 0 \le v = \mathrm{e}^{-h} \le 1.$

则配分函数可写为： $Z(h,K) = \sum_{\{s_i\}} T_{s_1 s_2} T_{s_2 s_3} \cdots T_{s_N s_1} = \sum_{s_1} T^N_{s_1 s_1} = \mathrm{Tr}(T^N)$

对块自旋，我们要求它的矩阵与原先的有相同的形式，即：

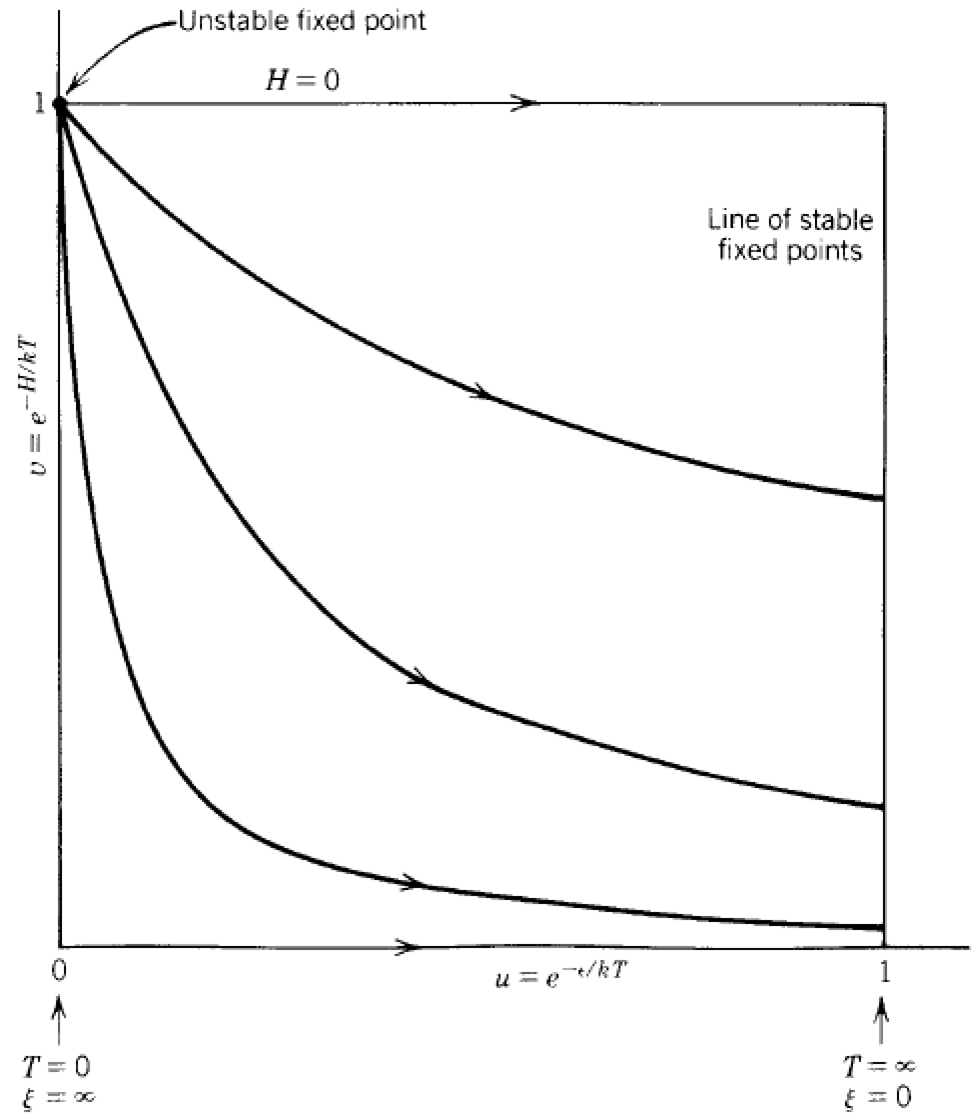
$$T' = T^2 = \begin{bmatrix} u^2 + \frac{1}{u^2 v^2} & v + \frac{1}{v} \\ v + \frac{1}{v} & u^2 + \frac{v^2}{u^2} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \frac{1}{u'v'} & u' \\ u' & \frac{v'}{u'} \end{bmatrix},$$

这里我们加上了一个参数C，因为解上述矩阵的话有三个方程，两个未知数一般是不够的。

解之得 $u' = \dfrac{\left(v+\frac{1}{v}\right)^{1/2}}{\left(u^4 + \frac{1}{u^4} + v^2 + \frac{1}{v^2}\right)^{1/4}}, \quad v' = \dfrac{(u^4+v^2)^{1/2}}{(u^4+\frac{1}{v^2})^{1/2}}, \quad C = \left(v+\frac{1}{v}\right)^{1/2}\left(u^4 + \frac{1}{u^4} + v^2 + \frac{1}{v^2}\right)^{1/4}.$

而粗粒变换可视为参数 $(u,v) \to (u',v')$ 的变换。不动点为：
（1）$u=0, v=1:$ 相互作用无穷大/零温，零外场。这个点是不稳定不动点；
（2）$u=1, \text{all } v:$ 相互作用为零/无穷高温度，任意大小外场。这个点是稳定不动点。

临界指数：可通过求解矩阵 $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{K}'}{\partial \boldsymbol{K}}\right|_{K^*}$ 的本征值而获得。



一维Ising模型耦合常数和外场在粗粒变换下的性质

■ 方法二（格点自旋消约法）

考察一维Ising模型的约化哈密顿量（晶格常数为*a*，σ_n为格点*na*上的自旋）：

$$-\beta H = K\sum_n \sigma_n\sigma_{n+1}$$

b=2的重整化群变换可以经过如下两步进行:

(i) 消掉所有奇数编号上的自旋（通过对这些自旋求和）；
(ii) 长度重标，使得自旋间的距离变回*a*，这时的耦合常数为K'，然后找出 $\left.\frac{\partial \boldsymbol{K}'}{\partial \boldsymbol{K}}\right|_{K^*}$ 即可。

消约后的剩下的自旋记为 μ，在重整化群变换前后有(下式左边的重标只须去掉μ下标中的2即得)：

$$\mathrm{e}^{\sum\limits_n K'\mu_{2n}\mu_{2(n+1)}} = \sum_{\{\sigma\}'} \mathrm{e}^{T(\mu,\sigma)+K\sum\limits_n \sigma_n\sigma_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ \mathrm{e}^{K'\mu_{2n}\mu_{2(n+1)}} = \sum_{\sigma_{2n+1}} \mathrm{e}^{K(\mu_{2n}\sigma_{2n+1}+\sigma_{2n+1}\mu_{2n+2})} \qquad (1)$$

利用等式 $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{K\sigma_1\sigma_2} = \cosh K(1+\sigma_1\sigma_2\tanh K) \\ \sum\limits_{\sigma=\pm1}(1+\sigma\mu\tanh K)(1+\sigma\mu'\tanh K) = 2(1+\mu\mu'\tanh^2 K) \end{array}\right.$

(1) 左右两边变为：$\cosh K'(1+\mu_{2n}\mu_{2(n+1)}\tanh K') = 2\cosh^2 K(1+\mu_{2n}\mu_{2(n+1)}\tanh^2 K)$

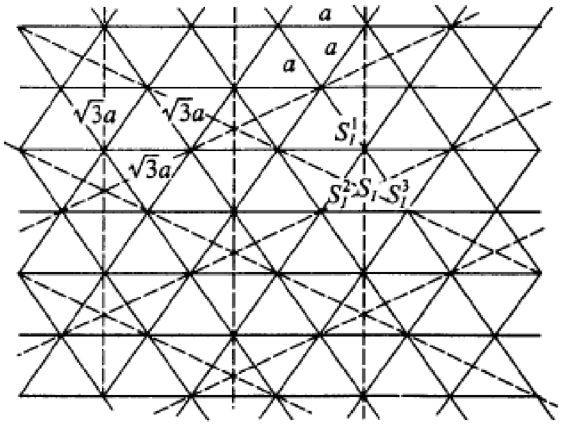
由此得重整化群变换的递推关系：$\tanh K' = \tanh^2 K$ 或 $K' = \mathrm{artanh}(\tanh^2 K) = \frac{1}{2}\ln\cosh 2K.$

$\left[\ 注意：\mathrm{artanh}\, y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}, |y|<1\ \right]$

10.6 三角晶格上Ising模型的重整化群解（实空间重整化，累积展开）

在很多情况下我们很难获得精确解。在这节里我们用实空间上的累积展开法来获得重整化群近似解。三角晶格上的铁磁Ising系统的哈密顿量和配分函数分别为（N为晶格总数）：

$$-\beta H = K\sum_{\langle ij\rangle} s_i s_j + h\sum_i s_i = -\beta H(K,h,\{s_i\}), \quad Z(K,h,N) = \sum_{\{s_i\}} \mathrm{e}^{-\beta H(K,h,\{s_i\})},$$



首先对晶格进行粗粒变换，我们采用右图所示的变换（实→虚），这样晶格常数由 a 变为 $\sqrt{3}a$，即重标因子 $b=\sqrt{3}$. 块自旋 S_I 的取值仍然是 ± 1 。S_I 的取值由多数法则确定：

$$S_I = \mathrm{sgn}(S_I^1 + S_I^2 + S_I^3),$$

这里S_I^j 表示第I块里的三个格点自旋。

（1）$S_I = +1, \text{when } (S_I^1, S_I^2, S_I^3) = (1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1).$
这四种位形可记为$\alpha_I^1, \alpha_I^2, \alpha_I^3, \alpha_I^4.$
（2）$S_I = -1, \text{when } (S_I^1, S_I^2, S_I^3) = (-1,-1,-1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (1,-1,-1).$
可记为$\alpha_I^5, \alpha_I^6, \alpha_I^7, \alpha_I^8.$

由此，配分函数可写为：$Z(K,h,N) = \sum_{\{S_I,\alpha_I\}} \mathrm{e}^{-\beta H(K,h,\{S_I,\alpha_I\})} = \sum_{\{S_I\}} \mathrm{e}^{-\beta H'(K',h',\{S_I\})} = Z(K',h',N').$

粗粒变换后，新的晶格哈密顿量可通过对 α_I 的部分求和获得：$\mathrm{e}^{-\beta H(K',h',\{S_I\})} = \sum_{\{\alpha_I\}} \mathrm{e}^{-\beta H(K,h,\{S_I,\alpha_I\})}.$
求和只对有确定值S_I 的 α_I 进行。

由于块自旋间有相互作用，要实现上面的变换并不简单。为此我们把哈密顿量分为块内自旋间的相互作用 H_0 和不同（相邻）块的相互作用及外场的贡献V两部分：

$$-\beta H = H_0 + V; \quad H_0 = K\sum_I \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} s_i s_j, \quad V = K\sum_{I\neq J}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} s_i s_j + h\sum_I\sum_{i\in I} s_i$$

于是有 $\sum\limits_{\{\alpha_I\}} \mathrm{e}^{-\beta H(K,h,\{S_I,\alpha_I\})} = \sum\limits_{\{\alpha_I\}} \mathrm{e}^{H_0+V} = \sum\limits_{\{\alpha_I\}} \mathrm{e}^{H_0} \dfrac{\sum\limits_{\{\alpha_I\}} \mathrm{e}^{H_0+V}}{\sum\limits_{\{\alpha_I\}} \mathrm{e}^{H_0}} = \langle \mathrm{e}^V \rangle_0 \sum\limits_{\{\alpha_I\}} \mathrm{e}^{H_0},$

这里 $\langle \mathrm{e}^V \rangle_0$ 表示 e^V 对 e^{H_0}的统计平均。而 $\sum\limits_{\{\alpha_I\}} \mathrm{e}^{H_0} = [Z_0(K)]^M, Z_0(K)$ 为一个自旋块对求和的贡献，M是自旋块的个数，易知 $M = N/b^d$.

直接计算可得，对$S_I = +1$ 和对$S_I = -1$ ，均有 $Z_0(K) = \mathrm{e}^{3K} + 3\mathrm{e}^{-K}$.

然后来求 $\langle \mathrm{e}^V \rangle_0$, 令V为小量，做展开：

$$\langle \mathrm{e}^V \rangle_0 = \left\langle 1 + V + \frac{1}{2!}V^2 + \frac{1}{3!}V^3 + \cdots \right\rangle_0 = 1 + \langle V \rangle_0 + \frac{1}{2!}\langle V^2 \rangle_0 + \frac{1}{3!}\langle V^3 \rangle_0 + \cdots$$

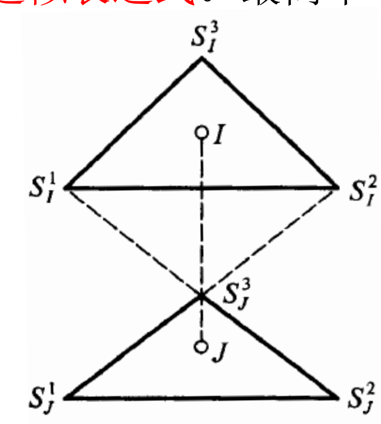
由此可得

$$-\beta H(K', h', \{S_I\}) = \ln[Z_0(K)]^M + \ln\langle \mathrm{e}^V \rangle_0 = M \ln Z_0(K) + \ln\left\{1 + \langle V \rangle_0 + \frac{1}{2!}\langle V^2 \rangle_0 + \frac{1}{3!}\langle V^3 \rangle_0 + \cdots\right\}$$

$$= M \ln Z_0(K) + \langle V \rangle_0 + \frac{1}{2!}\left(\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2\right) + \frac{1}{3!}\left(\langle V^3 \rangle_0 - 3\langle V^2 \rangle_0 \langle V \rangle_0 + 2\langle V \rangle_0^3\right) + \cdots$$

最后的展开即为累积展开。如取其中的有限项，可得重整化的哈密顿量的近似表达式。最简单的只保留到$\langle V \rangle_0$ 项。此时相邻块间相互作用为右下图所示，于是

$$V_{IJ} = K S_J^3 (S_I^1 + S_I^2)$$



因此有 $\langle V_{IJ} \rangle_0 = K\langle S_J^3 \rangle_0 (\langle S_I^1 \rangle_0 + \langle S_I^2 \rangle_0) = 2K\langle S_J^3 \rangle_0 \langle S_I^1 \rangle_0$

和（***）： $\langle V \rangle_0 = 2K \sum\limits_{\langle IJ \rangle} \langle S_J^3 \rangle_0 \langle S_I^1 \rangle_0 + h \sum\limits_{I}^{M} (\langle S_I^1 \rangle_0 + \langle S_I^2 \rangle_0 + \langle S_I^3 \rangle_0)$

下面来求 $\langle S_I^1\rangle_0$， 当 $S_I=+1$时，$\langle S_I^1\rangle_0 = \dfrac{\sum\limits_{\alpha_I^1,\cdots,\alpha_I^4} S_I^1\, \mathrm{e}^{K(S_I^1S_I^2+S_I^2S_I^3+S_I^3S_I^1)}}{\sum\limits_{\alpha_I^1,\cdots,\alpha_I^4} \mathrm{e}^{K(S_I^1S_I^2+S_I^2S_I^3+S_I^3S_I^1)}} = \dfrac{\mathrm{e}^{3K}+\mathrm{e}^{-K}}{\mathrm{e}^{3K}+3\mathrm{e}^{-K}}$

当 $S_I=-1$ 时， $\langle S_I^1\rangle_0 = \dfrac{\sum\limits_{\alpha_I^5,\cdots,\alpha_I^8} S_I^1\, \mathrm{e}^{K(S_I^1S_I^2+S_I^2S_I^3+S_I^3S_I^1)}}{\sum\limits_{\alpha_I^5,\cdots,\alpha_I^8} \mathrm{e}^{K(S_I^1S_I^2+S_I^2S_I^3+S_I^3S_I^1)}} = -\dfrac{\mathrm{e}^{3K}+\mathrm{e}^{-K}}{\mathrm{e}^{3K}+3\mathrm{e}^{-K}}$

于是有 $\langle S_I^1\rangle_0 = \dfrac{\mathrm{e}^{3K}+\mathrm{e}^{-K}}{\mathrm{e}^{3K}+3\mathrm{e}^{-K}} S_I$. 带入到（***）式中可得

$$\langle V\rangle_0 = 2K\sum_{\langle IJ\rangle}\left(\frac{\mathrm{e}^{3K}+\mathrm{e}^{-K}}{\mathrm{e}^{3K}+3\mathrm{e}^{-K}}\right)^2 S_IS_J + 3h\sum_I\left(\frac{\mathrm{e}^{3K}+\mathrm{e}^{-K}}{\mathrm{e}^{3K}+3\mathrm{e}^{-K}}\right)S_I = K'\sum_{\langle IJ\rangle}S_IS_J + h'\sum_I S_I.$$

其中（aa）： $K' = 2K\left(\dfrac{\mathrm{e}^{3K}+\mathrm{e}^{-K}}{\mathrm{e}^{3K}+3\mathrm{e}^{-K}}\right)^2$； $h' = 3h\left(\dfrac{\mathrm{e}^{3K}+\mathrm{e}^{-K}}{\mathrm{e}^{3K}+3\mathrm{e}^{-K}}\right)$.

于是有 $-\beta H(K',h',\{S_I\}) = M\ln Z_0(K) + K'\sum\limits_{\langle IJ\rangle}S_IS_J + h'\sum\limits_I S_I.$

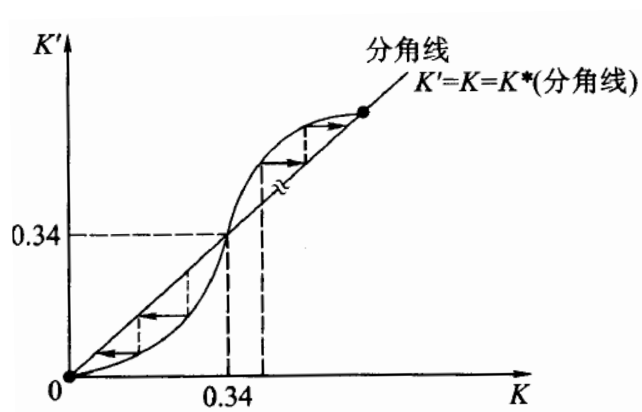
上面第一项为常数，它贡献了系统自由能的解析部分，因此可以略去。

不动点：由(aa)式可发现有三个不动点：

$$(K^*,h^*) = \begin{cases}(0,0)\\(\infty,\infty)\\\left(\frac{1}{4}\ln\left(1+2\sqrt{2}\right),0\right)\approx(0.34,0)\end{cases}$$

前两个为平庸的稳定不动点，分别对应于温度无穷大和零；第三个是不稳定不动点，代表非零有限的临界温度。

右图列出了K分量在重整化群变换里的变化趋势。



临界指数：一阶近似下重整化群变换的变换矩阵为：$M^{(\sqrt{3})}=\begin{bmatrix}\frac{\partial K'}{\partial K} & \frac{\partial K'}{\partial h}\\ \frac{\partial h'}{\partial K} & \frac{\partial h'}{\partial h}\end{bmatrix}_{\substack{K^*\approx 0.34\\ h^*=0}}$

这个矩阵的本征值为： $\Lambda^{(1)}=1.62,\quad \Lambda^{(2)}=2.12.$

由此可解得 $y_t=\dfrac{\ln\Lambda^{(1)}}{\ln\sqrt{3}}=0.88,\quad y_h=\dfrac{\ln\Lambda^{(2)}}{\ln\sqrt{3}}=1.36.$

由 y_t 和 y_h 与六个临界指数的关系即可求得它们的值（见杨展如书304页）。

10.7 动量空间重整化群

我们除了可以在实空间里做粗粒变换，也可以在动量空间里做，而且后者在很多情形下可能更方便。我们先和实空间的情形对比，找到动量空间重整化群的具体步骤。

实空间最基本的动力学变量是自旋 $\sigma(\boldsymbol{x})$，为转到动量空间，我们可以做傅里叶变换：

$$\sigma(\boldsymbol{x})=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\sigma(\boldsymbol{k})\xrightarrow{V\to\infty}\int\frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\sigma(\boldsymbol{k}).$$

动量空间里的自旋 $\sigma(\boldsymbol{k})$ 满足（逆傅里叶变换）：

$$\sigma(\boldsymbol{k})=\int\mathrm{d}^d x\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\sigma(\boldsymbol{x}),\quad k_i=\frac{2\pi n_i}{L}\quad(n_i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

若 $\sigma(\boldsymbol{x})$ 为实数，则 $\sigma^*(\boldsymbol{k})=\sigma(-\boldsymbol{k})$. 一般地，我们有：

$$\int\mathrm{d}^d x\,|\boldsymbol{\nabla}\sigma(\boldsymbol{x})|^2=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}k^2\sigma^*(\boldsymbol{k})\sigma(\boldsymbol{k}),\qquad \int\mathrm{d}^d x\,\sigma(\boldsymbol{x})h^*(\boldsymbol{x})=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\sigma(\boldsymbol{k})h^*(\boldsymbol{k});$$

$$\int\mathrm{d}^d x\,|\sigma(\boldsymbol{x})|^2=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\sigma^*(\boldsymbol{k})\sigma(\boldsymbol{k}),\qquad \int\mathrm{d}^d x\,|\sigma(\boldsymbol{x})|^4=\frac{1}{V}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\\ \boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4}}\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_4)\sigma^*(\boldsymbol{k}_1)\sigma^*(\boldsymbol{k}_2)\sigma(\boldsymbol{k}_3)\sigma(\boldsymbol{k}_4).$$

在实空间里，动力学量其实是粗粒化的（coarse grained），它受限于晶格的最小单位 a。因此波长不能小于 a，相应地，波矢的最大值为 $\Lambda \sim 1/a$.

右图对比了动量空间和实空间的粗粒变换。

可以看出，在实空间里粗粒化相当于在动量空间里改变截断(cutoff)的位置。这可能更为方便。

因此，动量空间重整化群变换分为以下三步：

（1）把哈密顿量对应于波矢 $\Lambda/b < |\boldsymbol{k}| < \Lambda$ 的部分积分掉，只剩下 $0 < |\boldsymbol{k}| < \Lambda/b$ 的部分（粗粒化）：

配分函数：

$$Z = \prod_{|\boldsymbol{k}|<\Lambda} \int \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{k})\, \mathrm{e}^{-H[\sigma(\boldsymbol{k})]} = \prod_{|\boldsymbol{k}|<\frac{\Lambda}{b}} \int \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{k})\, \mathrm{e}^{-H'[\sigma(\boldsymbol{k})]},$$

这里 $$\mathrm{e}^{-H'[\sigma(\boldsymbol{k})]} = \mathrm{e}^{\Omega} \prod_{\frac{\Lambda}{b}<|\boldsymbol{k}|<\Lambda} \int \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{k})\, \mathrm{e}^{-H[\sigma(\boldsymbol{k})]}.$$

（2）把截断从 Λ/b 恢复为Λ（重标晶格长度），即

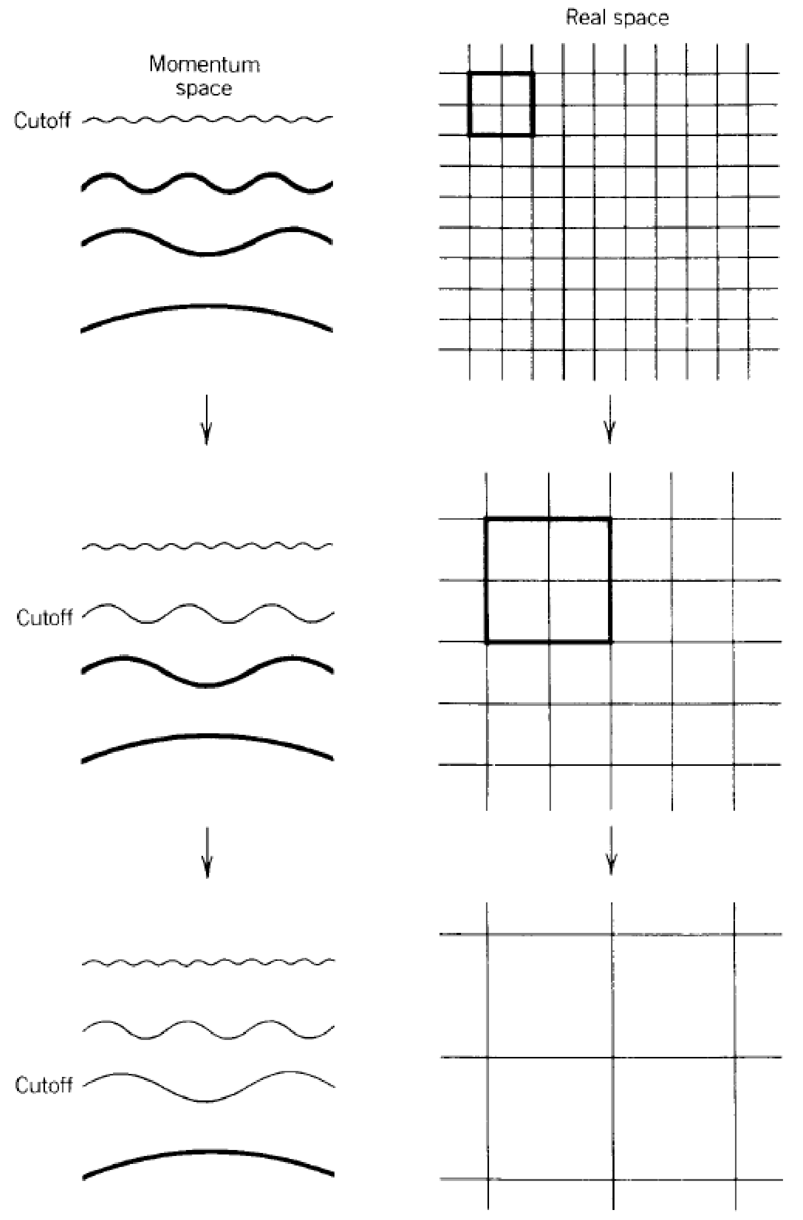
$$\boldsymbol{k}' = b\boldsymbol{k}, \quad H'[\sigma(\boldsymbol{k})] \to H'[\sigma(\boldsymbol{k}')].$$

（3）把 $H'[\sigma(\boldsymbol{k}')]$ 的形式写为与 $H[\sigma(\boldsymbol{k})]$ 相同的形式，从而找到耦合常数的递推关系，即相当于找到：

$$\{\boldsymbol{K}'\} = R_b\{\boldsymbol{K}\}.$$

后面的步骤与以前相同。

动量空间和实空间的粗粒变换



10.8 高斯模型（动量空间重整化群解）

- **高斯模型（精确结果）**：

高斯模型是Ising模型的一个推广，它的自旋取值是连续的且可为任意实数。为使计算结果收敛，我们需要引入权重函数W，它可取为高斯型：

$$W = \exp\left[-\frac{b}{2}\sum_m s_m^2\right] \quad (b>0)$$

而高斯哈密顿量为：$-\beta H' = K\sum_{\langle ij\rangle} s_i s_j \quad (-\infty \le s_i, s_j \le \infty).$

配分函数为：$Z(K) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod_m \mathrm{d}s_m\right] W \mathrm{e}^{K\sum\limits_{\langle ij\rangle} s_i s_j} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod_m \mathrm{d}s_m\right]\mathrm{e}^{K\sum\limits_{\langle ij\rangle} s_i s_j - \frac{b}{2}\sum\limits_m s_m^2}$

由上我们可定义高斯模型的“有效”哈密顿量：$-\beta H = K\sum_{\langle ij\rangle} s_i s_j - \frac{b}{2}\sum_m s_m^2.$

现在把有效哈密顿量换到动量空间。我们利用：

$$s_i = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}} s(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \xrightarrow{V\to\infty} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} s(\boldsymbol{k}); \quad s(\boldsymbol{k}) = a^d\sum_{i=1}^{N} s_i \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

这里 a 为晶格常数，a^d 是d维超立方体的元胞体积。波矢的截断值为$\pm\pi/a$, 对动量的求和遍及**k**空间的第一布里渊区，具体有：

$$-\frac{\pi}{a} \le k_i \le \frac{\pi}{a}, \quad k_i = \frac{2\pi n}{Na}, \quad n = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \cdots, \frac{N}{2}-1.$$

记 $\alpha(\boldsymbol{k}) = \sum_{\langle ij\rangle,\text{fix } j} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)}$, and $K\alpha(\boldsymbol{k}) \equiv B(\boldsymbol{k})$，我们发现

$$K\sum_{\langle ij\rangle,i<j} s_i s_j = \frac{K}{2V^2}\sum_{\langle ij\rangle,i\neq j}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} s(\boldsymbol{k})s(\boldsymbol{k}')\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_j} = \frac{K}{2V(Na^d)}\sum_{\langle ij\rangle}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} s(\boldsymbol{k})s(\boldsymbol{k}')\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)}\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}_j}$$

$$= \frac{K}{2Va^d}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\alpha(\boldsymbol{k})\left(\frac{1}{N}\sum_j \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}_j}\right)s(\boldsymbol{k})s(\boldsymbol{k}') = \frac{K}{2Va^d}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\alpha(\boldsymbol{k})\delta(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k})s(\boldsymbol{k})s(\boldsymbol{k}') = \frac{1}{2Va^d}\sum_{\boldsymbol{k}} B(\boldsymbol{k})|s(\boldsymbol{k})|^2.$$

类似有 $-\frac{b}{2}\sum_m s_m^2 = -\frac{b}{2}\frac{1}{Va^d}\sum_{\boldsymbol{k}}|s(\boldsymbol{k})|^2$. 于是配分函数可写为：

$$Z(K) = \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\prod_{\boldsymbol{k}}\mathrm{d}s(\boldsymbol{k})\Big]\exp\left\{-\frac{1}{2Va^d}\sum_{\boldsymbol{k}}(b-B(\boldsymbol{k}))|s(\boldsymbol{k})|^2\right\}$$

$$= \prod_{\boldsymbol{k}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s(\boldsymbol{k})\exp\left\{-\frac{1}{2Va^d}\sum_{\boldsymbol{k}}(b-B(\boldsymbol{k}))|s(\boldsymbol{k})|^2\right\} = \prod_{\boldsymbol{k}}\left[\frac{2\pi Va^d}{b-B(\boldsymbol{k})}\right]^{1/2}.$$

现在来求 $B(\boldsymbol{k})$:

$$B(\boldsymbol{k}) \equiv K\alpha(\boldsymbol{k}) = K\sum_{\langle ij\rangle,\text{fix } j}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)} = K(\mathrm{e}^{ik_1a}+\mathrm{e}^{-ik_1a}+\cdots+\mathrm{e}^{ik_da}+\mathrm{e}^{-ik_da}) = 2K(\cos k_1a+\cdots+\cos k_da)$$

由上，系统的精确的自由能为：$F = -k_BT\ln Z(K) = \frac{1}{2}k_BT\sum_{\boldsymbol{k}}\ln(b-B(\boldsymbol{k})) - \frac{1}{2}k_BT\sum_{\boldsymbol{k}}\ln(2\pi Va^d)$.

在上式里，第二项求和后与动量无关。第一项显然对所有的**k**均有 $b-B(\boldsymbol{k})\geq 0$. 若自由能有奇异性，则奇异性必发生在 $[b-B(\boldsymbol{k})]_{\min} = b-[B(\boldsymbol{k})]_{\max} = 0$ 处。而由上易知 $[B(\boldsymbol{k})]_{\max} = B(\boldsymbol{k}=0)$，于是临界温度由下式确定：

$$b = B(\boldsymbol{k}=0) = 2Kd.$$

- **重整化群解**：

由于 $\boldsymbol{k}=0$ 对自由能的奇异性起决定作用，我们可以把前页获得的$B(\boldsymbol{k})$ 的表达式在 $\boldsymbol{k}=0$ 附近做展开，并保留到二阶项：

$$B(\boldsymbol{k})=2K\left(d-\frac{1}{2}k^2a^2\right),\quad k^2=\sum_i^d k_i^2.$$

一般的有效哈密顿量可以近似为：

$$-\beta H=\frac{1}{2Va^d}\sum_{\boldsymbol{k}}\left[\left(2d-\frac{b}{K}\right)K-Kk^2a^2\right]|s(\boldsymbol{k})|^2+\frac{h}{a^d}s_0,$$

上式最后一项来自于外磁场：

$$h\sum_i s_i=h\sum_i\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}s(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i}=h\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{s(\boldsymbol{k})}{Na^d}\sum_i\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i}=h\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{a^d}s(\boldsymbol{k})\delta(\boldsymbol{k})=\frac{h}{a^d}s(\boldsymbol{k}=0)\equiv\frac{h}{a^d}s_0.$$

把哈密顿量中的求和换为积分，积分限为 $(-\pi/a,\pi/a)$ ，并引入记号：

$$r\equiv\left(\frac{b}{K}-2d\right)a^{-2},\quad \tilde{h}=\frac{h}{a^d\sqrt{Ka^{2-d}}},\quad \sigma(\boldsymbol{k})=\sqrt{Ka^{2-d}}s(\boldsymbol{k}),$$

我们有：

$$-\beta H=-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\mathrm{d}^dk\,(k^2+r)|\sigma(\boldsymbol{k})|^2+\tilde{h}\sigma_0\approx-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{0\le|\boldsymbol{k}|\le\frac{\pi}{a}}\mathrm{d}^dk\,(k^2+r)|\sigma(\boldsymbol{k})|^2+\tilde{h}\sigma_0,$$

这里最后的近似由于奇异性在 $\boldsymbol{k}=0$ 我们用一个内切超球代替了第一布里渊区。而配分函数为：

$$Z=\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{\boldsymbol{k}}\mathrm{D}\sigma(\boldsymbol{k})\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{0\le|\boldsymbol{k}|\le\frac{\pi}{a}}\mathrm{d}^dk(k^2+r)|\sigma(\boldsymbol{k})|^2+\tilde{h}\sigma_0\right\}.$$

上式对 $\sigma(\boldsymbol{k})$ 的积分是泛函积分。我们将以上面两个式子为基础进行重整化群变换。

第一步：粗粒化，积分掉短波部分。

我们把k分为长波区和短波区两部分。长波区为：$0 \le |\boldsymbol{k}| \le \frac{\pi}{la}$；短波区为：$\frac{\pi}{la} \le |\boldsymbol{k}| \le \frac{\pi}{a}$.

而自旋也可分为长波部分和短波部分：$\sigma(\boldsymbol{k}) = \sigma_L(\boldsymbol{k}) + \sigma_S(\boldsymbol{k})$，比如令 $\sigma_L(\boldsymbol{k}) = \theta\left(\frac{\pi}{la} - |\boldsymbol{k}|\right)\sigma(\boldsymbol{k})$.

相应地，哈密顿量和配分函数都可分为两部分：$-\beta H = -\beta H_L - \beta H_S$, and $Z = Z_L Z_S$.

这里 $-\beta H_S = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\frac{\pi}{la}\le|\boldsymbol{k}|\le\frac{\pi}{a}} \mathrm{d}^d k(k^2+r)|\sigma_S(\boldsymbol{k})|^2$, $\quad -\beta H_L = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{0\le|\boldsymbol{k}|\le\frac{\pi}{la}} \mathrm{d}^d k(k^2+r)|\sigma_L(\boldsymbol{k})|^2 + \tilde{h}\sigma_{L0}$.

$$Z_S = \mathrm{e}^{-f_s/k_BT} = \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{\boldsymbol{k}} \mathrm{D}\sigma_S(\boldsymbol{k}) \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\frac{\pi}{la}\le|\boldsymbol{k}|\le\frac{\pi}{a}} \mathrm{d}^d k(k^2+r)|\sigma_S(\boldsymbol{k})|^2\right\}.$$

于是系统的自由能可写为：

$$f = -k_BT\ln Z = -k_BT\ln Z_L + f_s.$$

由于自由能奇异性只在 $\boldsymbol{k}=0$ 处出现，因此 f_s 应与自由能的解析部分有关，而对临界行为不产生原则性影响，我们可以将其略去。于是粗粒变换后的哈密顿量变为：

$$-\beta H' = -\beta H_L = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{0\le|\boldsymbol{k}|\le\frac{\pi}{la}} \mathrm{d}^d k(k^2+r)|\sigma_L(\boldsymbol{k})|^2 + \tilde{h}\sigma_{L0}.$$

第二步：重标变换。

粗粒变换后自旋和积分区域变了，因此我们做重标：$l\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'(l>1)$，这样 $\boldsymbol{k}'$ 的取值变回 $\left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)$.

自旋可以做重标：$\sigma_L(\boldsymbol{k}) = \sigma_L(\frac{\boldsymbol{k}'}{l}) \equiv \theta(l)\sigma(\boldsymbol{k}')$, $\theta(l)$ 稍后确定。

第三步：找到耦合常数的递推关系。

把重标后的变量代到哈密顿量中得：

$$-\beta H' = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{0\le|\boldsymbol{k}|\le\frac{\pi}{la}} \mathrm{d}^d k(k^2+r)|\sigma_L(\boldsymbol{k})|^2 + \tilde{h}\sigma_{L0} = -\frac{1}{2}\frac{\theta^2(l)}{(2\pi)^d l^{d+2}}\int\limits_{0\le|\boldsymbol{k}'|\le\frac{\pi}{a}} \mathrm{d}^d k'\left(k'^2+l^2 r\right)|\sigma(\boldsymbol{k}')|^2 + \tilde{h}\theta(l)\sigma_0,$$

令 $r'\equiv l^2 r,\quad \tilde{h}'=\tilde{h}\theta(l)$, 并重新记 $\boldsymbol{k}'$ 为 $\boldsymbol{k}$, 我们得

$$-\beta H' = -\frac{1}{2}\frac{\theta^2(l)}{(2\pi)^d l^{d+2}}\int\limits_{0\le|\boldsymbol{k}|\le\frac{\pi}{a}} \mathrm{d}^d k\left(k^2+r'\right)|\sigma(\boldsymbol{k})|^2 + \tilde{h}'\sigma_0.$$

与重整化群变换前的哈密顿量对比，我们发现只要令 $\theta(l)=l^{\frac{d+2}{2}}$，二者就一致。这就确定了 $\theta(l)$.

于是我们发现**重整化群的递推关系**为：$r'\equiv l^2 r,(l>1)\quad \text{and}\quad \tilde{h}'=\tilde{h}l^{\frac{d+2}{2}}$.

不动点：
由上面的递推关系易知系统有一个**不稳定不动点**：$r^*=0\quad \tilde{h}^*=0$.
对应的**临界温度**满足：$b=2Kd$.

临界指数：
（对角的）变换矩阵的本征值易知为：$\Lambda^{(1)}\equiv\Lambda_T=l^2,\quad \Lambda^{(2)}\equiv\Lambda_h=l^{\frac{d+2}{2}}$.

因此 $\quad y_t=\dfrac{\ln\Lambda_T}{\ln l}=2,\quad y_h=\dfrac{\ln\Lambda_h}{\ln l}=\dfrac{d+2}{2}.$

于是可得临界指数为： $\alpha=2-\dfrac{d}{2},\quad \beta=\dfrac{d-2}{d+2},\quad \gamma=1,\quad \delta=\dfrac{d+2}{d-2},\quad \eta=0,\quad \nu=\dfrac{1}{2}.$