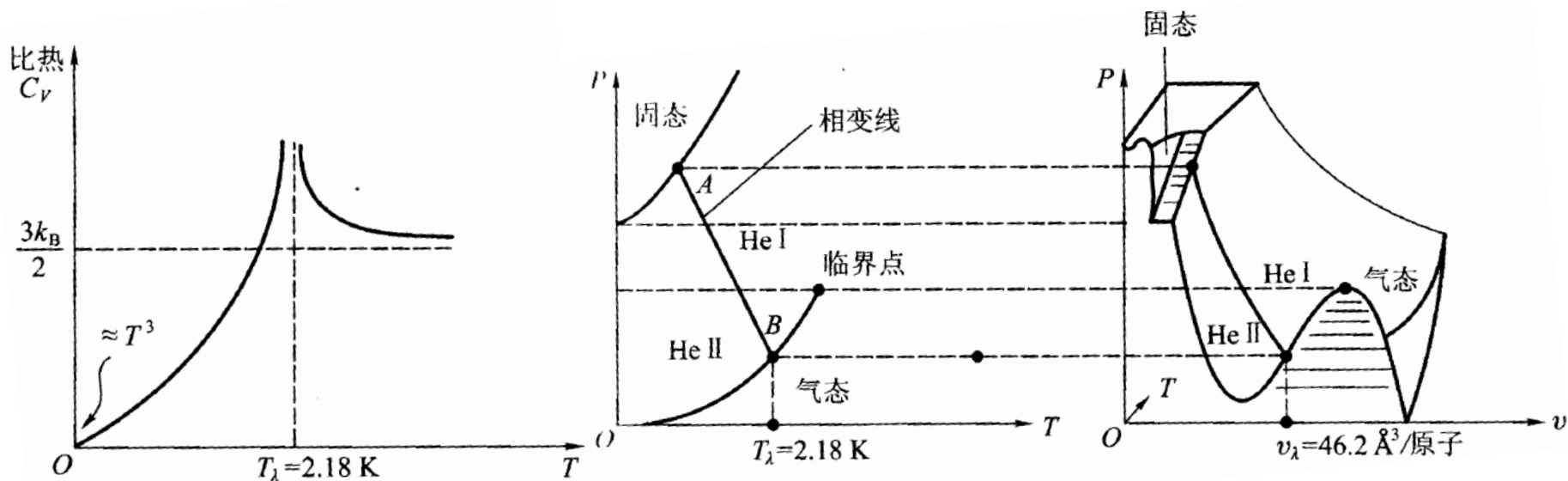


第六章 波色系统：超流性

6.1 液He⁴中的超流相变

自然界中的氦有两种稳定的同位素：He³ 和 He⁴。He³是费米子，He⁴是玻色子。氦原子间相互作用很弱，原子的质量很小从而零点振动能很大，这使得在常压下直到接近绝对零度氦仍可保持液态。在很低的温度下，量子效应起主导作用，因此液氦是典型的**量子液体**。



液He⁴有两个不同的相：正常相He I和超流相He II，正常相沿饱和蒸汽压曲线降温，在温度 $T_\lambda = 2.18 \text{ K}$ 和比容 $v_\lambda = 46.2 \text{ \AA}^3/\text{atom}$ 处发生He I到He II的相变。相变无潜热和体积变化，在相变点比热以对数形式趋于无穷大，表明这是**二级相变**。比热线很像 λ ，因此此相变又称为 λ 相比，曲线AB称为 λ 线。在 $T=0$ 附近，比热以 T^3 规律趋于零。

6.2 液He II的特性 二流体模型

液He II的特性:

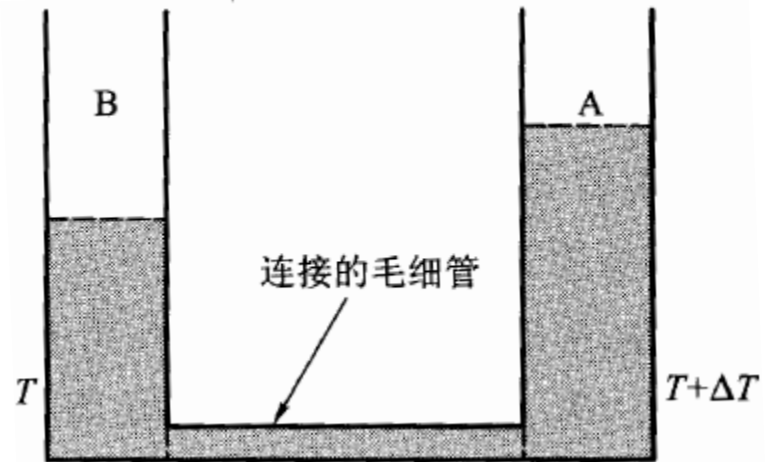
1. 液He II能沿极细的毛细管流动而不呈现任何粘滞性，这称为超流性。而且存在一个临界速度，在这个速度以上，超流性被破坏。
2. 如用一细丝悬挂一薄圆盘浸泡在液He II里，并让圆盘作扭转振动，可以用来测粘滞系数。结果比“毛细管”法测得的大 10^6 倍（与正常相的相似）。且测得的系数强烈依赖于温度，随 $T \rightarrow 0K$ 而趋于零。
3. 当液He II由容器A通过多孔塞（或极细的毛细管）流出时，A内液He II的温度升高（见右下图）。这称为机械热效应，其逆过程称为热机械效应。
4. 液He II的热导率很大，数量级为室温下铜的800倍，而且其热导与通常流体不同，并不正比于温度梯度。

二流体模型的解释:

1. 液He II由正常流体和超流体两种成分组成。超流体没有粘滞性，熵也为零；正常流体具有粘滞性和熵，用 ρ_s 和 ρ_n 表示超流体和正常流体的质量密度，速度场为 \mathbf{v}_s 和 \mathbf{v}_n ，则总质量密度为： $\rho = \rho_s + \rho_n$ ，总质量流为：

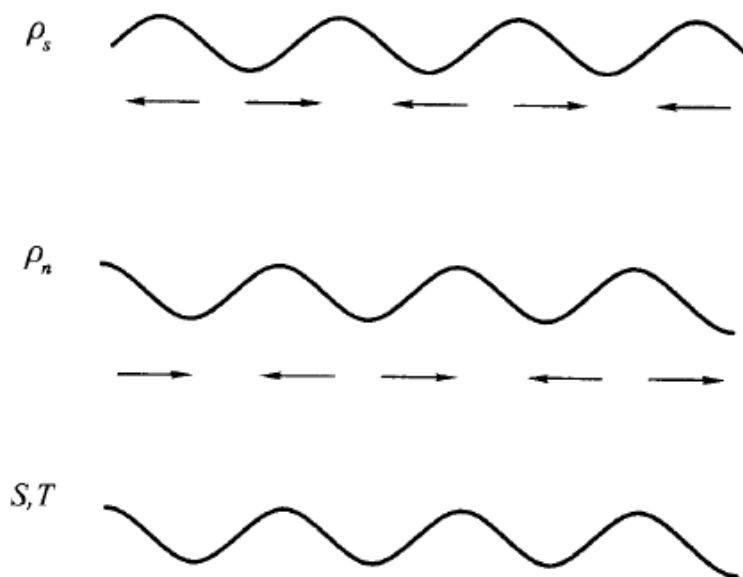
$$\rho \mathbf{v} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n.$$

2. $T=0K$ 时，全部液体为超流体； $T = T_\lambda$ 时，全部为正常成分。二者之间时 ρ_s/ρ 是温度的函数。
3. 超流成分的速度场是无旋的，即 $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ 。且两种流体成分可以相对流动而彼此间无摩擦（无动量交换）。



只有超流成分可通过毛细管，这解释了特性一；
 只有正常流体成分才对圆盘振动起阻尼作用，这解释了特性二；
 机械制热效应：由毛细管流出的只是超流成分，不带走熵。因而容器内流体的单位质量的熵将增加，导致温度增加。这解释了特性三；
 特性四：设想均匀温度的液He II中，某点附近温度突然稍稍上升。按二流体模型，热点的 ρ_n/ρ 要增加，而 ρ_s/ρ 将减小，造成两种成分的密度涨落。为恢复平衡，热点附近的超流成分将向热点流动，同时正常成分将向反方向流动而离开热点，这称作“内运流”。这种内部调整进行的很快，使液He II有极好的导热性。

由于液He II中有两种成分，朗道预言He II中会有两种独立的振动波：若 v_s 和 v_n 方向一致，则振动波传递密度和压强的变化，这是普通的声(第一声)；若 v_s 和 v_n 方向相反，则可能在保持总密度 $\rho = \rho_s + \rho_n$ 基本不变的情况下， ρ_s, ρ_n 分别有涨落。由于超流成分熵为零， ρ_n 的涨落决定了熵密度的涨落和温度的涨落（如图所示）。



6.3 超流体的涡旋运动

昂萨格和费因曼在理论上指出，在液He II的基态或液He II的超流成分中，可以存在一种“组织化的运动”——量子化的涡旋。设N个玻色子组成的超流体的基态波函数为 ψ_0 ，若液He II相以匀速 \mathbf{v}_s 运动，则系统波函数为：

$$\phi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_s \cdot \mathbf{R}} = \psi_0 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} N m \mathbf{v}_s \cdot \frac{1}{N} \sum_j \mathbf{r}_j \right\}$$

这里 $\mathbf{p}_s = N m \mathbf{v}_s$ 是超流体宏观运动的动量， \mathbf{R} 是质心坐标。若各粒子 \mathbf{v}_s 不均匀，在局部意义上上式仍是一个较好的近似。即在比速度发生显著变化的距离小得多的范围内，由局部位移引起的波函数的相位变化为：

$$\Delta\phi = \frac{m}{\hbar} \sum_j \mathbf{v}_{s_j} \cdot \Delta\mathbf{r}_j.$$

现在考虑超流体的涡旋。设想液He II相中的一个闭合环，使环上每一原子从其原位置移到其最近邻位置上。由于波函数的对称性，波函数不变。因此这种位移引起的波函数的相位变化必为 2π 的整数倍，即

$$\frac{m}{\hbar} \sum_j \mathbf{v}_{s_j} \cdot \Delta\mathbf{r}_j = 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

注意求和只对环上的所有原子求和，对宏观尺度的闭合环，求和可换为积分：

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = n \frac{h}{m} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

这表明，环流是量子化的，环流量子为 h/m 。由此可证超流成分的无旋性。由斯托克斯定理，

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{s} = n \frac{h}{m} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

S 为积分回路包围的曲面面积。若此区域是单连通的，且流速 \mathbf{v}_s 在 S 内处处连续，则左方的积分可以随 S 连续地趋于零，但右方不能连续变化，故只有 $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ 。

但对复连通区域或 v_s 有奇点的情形上式不成立。如一个中心在 $r=0$ 处的柱对称的涡旋，其速度场为 $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z) = (0, \omega r, 0)$ 。 $r=0$ 是 \mathbf{v} 的奇点。除涡旋轴（ $r=0$ ）外，我们仍有 $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ ，但对以 $r=0$ 为中心且垂直于 z 轴的圆的积分回路，我们有

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = v_\varphi 2\pi r = n \frac{h}{m} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

实验已观测到量子化涡旋，其半径为 1\AA 左右。

圆柱型容器中超流体的旋转：

对正常液体，由于重力和离心力，液体的自由表面呈抛物面状：

$$z(r) = z(0) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

对超流体又如何？

实验发现超流体和正常液体的形状是一样的。如何与 $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ 的假设协调？

如右图，考虑一系列互相平行的涡旋线的均匀分布阵列。

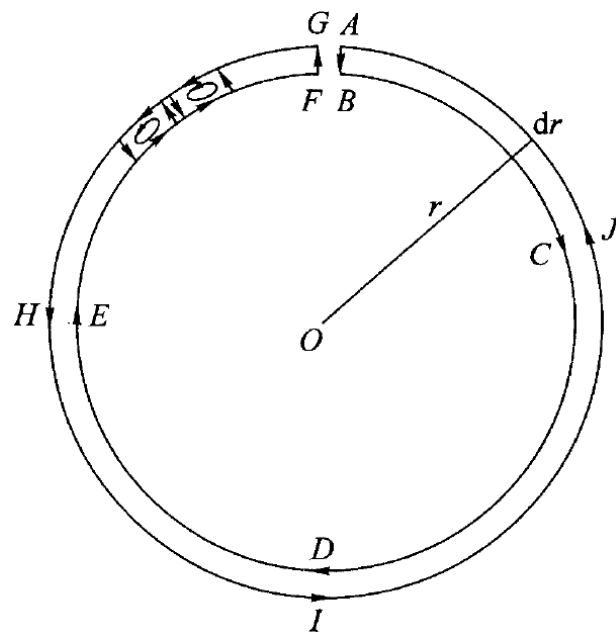
每一（最小）涡旋的环流为 h/m ，以 N 表示单位面积的涡旋线数。考虑半径为 r 及 $r+dr$ 的两圆之间的封闭面元。涡旋线环流之和是 $N2\pi r dr h/m$ 。除去 r 和 $r+dr$ 的圆边界外，相邻涡旋的速度场彼此抵消。

另一方面，面元周界内的净环流又可以计算如下：

$$(v + dv)2\pi(r + dr) - v2\pi r \approx 2\pi d(rv)$$

两种算法的结果应相等，故有 $N = \frac{m}{hr} \frac{d(rv)}{dr}$ 。

若要超流体和正常液体以相同的方式旋转，只需取 $N = \text{Const.} = 2\omega m/h$ 即可。涡旋线间的距离 $d \approx 1/\sqrt{N}$ ，当 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 时， d 约为 0.1 mm 量级，这远比量子化涡旋大。



6.4 朗道超流理论

朗道理论的基本图像是把液He II看成受弱激发的量子波色系统，弱激发态与基态($T=0K$)的偏离表现为在安稳的背景上出现了由元激发或准粒子组成的气体，后者与二流体模型中的正常液体成分对应，而前者代表超流成分（回忆上章最后一节的另一个例子）。

当温度很低时，元激发的密度很低，可以把它们看作元激发的理想气体。令 \mathbf{p} 和 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 代表元激发的动量和能量， $n(\mathbf{p})$ 表示相应的元激发数，则系统低激发态的总能量和动量为：

$$E = E_0 + \sum_{\mathbf{p}} n(\mathbf{p})\varepsilon(\mathbf{p}), \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} n(\mathbf{p}).$$

朗道进一步假设液He II中存在两种不同的波色型元激发（准粒子），即声子和旋子。当 $T \ll T_\lambda$ 时，液He II的比热随 T^3 变化，这是声子的特征，其能谱为 $\varepsilon=cp$ ， c 为声子速度。当温度稍高时，比热有一如 $\exp[-\Delta/k_B T]$ 的附加项，其中 Δ 为常数。由此推测对较大的动量，元激发能量有一个能隙，朗道假定在这个动量范围内能谱为：

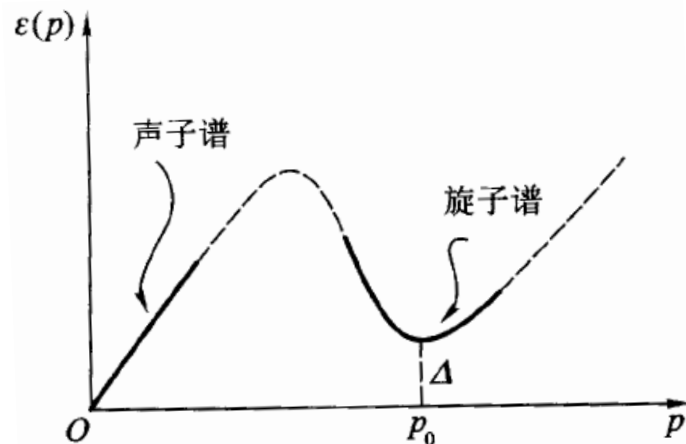
$$\varepsilon(p) = \hbar\omega_k = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m^*} = \Delta + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m^*},$$

m^* 是旋子的有效质量。

热力学性质：

这里准粒子被看作是理想波色气体，准粒子数目不确定，系统的化学势为零。准粒子在能量 $\hbar\omega_k$ 的平均占据数为： $\langle n_k \rangle = 1 / (e^{\beta\hbar\omega_k} - 1)$,

由此可得内能： $U = E_0 + \sum_k \hbar\omega_k \langle n_k \rangle = E_0 + \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 \hbar\omega_k}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1}$ ，和定容比热 $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ 。



因此声子部分贡献的比热为：
$$\frac{C_{\text{phonon}}}{Nk_B} = \frac{2\pi^2 v (k_B T)^3}{15(\hbar c)^3}.$$

旋子贡献的比热在假设 $k_B T/\Delta$ 为小量时，可得

$$\frac{C_{\text{roton}}}{Nk_B} = \frac{2\sqrt{m^*} (k_0 \Delta)^2 v e^{-\Delta/k_B T}}{\hbar (2\pi k_B T)^{3/2}}.$$

这些结果与实验符合的很好。

超流的临界速度($T=0$):

设质量为 M 的超流体以宏观速度 \mathbf{v} 运动，其动量和能量为：

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}, \quad E = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{P^2}{2M}.$$

因此动量和能量的任何变化必满足： $\delta E = \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{P}$ 。

设这一变化是由超流体产生了一个新的元激发引起，其动量为 \mathbf{p} ，能量为 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 。

按能量和动量守恒，元激发的动量和能量必由消耗超流体的宏观流动的动量和能量而来，故

$$\mathbf{p} = -\delta \mathbf{P}, \quad \varepsilon(\mathbf{p}) = -\delta E.$$

因此我们有 $\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \leq vp$ 或 $v \geq \varepsilon(\mathbf{p})/p$ 。

上式说明，要能产生元激发，必须超流体的宏观流速大于 $\varepsilon(\mathbf{p})/p$ ；反之对一切小于 $\varepsilon(\mathbf{p})/p$ 的 \mathbf{v} 值，则由于宏观流动而产生新的元激发是不可能的，即流体继续保持超流。由此得到超流判据：

$$v \leq \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{p} \right)_{\min} \equiv v_c.$$

v_c 即为超流的临界速度。由此易知自由粒子能谱 $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$ 不可能有超流，因

$$v_c = \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{p} \right)_{\min} = \left(\frac{p}{2m} \right)_{\min} = 0.$$

6.5 简并性近理想波色气体 波戈留波夫变换

这里我们用一个简并型近理想波色气体模型来微观地给出液He II的声子能谱。

近理想气体是稀薄的（即密度低），相互作用很弱（可以看作微扰）的粒子系统。此外我们仅考虑系统的低温性质，这时量子效应很明显。几个相关参数：

- 散射长度 a ，它反映相互作用势的强度和作用范围；
- 平均热波长 λ_T ，它代表粒子波包的平均空间范围，属于量子效应，低温时 λ_T 可以很大；
- 粒子间平均距离： $l \sim n^{-1/3}$ （ n 为气体密度）。

我们假定这三个参数间有如下关系（ L 为容器线度）：

$$a \ll \lambda_T; \quad a \ll l; \quad \lambda_T \approx l \ll L.$$

因此相互作用可以按小量 a/λ_T 展开。

哈密顿量及其简化：

设近理想波色气体由 N 个全同的，自旋为零的波色子组成，系统哈密顿量为：

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \hat{u}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}.$$

采用二次量子化表述，上式可写为：
$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad \hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \hat{u} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \hat{a}_{\mathbf{p}'_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}'_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1}$$

其中第二式的求和要满足动量守恒条件， $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$ 及 $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ 分别为动量为 \mathbf{p} 的单粒子态的产生和湮灭算符，它们满足波色算符的对易关系： $[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^+] = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$ ， $[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{p}}^+, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^+] = 0$ 。

相互作用矩阵元为
$$\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \hat{u} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \iint d^3r_1 d^3r_2 \varphi_{\mathbf{p}'_1}^*(\mathbf{r}_1) \varphi_{\mathbf{p}'_2}^*(\mathbf{r}_2) \hat{u}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \varphi_{\mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_2) \varphi_{\mathbf{p}_1}(\mathbf{r}_1),$$

其中 $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$ 是动量为 \mathbf{p} 的单粒子态的波函数。

把波函数表达式代入即可得 $\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \hat{u} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \frac{1}{V} \int d^3 r e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar} u(\mathbf{r})$,
 这里 $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

在低温下, 由量子力学低能散射的波恩近似, 对散射长度 a 我们有: $a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int d^3 r e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar} u(\mathbf{r})$,
 在低能散射下, 动量转移 \mathbf{p} 很小, 可取近似 $e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar} \approx 1$ 。因此

$$a \approx \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int d^3 r u(\mathbf{r}) = \frac{mu_0}{4\pi\hbar^2}, \quad \langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \hat{u} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \approx \frac{u_0}{V}.$$

因此体系的哈密顿量可写为: $\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{u_0}{2V} \sum \hat{a}_{\mathbf{p}'_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}'_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1}$.

再进一步, 我们可以考虑波戈留波夫近似, 即 \hat{a}_0^+ 和 \hat{a}_0 近似地代之以 c 数 (可交换数) $\sqrt{N_0}$, 而且由于我们只考虑低激发态, 有:

$$N_0/N \approx 1, \quad N_{\mathbf{p}}/N \ll 1 \quad (\mathbf{p} \neq 0).$$

因此 $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$ 和 $\hat{a}_{\mathbf{p}} (\mathbf{p} \neq 0)$ 可看作小量, 我们只保留到二次项, 而略去三次及以上的高阶小量。故

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{u_0}{2V} \left\{ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_0^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_0 \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_0^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_0 + \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_0) + \dots \right\}.$$

其中 $\hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 \approx N_0^2 \approx N^2 - 2N \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}$,

二次项的六项近似为 $N_0 (\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ + \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} + 4\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}) \approx N (\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ + \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} + 4\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}})$.

因此哈密顿量最终近似为: $\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{N^2 u_0}{2V} + \frac{N u_0}{2V} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ + \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} + 2\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}})$.

波戈留波夫变换:

类似上章末节, 我们可以通过波戈留波夫变换来把哈密顿量严格对角化。

引入新的波色产生和湮灭算符 $\hat{b}_{\mathbf{p}}^+$ 和 $\hat{b}_{\mathbf{p}}$:

$$\hat{b}_{\mathbf{p}}^+ = u_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ - v_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} - v_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}}^+,$$

其中 $u_{\mathbf{p}}$ 和 $v_{\mathbf{p}}$ 为两个待定参数, 常取为实数, 且 $u_{\mathbf{p}} = u_{-\mathbf{p}}, v_{\mathbf{p}} = v_{-\mathbf{p}}$. 可以验证若令 $u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2 = 1$ 则 $\hat{b}_{\mathbf{p}}^+$ 和 $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ 满足波色对易关系 (注意这两个参数还有一个自由度)。上式的逆变换为:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ = u_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}^+ + v_{\mathbf{p}}\hat{b}_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}}\hat{b}_{-\mathbf{p}}^+,$$

带入到哈密顿量表达式中得

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{N^2 u_0}{2V} + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left\{ \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) v_{\mathbf{p}}^2 + \frac{Nu_0}{V} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} \right\} + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left\{ \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) (u_{\mathbf{p}}^2 + v_{\mathbf{p}}^2) + \frac{2Nu_0}{V} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} \right\} \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}} \\ &+ \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left\{ \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} + \frac{Nu_0}{2V} (u_{\mathbf{p}}^2 + v_{\mathbf{p}}^2) \right\} (\hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{-\mathbf{p}}^+ + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

我们可取两个待定参数的值使得: $\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} + \frac{Nu_0}{2V} (u_{\mathbf{p}}^2 + v_{\mathbf{p}}^2) = 0$, 则上式最后一项为零, 哈密顿量被对角化。

解出参数的值可得: $u_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{1 - L_{\mathbf{p}}^2}}, v_{\mathbf{p}} = \frac{L_{\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - L_{\mathbf{p}}^2}}$, 其中:

$$L_{\mathbf{p}} = \frac{1}{mu^2} \left\{ \varepsilon(\mathbf{p}) - \frac{p^2}{2m} - mu^2 \right\}, \quad \text{where } u = \left(\frac{4\pi\hbar^2 a N}{m^2 V} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{u_0 N}{mV}}, \quad \text{and } \varepsilon(\mathbf{p}) = \left[u^2 p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

从上面 u 和 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 的结果我们发现, 如果散射长度 $a < 0$, u 为虚数, 从而对某些动量 \mathbf{p} 的元激发可使 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 为虚数, 这是粒子间存在吸引作用不可能产生波色-爱因斯坦凝聚的原因。

故哈密顿量为： $\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \varepsilon(\mathbf{p}) \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}} = E_0 + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \varepsilon(\mathbf{p}) \hat{n}_{\mathbf{p}}$,

其中 $E_0 = \frac{1}{2} N m u^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left\{ \varepsilon(\mathbf{p}) - \frac{p^2}{2m} - m u^2 + \frac{m^3 u^4}{p^2} \right\}$.

于是哈密顿量可看作能量为 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 的假想粒子（准粒子或元激发）的能量之和， $\hat{n}_{\mathbf{p}} = \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}}$ 是准粒子的粒子数算符。而 E_0 为基态能量。把求和换做积分后可解出 E_0 ：

$$E_0 = \frac{2\pi a \hbar^2 N^2}{mV} \left[1 + \frac{128}{15} \sqrt{\frac{a^3 N}{\pi V}} \right].$$

由此可得单个粒子的平均基态能： $E_0/N = \frac{2\pi a \hbar^2 n}{m} \left[1 + \frac{128}{15} \sqrt{\frac{a^3 n}{\pi}} \right]$.

在 $T=0K$ 时，我们有： $F = E_0 - TS = E_0$ ，于是

化学势： $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right) = \left(\frac{\partial E_0}{\partial N} \right) = \frac{4\pi a \hbar^2 N}{mV} \left[1 + \frac{32}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{\pi V}} \right]$.

压强： $P_0 = \left(\frac{\partial E_0}{\partial V} \right)_N = \frac{2\pi a \hbar^2 N}{mV^2} \left[1 + \frac{64}{5} \sqrt{\frac{a^3 N}{\pi V}} \right]$.

普通声速为： $c = \sqrt{\left(\frac{\partial P_0}{\partial \rho} \right)} = \sqrt{\frac{4\pi a \hbar^2 N}{m^2 V} \left[1 + 16 \sqrt{\frac{a^3 N}{\pi V}} \right]} \approx \sqrt{\frac{4\pi a \hbar^2 N}{m^2 V}} = u$.

能谱：由前面的能量公式，容易发现： $\varepsilon(\mathbf{p}) = \begin{cases} \frac{p^2}{2m}, & (p \gg mu) \\ up \approx cp. & (p \ll mu) \end{cases}$
我们得到了声子谱，但没有旋子谱。

超流判据：由上节，稳定的超流态速度需满足： $v \leq \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{p} \right)_{\min} = u > 0$ ，这是可以实现的，但也要求系统有排斥势。

不同动量的粒子数:

我们必须区分真实粒子的粒子数 $\langle \hat{N}_{\mathbf{p}} \rangle = \langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle$ 和准粒子的粒子数 $\langle \hat{n}_{\mathbf{p}} \rangle = \langle \hat{b}_{\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}} \rangle$. 前者可用后者很方便的表示出来:

$$\langle \hat{N}_{\mathbf{p}} \rangle = \langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle = v_{\mathbf{p}}^2 + (u_{\mathbf{p}}^2 + v_{\mathbf{p}}^2) \langle \hat{n}_{\mathbf{p}} \rangle, \text{ where } \langle \hat{n}_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon(\mathbf{p})} - 1}.$$

上面由于准粒子数不是固定的, 所以其化学势 $\mu = 0$.

把前面的结果带入, 对 $\mathbf{p} \neq 0$ 我们有: $\langle \hat{N}_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{1 - L_{\mathbf{p}}^2} [\langle \hat{n}_{\mathbf{p}} \rangle + L_{\mathbf{p}}^2 (\langle \hat{n}_{\mathbf{p}} \rangle + 1)]$.

因此有零动量的粒子数为: $\langle \hat{N}_0 \rangle = N - \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \langle \hat{N}_{\mathbf{p}} \rangle = N - \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int \langle \hat{N}_{\mathbf{p}} \rangle d^3p$.

绝对零度时, 不存在准粒子, 所以 $\langle \hat{n}_{\mathbf{p}} \rangle = 0$.

$$\text{但这时 } \langle \hat{N}_0 \rangle = N \left[1 - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{na^3}{\pi}} \right].$$

因此绝对零度时仍有部分真实粒子不处在零动量态上! 这显示了理想气体和非理想气体的区别。

6.6 液He II中正常流体的质量密度

液He II可无摩擦通过毛细管, 这表明超流体的粘滞系数为零。由前一节可知, 超流体的稳定性要求其流动速度小于某个值: $v \leq (\varepsilon(\mathbf{p})/p)_{\min} \equiv v_c$. 于是, 保持超流态必须

对声子: $v \leq c$ (or $v \leq u$);

$$\text{对旋子: } v < \frac{1}{m^*} \left(\sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta} - p_0 \right).$$

由于二流体模型中的正常部分由元激发组成，因此液He II中正常部分的质量密度可从准粒子气体来求出。

设准粒子气体整体以宏观平移速度 \mathbf{v} 相对于液体运动，这时气体的分布函数为 $n(\varepsilon - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v})$ ，其中 $n(\varepsilon)$ 是静止时的分布函数（作为练习）。于是单位体积气体的动量为：

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p} n(\varepsilon - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) \frac{d^3 p}{h^3}.$$

在 \mathbf{v} 很小时，把 $n(\varepsilon - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v})$ 按 $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})$ 展开，有

$$\mathbf{P} = \frac{1}{h^3} \int d^3 p \mathbf{p} \left\{ n(\varepsilon) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} + \dots \right\}.$$

由于易知大括号内第一项积分为零，所以

$$\mathbf{P} = \rho_n \mathbf{v} \approx -\frac{1}{h^3} \int d^3 p \mathbf{p} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = -\frac{4\pi}{3h^3} \mathbf{v} \int_0^\infty \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} p^4 dp = \left(-\frac{4\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} p^4 dp \right) \mathbf{v}.$$

这就获得了液He II中正常部分的质量密度。

对声子谱, $\varepsilon = cp = up$, 利用波色-爱因斯坦分布可得 $(\rho_n)_{\text{phonon}} = \frac{16\pi^5 (k_B T)^4}{45 h^3 u^5}$.

对旋子谱, 用玻耳兹曼分布近似表示其分布, 我们可得 $(\rho_n)_{\text{roton}} = \frac{(2\pi)^{3/2} 2\sqrt{m^*} p_0^4}{3(k_B T)^{1/2} h^3} e^{-\Delta/k_B T}$.

由这两个表达式可知, 温度非常低时声子对正常部分的贡献较大, 但在3.6 K, 二者的贡献差不多, 更高温时旋子的贡献占优。

练习：证明以宏观速度 \mathbf{v} 作整体运动的准粒子气体在每个单粒子能级 ε 上的占据数为：

$$\langle n(\mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{\exp\{\beta(\varepsilon - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p})\} - 1}$$

提示：准粒子气体系统有两个约束：总能量 E 和总动量 P 恒定，所以此时能级 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 的占据数为（由拉格朗日乘子法）：

$$\langle n(\mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) - 1}.$$

假设宏观速度方向为 z 轴，应有 $v = \langle u \cos \theta \rangle$ ，这里对声子：

$$\varepsilon = pc, u = \frac{d\varepsilon}{dp} = c.$$

由 $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} = \gamma_z p_z = \gamma_z p \cos \theta$ 及上面 $\langle n(\mathbf{p}) \rangle$ 的表达式可算得 $v = -\gamma_z / \beta$.