分类号：______________　　　　单位代码：10335
密　级：______________　　　　学　　号：11435023

浙江大学

博士学位论文

中文论文题目：极值组合若干问题的研究和应用

英文论文题目：**Several problems in extremal combinatorics and their applications**

申请人姓名：钱昺辰

指导教师：葛根年教授

专业名称：应用数学

研究方向：极值组合与编码理论

所在学院：数学科学学院

论文提交日期：二〇二二年四月

极值组合若干问题的研究和应用

论文作者签名：

指导教师签名：

论文评阅人 1：
评阅人 2：
评阅人 3：
评阅人 4：
评阅人 5：

答辩委员会主席：张国川　教授　浙江大学
委员 1：张国川　教授　浙江大学
委员 2：谈之奕　教授　浙江大学
委员 3：冯涛　研究员　浙江大学
委员 4：胡思煌　教授　山东大学
委员 5：上官冲　教授　山东大学

答辩日期：二〇二二年五月

Several problems in extremal combinatorics and their applications

Author's signature: ____________________

Supervisor's signature: ____________________

External Reviewers: ____________________

Examining Committe Chairperson:

Guochuan Zhang Prof. Zhejiang University

Examining Committe Members:

Guochuan Zhang Prof. Zhejiang University

Zhiyi Tan Prof. Zhejiang University

Tao Feng Prof. Zhejiang University

Sihuang Hu Prof. Shandong University

Chong Shangguan Prof. Shandong University

Date of oral defence: May 2022

浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 浙江大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：　　　　　　　　　签字日期：　　　年　　月　　日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 浙江大学 有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 浙江大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：　　　　　　　　　导师签名：

签字日期：　　　年　　月　　日　　签字日期：　　　年　　月　　日

致 谢

时光荏苒，犹如白驹过隙。一转眼，八年的博士生涯已走向末尾。在这个阶段，我遇到了许多人，也经历了许多事，有过挫折，有过失落，但是最终还是很幸运，感受到了许多良师益友的深切鼓励与关怀，在此我想表达我最诚挚的感谢。

首先我要感谢我的导师葛根年教授。在这多年的博士生生涯中，葛老师在学习、科研、生活与为人处世等诸多方面给予了我很多的教导和建议。尤其在我科研进展处于低谷的那最为彷徨的阶段中，葛老师的指导与帮助使得我重拾信心，调整心态，才得以顺利完成学业。葛老师高瞻远瞩的学术视野和严谨认真的学术作风将使学生终身受益。

我还要感谢这多年在学习和生活上给予过我指导的各位老师，特别是浙江大学冯涛研究员等。在与他们的交流中，我得以开拓研究视野，体会到科研的乐趣，也感谢他们对我的种种建议与鼓励。

感谢在一起学习与科研的同门：魏恒嘉师兄、胡思煌师兄、李抒行师兄、汪馨师兄、张一炜师兄、上官冲师兄、张韬师兄、顾玉杰师姐、马景学师兄、丁报昆师兄、孔祥粱、戚立波、李伟聪、奚元霄、韩雪姣、徐子翔、谢城飞、兰昭君、余文俊、叶左、徐民、魏歆、李好阳、何智文、陶然、王野、孙钰博、刘欣、于泉勇、马鋆、狄文帝等。特别要感谢李抒行师兄和张一炜师兄，在我低谷的时候鼓励了我许多；还要特别感谢汪馨师兄，在很多方面对我都有所指点，让我收获良多。

还要感谢我亲爱的朋友们：林俊贤、周孝佳、徐轶凡、袁旸、何敬、周云龙、邱宇峰、朱振涛等，在与他们的交流中，我获得了许多收获与快乐。

最后，我要感谢我的父母与家人，感谢他们的支持与关怀，使我能不畏风雨，勇敢前行！

由于作者水平有限，加之时间和篇幅所限，文中难免有谬误和不详之处，敬请各位专家学者不吝批评指正！

摘 要

极值组合是近年来离散数学中十分活跃的分支之一，其优势不仅在于其自身有着值得研究的课题以及深刻的理论，并且还能广泛应用于其它领域，比如信息论和群试理论等。本论文主要研究了两方面的问题，一个是极值组合自身的问题，包括广义 Turán 问题和图的最小度与其子图的性质问题，另一个是极值组合的方法在非自适应性组合群试上的运用。

在第 1 章绪论部分，我们将简要介绍本文所涉及的各种问题的相关背景，并概述本文对此问题所做的推进工作。

在第 2 章中，我们研究的是一个与广义 Turán 问题密切相关的问题。给定一个图 H 和一个 k 染色的图 F ，如果 Turán 图 $T_{k-1}(n)$ 是在所有 n 个点（ n 充分大）的不包含 F 的图中，拥有最多数目 H 的图，则称 H 是 F-Turán 好图，当 F 为 K_k 时简称为 k-Turán 好图。在该章中，我们构造了一些新的 k-Turán 好图类，并证明了对所有的 $k \geq 4$，P_4 和 P_5 都是 k-Turán 好图。

在第 3 章中，我们研究的问题最早是由 Erdős 在 1983 提出的，即一个图满足什么条件的时候，其最大的不包含三角形的子图和最大的二部子图边数一样多。在该章中，我们考虑了更一般的问题，即定义 δ_r 为最小的数，但是能使得任意 n 个点且最小度为 $\delta_r n$ 的图满足其最大不包含 K_r 的子图与最大的 $r-1$ 部子图边数一样多。我们证明了 $\frac{3r-4}{3r-1} \leq \delta_r \leq \frac{4(3r-7)(r-1)+1}{4(r-2)(3r-4)}$，并且还将 δ_4 改进到 $\delta_4 \leq 0.9415$。

在第 4 章中，我们的研究对象是非自适应性组合群试理论。该理论主要目的是用尽可能少的测试次数从 n 个样本中确定不超过 t 个的阳性样本。分离矩阵和可分矩阵是两个经典的模型结构，前者有着高效的解码算法，而后者需要的测试次数更少，即有着更大的码率。最近，Fan 等人提出了强可分矩阵的概念，该模型有着和分离矩阵一样的高效解码算法并且还有更大的码率。通过改良的概率方法，我们改进了强可分矩阵码率的下界。并且，运用该方法，我们还改进了一些广为人知的组合结构的码率的下界，包括局部稀薄集族和消去集族。

在第 5 章中我们对其它在研问题做了简要汇报。

在第 6 章中我们对本论文进行总结，并展望未来。

关键词：k-Turán 好图，最小度，不包含 K_r，r 部图，强可分矩阵，局部稀薄集族，消去集族

Abstract

Extremal combinatorics is one of the most active branches in discrete mathematics, the advantage of which lies not only in its own research topics and profound theories, but also in its wide application in other fields, such as information theory, group testing theory and so on. This thesis mainly involves two problems. The fist one is about extremal combinatorics itself, including generalized Turán problems and the connections between the minimal degree of a graph and the properties of its subgraphs. The second one is the applications of the tools in extremal combinatorics to nonadaptive combinatorial group testing.

In Chapter 1, we will briefly introduce the backgrounds of the problems concerned with this thesis and summarize our main contributions towards these problems.

In Chapter 2, we consider a problem which is related to the generalized Turán problems. Given a graph H and a k-chromatic graph F, if the Turán graph $T_{k-1}(n)$ has the maximum number of copies of H among all n-vertex F-free graphs (for n large enough), then H is called F-Turán-good, or k-Turán-good for short if F is K_k. In this chapter, we construct some new classes of k-Turán-good graphs and prove that P_4 and P_5 are both k-Turán-good for $k \geq 4$.

In Chapter 3, we investigate the problem which was proposed by Erdős in 1983, i.e., finding conditions on a graph G which imply that the largest number of edges in a triangle-free subgraph is equal to the largest number of edges in a bipartite subgraph. In this chapter, we consider a more general problem by defining δ_r to be the least number so that any graph G on n vertices with minimum degree $\delta_r n$ has the property that the largest number of edges in an $(r-1)$-partite subgraph equals to the largest number of edges in a K_r-free subgraph. We show that $\frac{3r-4}{3r-1} \leq \delta_r \leq \frac{4(3r-7)(r-1)+1}{4(r-2)(3r-4)}$ when $r \geq 4$. We also show $\delta_4 \leq 0.9415$.

In Chapter 4, we focus on nonadaptive combinatorial group testing. In nonadaptive group testing, the main research objective is to design an efficient algorithm to identify a set of up to t positive elements among n samples with as few tests as possible. Disjunct matrices and separable matrices are two classical combinatorial structures while one provides a more efficient decoding algorithm and the other needs fewer tests, i.e., larger rate. Recently, the notion of strongly separable matrix has been introduced, which has the same identifying ability as a disjunct matrix, but has larger rate. In this section, we use a modified probabilistic method to improve the lower bounds for the rate of strongly separable matrices. Using this method, we also improve the lower bounds for the rates of some well-known combinatorial structures, including locally thin set families and cancellative set families

In Chapter 5, we briefly introduce some other topics still under investigation.

In Chapter 6, we summarize the thesis and make some prospects for the future.

Keywords: k-Turán-good, minimal degree, K_r-free, r-partite graphs, strongly separable matrices, locally thin set families, cancellative set families

表 目 录

目 次

1 绪论

1.1 k-Turán 好图

Turán 定理是极值组合中最基本且最重要的定理之一。其核心是确定一个不包含某个禁止子图的图的最大边数。Turán 数 $ex(n,F)$ 表示 n 个顶点的不包含 F 的图的最大边数。自从 Turán 在 1941 年发表文章[51] 之后，确定 Turán 数便成为了极值组合的核心问题。在文献[51] 中，Turán 解决了 $F=K_t$，即 t 个点的完全图的情况，并证明了极值情况的构造是 n 个顶点的完全 $k-1$ 部图，并且每部的点数为 $\lceil \frac{n}{k-1} \rceil$ 或者 $\lfloor \frac{n}{k-1} \rfloor$。这样的图叫做 Turán 图，记为 $T_{k-1}(n)$。

Turán 问题也有许多的扩展，其中十分重要的一项就是广义 Turán 问题，这最早是由 Alon 和 Shikhelman 在[4] 中首先系统研究的，其主旨是确定 $ex(n,H,F)$，即 n 个顶点的不包含 F 的图中最大的子图 H 的数目。更新的结果可以参考[32–34,36,38]。该问题的一个主要难点在于只有少数的图能够满足极值情况，但是 Turán 图是个例外。在[35] 中，Gerbner 和 Palmer 确定了何时 Turán 图为广义 Turán 问题的极值构造。

固定一个 k 染色的图 F 和一个不包含 F 的图 H，我们称 H 是 F-Turán 好图如果对于每个充分大的 n 都有 $ex(n,H,F)=\mathcal{N}(H,T_{k-1}(n))$，其中 $\mathcal{N}(H,G)$ 表示 G 中 H 的数目。如果 $F=K_k$，则简称为 k-Turán 好图。关于 k-Turán 好图的更多结果，可以参考[30,35]，以及它们的引文。

Gerbner 和 Palmer 在文献[35] 中给出了几类新的 k-Turán 好图，并提出猜想：对于任意一对整数 l 和 k，路径 P_l 都是 k-Turán 好图。

在第 2 章中，我们通过构造一些新的 k-Turán 好图类以及运用一些已知的图的结论，巧妙地证明了如下定理。

定理 1：对于任意的 $k\geq 3$，P_4 和 P_5 都是 k-Turán 好图。

该工作已发表于《Discrete Mathematics》。

1.2 图的最小度与子图问题

极值组合中另一个十分重要的问题是对图的子图的研究，通常可以是最大的团或者最大的独立集。在 1983 年，Erdős[17] 提出了下列问题：哪些图的最大二部子图和最大不包含三角形的子图有相等数量的边数。

为了叙述方便，我们先给出一些符号。给定一个图 G，对每个大于等于 3 的正整数 r，我们令 $P_r(G)$ 表示 G 中 r 部子图的最大的边数，令 $f_r(G)$ 表示 G 中不包含 K_r 的子图的最大边数。显然，$P_{r-1}(G) \le f_r(G)$。令 δ_r 表示使得下述成立的最小的数：对于充分大的 n ，任何 n 个点满足最小度 $\delta(G) \ge \delta_r n$ 的图 G，我们都有 $P_{r-1}(G) = f_r(G)$。

由 Turán 定理，Erdős[17] 注意到 $P_{r-1}(G) = f_r(G)$ 对于 G 是完全图的时候成立。后来，Bondy、Shen、Thomassé 和 Thomassen[8] 得到了一个比较好的结果，他们证明了 $P_{r-1}(G) = f_r(G)$ 成立的充分条件可以是对图的最小度加要求。并且，他们还证明了 $0.675 \le \delta_3 \le 0.85$。在 2006 年，Balogh、Keevash 和 Sudakov[7] 把这个上下界改进到了 $0.75 \le \delta_3 < 0.791$。

在第 3 章中，我们分别给出了 $r \ge 4$ 的 δ_r 的上下界，得到了如下定理。

定理 2：当 $r \ge 4$ 时，我们有 $\frac{3r-4}{3r-1} < \delta_r \le \frac{4(3r-7)(r-1)+1}{4(r-2)(3r-4)}$。

并且对于 $r = 4$ 的情况，我们额外改进了它的上界。

定理 3：$\delta_4 \le 0.9415$。

该工作已发表于《Discrete Mathematics》。

1.3 强可分矩阵与某些组合结构

群试理论是一门关于检测的科学，该问题源于二战时期，美国需要通过血样检测美军是否携带梅毒，但是当时血液检测耗时耗钱，将每个士兵的血液都检查一遍效率很低。考虑到携带梅毒的总归是少数，所以可以将全部待检测士兵的血样分组混合后再检测，如果混合后的血样没有病毒，可以推定整个组都没有病毒，如此便能够减少不必要的检测。在 1943 年，哈佛大学的 Dorfman 提出了群试的基本模型[11]，彻底改良了从前逐次测试的方法。该论文也被认为是组合群试理论的开山

之作。

假设每个样本被给予了一个待定的二元状态，阳性（也称为感染态）和阴性（也称为纯静态）。每次都可以对若干个样本的混合体进行测试。我们的策略就是把样品分组，设计成若干个相互独立的测试。如果某次测试结果为阳性，则说明它至少包含一个阳性样本；如果测试结果是阴性，则说明它包含的所有样本都是阴性的。因此，阴性的结果可以帮助我们排除许多样本，再去考虑剩下的样本。

在群试中，有两种一般性的模型算法，自适应性算法和非自适应性算法。自适应性算法被设计成若干轮，同轮间的测试是独立的，但是后轮能用到所有前轮的结果信息。反之，非自适应性算法必须同时进行所有测试，并且要马上识别出所有阳性的样本。由于可以利用更多信息，自适应性算法通常能比非自适应性算法需要更少的测试次数。然而，非自适应性算法也有其自身的优势，它更节约时间。另一方面，群试也可以根据阳性样本的概率分布分成概率群试和组合群试。在概率群试中，阳性样本符合某种概率分布，而在组合群试中，阳性样本的数目通常假设不超过某个固定的值。我们研究的对象主要是非自适应性的组合群试方案。

文献[12] 证明了 t-分离矩阵（t-disjunct matrix，t-DM）和 $\bar{t}$-可分矩阵（$\bar{t}$-separable matrix，$\bar{t}$-SM）能够用于阳性样本数目不超过 t 的非自适应性的组合群试方案，但是各有优缺点。简单来说，t-DM 根据测试结果能提供更有效率的确定阳性样本的方案，而 $\bar{t}$-SM 需要的测试次数更少，即能提供更大的码率。为了将二者的优势结合在一起，在文献[23] 中，Fan 等人提出了一种新的模型，称为 t-强可分矩阵（strongly t-separable matrix，t-SSM），该模型有着和 t-DM 相同的确定阳性样本的能力，但是条件要求更弱。同时，他们给出了 2-强可分矩阵码率的下界，并希望能得到 $t \geq 3$ 的 t-强可分矩阵码率的下界。

我们运用改进的概率方法，成功地改进了 2-强可分矩阵码率的下界，并且给出了一般的 t-强可分矩阵码率下界的计算方法，同时也改进了 3-强可分矩阵码率的下界。我们还发现，该方法也可作用于一些广为人知的组合结构的码率下界上，包括局部稀薄集族和消去集族。这部分内容对应本论文的第 4 章。该工作已投稿至《IEEE Transactions on Information Theory》。

2 k-Turán 好图

2.1 引言

对于给定的图 F，如果 G 中没有与 F 同构的子图，我们称 G 是不包含 F 的。极值组合中被最广泛研究的领域之一就是 Turán 理论，即确定 n 个顶点的不包含 F 的图的最大边数，记为 $ex(n,F)$。极值图论中的一个奠基石工作便是 Turán 定理[51]，它确定了不包含 K_k 的 n 个顶点的图的最大边数。极值情况的构造是 n 个顶点的完全 $k-1$ 部图，并且每部的点数为 $\lceil\frac{n}{k-1}\rceil$ 或者 $\lfloor\frac{n}{k-1}\rfloor$。这样的图叫做 Turán 图，记为 $T_{k-1}(n)$。

Alon 和 Shikhelman 在[4] 中首先系统地研究了广义 Turán 问题，即确定广义 Turán 数 $ex(n,H,F)$，表示 n 个顶点的不包含 F 的图中最大的子图 H 的数目。最新的结果可以参考[32–34,36,38] 以及它们的引文。确定 $ex(n,H,F)$ 的确值的一个难点在于只有少数的图能够满足极值情况。但是 Turán 图是个例外。在[35] 中，Gerbner 和 Palmer 确定了在哪些情况下 Turán 图为广义 Turán 问题的极值构造。

我们首先给出一些符号表示。固定图 H 和 G，分别用 $\mathcal{N}(H,G)$ 和 $\mathcal{N}(\text{ind-}H,G)$ 表示 G 中子图 H 和诱导子图 H 的数目，则 $ex(n,H,F)=\max\{\mathcal{N}(H,G):$ G 为 n 个顶点的不包含 F 的图$\}$。K_n 表示 n 个点的完全图。C_n 表示 n 个点的圈。P_n 表示 n 个点的路径（有 $n-1$ 条边）。M_l 表示 $2l$ 个点 l 条边的匹配。如果 $X\subseteq V(G)$，$G[X]$ 表示 G 在 X 上的诱导子图。我们说 G 的一条边 e 是染色临界的如果删掉 e 后，G 的染色数会减少。

定义 4：[35] 固定一个 k 染色的图 F 和一个不包含 F 的图 H，我们称 H 是 F-Turán 好图如果对于每个充分大的 n 都有 $ex(n,H,F)=\mathcal{N}(H,T_{k-1}(n))$。如果 $F=K_k$，则简称为 k-Turán 好图。

因此 Turán 定理说明了对于任意的 $k>2$，K_2 是 k-Turán 好图。Zykov 的一个早期结果[52]（也可参考 Erdős[16]）说明了对任意的正整数 $r\le k-1$，K_r 是 k-Turán 好图。

定理 5：[52] Turán 图 $T_{k-1}(n)$ 是唯一的 n 个点的不包含 K_k 的且有最多数量

的 K_r 的图。于是有

$$ex(n, K_r, K_k) = \mathcal{N}(K_r, T_{k-1}(n)) \leq \binom{k-1}{r} \left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil^r.$$

定理 5 被 Ma 和 Qiu[46] 扩展到了含有染色临界边的图上。

定理 6：[46] 令 F 是含有染色临界边的图，且染色数大于 r，则 K_r 是 F-Turán 好图。

Győri、Pach 和 Simonovits[37] 证明了 $m \geq 3$ 个点的包含 $\lfloor m/2 \rfloor$ 条独立边的二部图 H 是 3-Turán 好图。这可推出 l 个点的路径 P_l、偶圈 C_{2l} 以及 Turán 图 $T_2(m)$ 都是 3-Turán 好图。他们还给出了下述的一般性定理。

定理 7：[37] 令 $r \geq 3$，令 H 是 $m > k-1$ 个点的 $k-1$ 部图，并包含 $\lfloor m/(k-1) \rfloor$ 个点不交的 K_{k-1}。进一步假设对 H 中任意一部的任意两个点 u 和 v，都存在一个 H 的 $k-1$ 个点的完全子图序列 $A_1, \ldots, A_s$ 使得 $u \in A_1, v \in A_s$，并且对任意的 $i < s$，都有 A_i 和 A_{i+1} 相交 $k-2$ 个点，则 H 是 k-Turán 好图。

推论 8：[37] 路径、偶圈和 $K_{2,3}$ 都是 3-Turán 好图，$T_{k-1}(m)$ 是 k-Turán 好图。

最近，Gerbner 和 Palmer[35] 得到了类似的结果，给出了一类新的 k-Turán 好图。

定理 9：[35] 令 H 是 k-Turán 好图。令 H' 是 H 按照下述构造得到的图。选取 H 中的一个点集为 X 的完全子图，外加一个 K_{k-1} 并且任意地连接 K_{k-1} 与 X 中的点，从而得到 H'，则 H' 是 k-Turán 好图。

并且，Gerbner[30] 还给出了下述结果。

定理 10：[30] 对任意的存在染色临界边的图 F，M_l 是 F-Turán 好图。

关于 k-Turán 好图的更多结果，可参考[30,35] 以及它们的引文。

并且，Gerbner 和 Palmer 提出了下面的猜想。

猜想 11：[35] 对于任意一对整数 l 和 k，路径 P_l 是 k-Turán 好图。

猜想 12：[35] 路径 P_k 和偶圈 C_{2k} 都是 C_{2l+1}-Turán 好图。

在同一篇文章中，他们取得了一些成果，即，他们证明了猜想 11 对于 $l =$

3 且 $k \geq 3$ 是成立的，而且整个猜想在渐进意义下是成立的。他们还还证明了猜想 12 对当 $l \geq 3$ 时的 P_3，以及当 $l = 2$ 时的 P_4 和 C_4 是成立的。他们还得出如果 P_{2k} 是 F-Turán 好图，则 C_{2k} 是 F-Turán 好图，其中 F 是一个染色数为 3 的图。最近 Gerbner[31] 已经证明了猜想 12。

在文献[30] 中，Gerbner 证明了猜想 11 中下面的情况。

命题 1：[30] P_4 是 4-Turán 好图。

在本章中，我们给出一些新的 k-Turán 好图，并且证明对于 $k \geq 4$，P_4 和 P_5 都是 k-Turán 好图。

本章的结构如下。在第 2.2 节，我们构造了一些新的 k-Turán 好图类。在第 2.3 节和 2.3 节，我们分别证明 P_4 和 P_5 是 k-Turán 好图。最后，第 2.5 节对本章进行小结。

2.2 一些新的 k-Turán 好图

对于任意的三个图 G、G_1 和 G_2，定义 $S_{G_1,G_2}(G) = \{(H_1, H_2) : H_1$ 和 H_2 是 G 的点不交的子图，H_1 是 G_1 的复制，H_2 是 G_2 的复制 $\}$。当 G_1 是 K_l，G_2 是 K_k 的时候，我们也简写为 $S_{l,k}(G)$。

选取两个点不交的完全图 K_l 和 K_k，并且任意地连接 K_l 中的点和 K_k 中的点，得到的图记为 H。令 G 是一个图。对于每个 $(H_1, H_2) \in S_{l,k}(G)$，令 $f_G(H, (H_1, H_2))$ 表示 H 在 $G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 的数目，其中 H_1 对应 H 中的 K_l，H_2 对应 H 中的 K_k。于是有

$$\mathcal{N}(H, G) = \frac{1}{a} \sum_{(H_1,H_2)\in S_{l,k}(G)} f_G(H, (H_1, H_2)),$$

其中 a 是 H 如何从 K_l 和 K_k 连边得到的方式的数目，只与 H 有关。准确地说，$a = |S_{l,k}(H)|$。

举例来说，给定 K_2 和 K_1，如果我们将 K_2 中的一个点与 K_1 相连，则得到路径 P_3，用 H 表示。令 G 为 K_3，$V(G) = \{u, v, w\}$，则有 $f_G(H, (G[u, v], G[w])) = 2$，并且

$$\mathcal{N}(H, G) = \frac{1}{2}(2 + 2 + 2) = 3.$$

命题 2： 选取两个点不交的完全图 K_l 和 K_1，任意地连接 K_l 中的点和 K_1 中的点，得到的图记为 H，假设 H 不是 K_{l+1}，则 H 是 k-Turán 好图，其中 $k \geq l+1$。

证明. 令 G 是一个不包含 K_k 且含有 H 数目最多的图。我们简记 $S = S_{l,1}(G)$ 以及 $T = S_{l,1}(T_{k-1}(n))$。令 $s = |S|$，$t = |T|$，则有 $s = \mathcal{N}(K_l, G)(n-l)$ 以及 $t = \mathcal{N}(K_l, T_{k-1}(n))(n-l)$。由于 G 不包含 K_k，所以 $\mathcal{N}(K_l, G) \leq \mathcal{N}(K_l, T_{k-1}(n))$，于是 $s \leq t$。

令 $S = S_1 \cup S_2$，其中 $S_1 = \{(H_1, H_2) : H_1$ 和 H_2 是 G 的点不交的子图，H_1 是 K_l，H_2 是 K_1，且 $G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 是 $K_{l+1}\}$，$S_2 = \{(H_1, H_2) : H_1$ 和 H_2 是 G 的点不交的子图，H_1 是 K_l，H_2 是 K_1，且 $G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 不是 $K_{l+1}\}$。令 $s_1 = |S_1|$，$s_2 = |S_2|$，则有 $s = s_1 + s_2$。类似地，定义 T_1、T_2、t_1 以及 t_2。

注意到 $s_1 = \mathcal{N}(K_{l+1}, G)(l+1)$ 以及 $t_1 = \mathcal{N}(K_{l+1}, T_{k-1}(n))(l+1)$，所以 $t_1 \geq s_1$。于是存在一个单射 $\phi_1 : S_1 \to T_1$ 使得如果 $\phi_1(H_1, H_2) = (H_1', H_2')$，则有 $G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 同构于 $T_{k-1}(n)[V(H_1') \cup V(H_2')]$ 的子图（实际上，两个都是 K_{l+1}）。

现在考虑 S_2 和 T_2。对每个 $(H_1, H_2) \in S_2$，由于 H_1 是 K_l 但 $G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 不是 K_{l+1}，这可推出在 G 中，H_2 中的点至少不与 H_1 中的一个点连边。另一方面，在 $T_{k-1}(n)$ 中，对每个 $(H_1', H_2') \in T_2$，H_2' 中的点只与 H_1' 中的一个点不连边。注意到

$$|S_2| = s_2 = s - s_1 \leq t - s_1 = (t_1 - s_1) + t_2 = |(T_1 \backslash \phi_1(S_1)) \cup T_2|.$$

所以存在一个单射 $\phi_2 : S_2 \to (T_1 \backslash \phi_1(S_1)) \cup T_2$ 使得如果 $\phi_2(H_1, H_2) = (H_1', H_2')$，则有 $G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 同构于 $T_{k-1}(n)[V(H_1') \cup V(H_2')]$ 的某个子图。

联合 ϕ_1 和 ϕ_2，我们得到一个从 S 到 T 的单射，使得如果 $\phi(H_1, H_2) = (H_1', H_2')$，则有 $G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 同构于 $T_{k-1}(n)[V(H_1') \cup V(H_2')]$ 的某个子图。于

是，

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(H,G) &= \frac{1}{a}\sum_{(H_1,H_2)\in S} f_G(H,(H_1,H_2)) \\ &\le \frac{1}{a}\sum_{\phi(H_1,H_2)\in\phi(S)} f_{T_{k-1}(n)}(H,\phi(H_1,H_2)) \\ &\le \frac{1}{a}\sum_{(H_1',H_2')\in T} f_{T_{k-1}(n)}(H,(H_1',H_2')) \\ &= \mathcal{N}(H,T_{k-1}(n)).\end{aligned}$$

证明完毕。 □

基于上述命题，我们能够得到以下推论，该推论也已在[35] 中证明。

推论 13：对于 $k\ge 3$，P_3 是 k-Turán 好图。

为了后面证明 P_5 是 k-Turán 好图，我们需要先证明下述命题。

命题 3：对任意的正整数 l、m、k，其中 $2\le l\le m<k$，令 H 为 K_l 和 K_m 的不交并，即 $V(H)=V(K_l)\cup V(K_m)$ 以及 $E(H)=E(K_l)\cup E(K_m)$，则 H 是 k-Turán 好图。

该证明的过程与[30] 中证明 M_l 是 k-Turán 好图的过程类似。为了完备性，我们还是给出完整证明。

证明. 令 G 是一个 n 个顶点的不包含 K_k 且包含最多数目的 H 的图，并令 n 相对于 k 来说是充分大的。

情况 **1**. G 的染色数至少为 k。我们给出以下声明

$$\frac{1}{\alpha}\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n))\mathcal{N}(K_m,T_{k-1}(n-l))-\mathcal{N}(H,G)=\Omega(n^{l+m-1}), \tag{2.1}$$

以及

$$\frac{1}{\alpha}\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n))\mathcal{N}(K_m,T_{k-1}(n-l))-\mathcal{N}(H,T_{k-1}(n))=O(n^{l+m-2}), \tag{2.2}$$

其中 $\alpha=1$ 如果 $l<m$，$\alpha=2$ 如果 $l=m$。这说明了对充分大的 n，有 $\mathcal{N}(H,G)<\mathcal{N}(H,T_{k-1}(n))$，矛盾。

为了证明 (2.1)，我们需要用到 Andrásfai、Erdős 和 Sós[5] 定理 1.1 的一个结果，即对于每个 n 个顶点不包含 K_k 且染色数至少为 k 的图，都存在一个点 v，其度数最多为 $(1-\frac{1}{k-4/3})n$。于是 $\mathcal{N}(K_l,G)$ 等于 G 中包含该点 v 的 K_l 的数目加上不包含该点 v 的 K_l 的数目，而后者最多为 $\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n-1))$。对于前者，令 G_1 为 G 在 v 的邻点上诱导出的子图，则 G_1 是不包含 K_{k-1} 的，根据定理 5，我们有 $\mathcal{N}(K_{l-1},G_1)\le\binom{k-2}{l-1}(\lceil\frac{(1-\frac{1}{k-4/3})n}{k-2}\rceil)^{l-1}$。所以

$$\mathcal{N}(K_l,G)\le\binom{k-2}{l-1}\left(\left\lceil\frac{(1-\frac{1}{k-4/3})n}{k-2}\right\rceil\right)^{l-1}+\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n-1)).$$

另一方面，我们可以从 $T_{k-1}(n)$ 中删掉一个点得到 $T_{k-1}(n-1)$，并且

$$\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n))\ge\binom{k-2}{l-1}\left(\left\lfloor\frac{n}{k-1}\right\rfloor\right)^{l-1}+\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n-1)).$$

由于 $\frac{(1-\frac{1}{k-4/3})}{k-2}<\frac{1}{k-1}$，所以 $\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n))-\mathcal{N}(K_l,G)\ge\Theta(n^{l-1})$。我们记 $\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n))-\mathcal{N}(K_l,G)=\Omega(n^{l-1})$。

令 G_2 为从 G 中删掉任意一个 K_l 后得到的图，则 G_2 是一个 $n-l$ 个点的不包含 K_k 的图。所以 $\mathcal{N}(K_m,G_2)\le\mathcal{N}(K_m,T_{k-1}(n-l))$。于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n))\mathcal{N}(K_m,T_{k-1}(n-l))-\mathcal{N}(H,G)\\ \ge&\frac{1}{\alpha}\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n))\mathcal{N}(K_m,T_{k-1}(n-l))-\frac{1}{\alpha}\mathcal{N}(K_l,G)\mathcal{N}(K_m,T_{k-1}(n-l))\\ =&\Omega(n^{l+m-1}).\end{aligned}$$

这证明了 (2.1)。

现在我们来证明 (2.2)。我们需要数出 $T_{k-1}(n)$ 中 H 的数目。我们首先在 $T_{k-1}(n)$ 选取一个 K_l，一共有 $\mathcal{N}(K_l,T_{k-1}(n))=\Theta(n^l)$ 种。在删掉选取的 K_l 的所有点后，得到的图 G_3 是一个 $n-l$ 个点的完全 $k-1$ 部图。若 $(k-1)\mid n$，则每一部的大小为 $n/(k-1)$ 或者 $n/(k-1)-1$；若 $(k-1)\nmid n$，则每一部的大小为 $\{\lceil n/k\rceil,\lceil n/k\rceil-1,\lfloor n/k\rfloor-1\}$ 中的一个。第一种情况下，G_3 是 $T_{k-1}(n-l)$。第二种情况下，我们可以从 $T_{k-1}(n-l)$ 中的某些部之间移动常数 c（$c\le l$）个点得到 G_3。总而言之，我们总是能从 $T_{k-1}(n-l)$ 的部与部之间移动常数 c 个点来得到 G_3。容易验证，这种移动最多会减少 $O(n^{m-2})$ 个 K_m。所以 $\mathcal{N}(K_m,G_3)=$

$\mathcal{N}(K_m, T_{k-1}(n)) - O(n^{m-2})$。于是

$$\mathcal{N}(H, T_{k-1}(n)) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{N}(K_l, T_{k-1}(n))(\mathcal{N}(K_m, T_{k-1}(n-l)) - O(n^{m-2})).$$

因此，我们有

$$\frac{1}{\alpha}\mathcal{N}(K_l, T_{k-1}(n))\mathcal{N}(K_m, T_{k-1}(n-l)) - \mathcal{N}(H, T_{k-1}(n)) = O(n^{l+m-2}).$$

这证明了 (2.2)。

情况 **2**. 如果 $\chi(G) \leq k-1$，则我们可以假设 G 是一个 $k-1$ 部完全图，因为添加边并不会减少 H 的数目也不会产生 K_k。令 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1}$。我们现在证明让图变得均匀并不会减少 H 的数目。总而言之，为了最大化 $\mathcal{N}(H, G)$，对任意的 i、j 都有 $||V_i| - |V_j||$ 等于 0 或 1。若前者成立，则 Turán 图就含有最大数目的 H，即完成证明。

为了得到矛盾，不失一般性，我们假设 $V_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_a\}$，大小为 a，$V_2 = \{v, w_1, w_2, \ldots, w_b\}$，大小为 $b+1$，而且有 $b - a \geq 1$。令 G' 是另一个点集为 $V_1 \cup \{v\}, V_2 \setminus \{v\}, V_3, V_4, \ldots, V_{k-1}$ 的 $k-1$ 部完全图。所以把 G 中 V_2 中的 v 移动到 V_1 可以得到 G'。所以只需证明 $\mathcal{N}(H, G) \leq \mathcal{N}(H, G')$ 即可。

我们说 G 中的 H 是类型 I 如果对某个 i，v 和 u_i 都在它的 K_l 部分里，是类型 II 如果对某个 i，v 和 u_i 都在它的 K_m 部分里。类似地，我们说 G' 中的 H 是类型 III 如果对某个 i，v 和 w_i 都在它的 K_l 部分里，是类型 IV 如果对某个 i，v 和 w_i 都在它的 K_m 部分里。因此，通过将 V_2 中的 v 移动到 V_1 中，我们损失了类型 I 和类型 II 的 H，但同时，我们获得了类型 III 和类型 IV 的 H。我们声明类型 I 的 H 的数目是不超过类型 III 的 H 的数目的。如果该声明正确，那么类似地，可以得到类型 II 的 H 的数目是不超过类型 IV 的 H 的数目的。这就意味着 $\mathcal{N}(H, G) \leq \mathcal{N}(H, G')$。

我们接下来证明上述声明。令 A_λ $(1 \leq \lambda \leq a)$ 表示 v 和 u_λ 在 K_l 部分的类型 I 的 H 数目。令 $M = \mathcal{N}(K_{l-2}, G[V_3 \cup V_4 \cup \cdots \cup V_{k-1}])$ 表示在 $G[V_3 \cup V_4 \cup \cdots \cup V_{k-1}]$ 的 K_{l-2} 的数目，令 $K_{l-2}^{(i)}(1 \leq i \leq M)$ 表示在 $G[V_3 \cup V_4 \cup \cdots \cup V_{k-1}]$ 的 K_{l-2} 的数目，则有

$$A_\lambda = \sum_{i=1}^{M} \mathcal{N}\left(K_m, G[(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus (\{v, u_\lambda\} \cup V(K_{l-2}^{(i)}))]\right),$$

以及 G 中类型 I 的 H 的数目为 $\sum_{\lambda=1}^{a} A_\lambda$。

令 B_μ $(1 \leq \mu \leq b)$ 表示 v 和 w_μ 在 K_l 部分的类型 III 的 H 的数目。注意到 $G[V_3 \cup V_4 \cup \cdots \cup V_{k-1}] = G'[V_3 \cup V_4 \cup \cdots \cup V_{k-1}]$。于是有

$$B_\mu = \sum_{i=1}^{M} \mathcal{N}\left(K_m, G'[(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus (\{v, w_\mu\} \cup V(K_{l-2}^{(i)}))]\right),$$

以及 G' 中类型 III 的 H 的数目为 $\sum_{\mu=1}^{b} B_\mu$。

固定 λ、μ 和 i。考虑 $\mathcal{N}\left(K_m, G[(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus (\{v, u_\lambda\} \cup V(K_{l-2}^{(i)}))]\right)$ 和 $\mathcal{N}\left(K_m, G'[(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus (\{v, w_\mu\} \cup V(K_{l-2}^{(i)}))]\right)$。注意到 $G'[(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus (\{v, w_\mu\} \cup V(K_{l-2}^{(i)}))]$ 比 $G[(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus (\{v, u_\lambda\} \cup V(K_{l-2}^{(i)}))]$ 更加均衡。所以

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}\left(K_m, G[(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus (\{v, u_\lambda\} \cup V(K_{l-2}^{(i)}))]\right) \\
\leq &\mathcal{N}\left(K_m, G'[(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus (\{v, w_\mu\} \cup V(K_{l-2}^{(i)}))]\right).
\end{aligned}$$

该不等式对每个 λ、μ 和 i 都成立。所以

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=1}^{a} A_\lambda &= \sum_{\lambda=1}^{a} \sum_{i=1}^{M} \mathcal{N}(K_m, G[V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1} \setminus (\{v, u_\lambda\} \cup V(K_{l-2}^{(i)}))]) \\
&\leq \sum_{\mu=1}^{b} \sum_{i=1}^{M} \mathcal{N}(K_m, G'[V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k-1} \setminus (\{v, w_\mu\} \cup V(K_{l-2}^{(i)}))]) \\
&= \sum_{\mu=1}^{b} B_\mu.
\end{aligned}$$

于是 G 中类型 I 的 H 的数目不超过 G' 中类型 III 的 H 的数目。证明完毕。 □

注记 1：联合该命题和命题 2，可推出这个结论对每个满足 $1 \leq l \leq m < k$ 的 l、m 和 k 都成立。

该命题可扩展到有限个完全图，即，对 $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_m < k$，如果一个图 H 满足 $V(H) = V(K_{l_1}) \cup V(K_{l_2}) \cup \cdots \cup V(K_{l_m})$ 以及 $E(H) = E(K_{l_1}) \cup E(K_{l_2}) \cup \cdots \cup E(K_{l_m})$，则 H 是 k-Turán 好图。

推论 14：对于 $k \geq 4$， 是 k-Turán 好图。

现在，我们可以证明下述命题。

命题 4：选取两个点不交的完全图 K_{k-2} 和 K_2，任意地连接 K_{k-2} 和 K_2 中的点，得到的图记为 H。假设 H 不是 K_k，则 H 是 k-Turán 好图。

证明. 令 G 是一个 n 个点的不包含 K_k 的且包含最多数目的 H 的图。简记 $S = S_{k-2,2}(G)$，$T = S_{k-2,2}(T_{k-1}(n))$。令 $s = |S|$，$t = |T|$。命题 3 说明了 $s \le t$。

令 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$，其中 $S_1 = \{(H_1, H_2) : H_1$ (点集为 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}\}$) 和 H_2 (点集为 $\{b_1, b_2\}$) 是 G 中点不交的子图，$G[V(H_1) \cup \{b_1\}]$ 是 K_{k-1}，H_2 是 $K_2\}$，$S_2 = \{(H_1, H_2) : H_1$ (点集为 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}\}$)，$H_2$ (点集为 $\{b_1, b_2\}$) 是 G 中点不交的子图，H_1 是 K_{k-2}，H_2 是 K_2，$G[a_1, a_2, \ldots, a_{k-3}, b_1, b_2]$ 是 K_{k-1}，$G[a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}, b_1]$ 不是 K_{k-1}，$G[a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}, b_2]$ 不是 $K_{k-1}\}$，以及 $S_3 = \{(H_1, H_2) : H_1$ 和 H_2 是 G 中点不交的子图，H_1 是 K_{k-2}，H_2 是 K_2，$G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 不包含 $K_{k-1}\}$。令 $s_1 = |S_1|$，$s_2 = |S_2|$，$s_3 = |S_3|$，则有 $s = s_1 + s_2 + s_3$。

令 $T = T_1 \cup T_2$，其中 $T_1 = \{(H_1, H_2) : H_1$ (点集为 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}\}$) 和 H_2 (点集为 $\{b_1, b_2\}$) 是 $T_{k-1}(n)$ 中点不交的子图，$T_{k-1}(n)[V(H_1) \cup \{b_1\}]$ 是 K_{k-1}，H_2 是 $K_2\}$，$T_2 = \{(H_1, H_2) : H_1$ 和 H_2 是 $T_{k-1}(n)$ 中点不交的子图，H_1 是 K_{k-2}，H_2 是 K_2，$T_{k-1}(n)[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 不包含 $K_{k-1}\}$。令 $t_1 = |T_1|$，$t_2 = |T_2|$，则有 $t = t_1 + t_2$。

令 $K^{(i)} (1 \le i \le m)$ 表示 G 中不同的 K_{k-1}。对每个 i，定义 $\alpha_j^{(i)} = |\{v \in V(G) \backslash V(K^{(i)}) : v$ 与 $K^{(i)}$ 中恰好 j 个点相连 $\}|$，则 $\sum_{j=1}^{k-2} \alpha_j^{(i)} \le n - (k-1)$ 对每个 i 都成立。容易验证，

$$s_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k-2} j \alpha_j^{(i)},$$

以及

$$s_2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{k-3}^{(i)}.$$

所以

$$s_1 + s_2 \le (k-2) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k-2} \alpha_j^{(i)} \le (k-2) m (n - (k-1)).$$

注意到 m 是 G 中 K_{k-1} 的总数目，即，$m = \mathcal{N}(K_{k-1}, G)$。于是

$$s_1 + s_2 \le (k-2) \mathcal{N}(K_{k-1}, G)(n - (k-1)) \le (k-2) \mathcal{N}(K_{k-1}, T_{k-1}(n))(n - (k-1)) = t_1.$$

因此存在一个单射 $\phi_1 : S_1 \cup S_2 \to T_1$ 使得如果 $\phi_1(H_1, H_2) = (H_1', H_2')$，则 $G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 与 $T_{k-1}(n)[V(H_1') \cup V(H_2')]$ 的子图同构（实际上，图 $T_{k-1}(n)[V(H_1') \cup V(H_2')]$ 有 $\binom{k}{2} - 1$ 条边，即最大的 k 个点且不包含 K_k 的图）。

现在考虑 S_3 和 T_2。对每个 $(H_1, H_2) \in S_3$，令 $V(H_1) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}\}$，$V(H_2) = \{b_1, b_2\}$。由于 H_1 是 K_{k-2}，H_2 是 K_2，$G[a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}, b_1, b_2]$ 不包含 K_{k-1}，可以推出存在不同的 a_{i_1} 和 a_{i_2}，使得在 G 中，b_1 不与 a_{i_1} 连边，b_2 不与 a_{i_2} 连边。另一方面，在 $T_{k-1}(n)$ 中，对每个 $(H_1', H_2') \in T_2$，令 $V(H_1') = \{a_1', a_2', \ldots, a_{k-2}'\}$，$V(H_2') = \{b_1', b_2'\}$，$b_1'$ 不与 a_i' $(1 \le i \le l)$ 中的恰好一个点连边，b_2' 不与 a_i' $(1 \le i \le l)$ 中的另一个点连边。注意到

$$|S_3| = s_3 = s - s_1 - s_2 \le t - s_1 - s_2 = (t_1 - s_1 - s_2) + t_2 = |(T_1 \backslash \phi_1(S_1 \cup S_2)) \cup T_2|.$$

所以存在一个单射 $\phi_2 : S_3 \to (T_1 \backslash \phi_1(S_1 \cup S_2)) \cup T_2$ 使得如果 $\phi_2(H_1, H_2) = (H_1', H_2')$，则 $G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 与 $T_{k-1}(n)[V(H_1') \cup V(H_2')]$ 的一个子图同构。

联立 ϕ_1 和 ϕ_2，我们找到一个从 S 到 T 的单射 ϕ 使得如果 $\phi(H_1, H_2) = (H_1', H_2')$，则 $G[V(H_1) \cup V(H_2)]$ 与 $T_{k-1}(n)[V(H_1') \cup V(H_2')]$ 的一个子图同构。于是，

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(H, G) &= \frac{1}{a} \sum_{(H_1, H_2) \in S} f_G(H, (H_1, H_2)) \\
&\le \frac{1}{a} \sum_{\phi(H_1, H_2) \in \phi(S)} f_{T_{k-1}(n)}(H, \phi(H_1, H_2)) \\
&\le \frac{1}{a} \sum_{(H_1', H_2') \in T} f_{T_{k-1}(n)}(H, (H_1', H_2')) \\
&= \mathcal{N}(H, T_{k-1}(n)).
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

基于以上命题，我们也可以得到下述已经在[30] 中证明的推论。

推论 15：P_4 是 4-Turán 好图。

并且，我们有如下推论，这在之后会用到。

推论 16： 是 5-Turán 好图。

2.3 P_4 是 k-Turán 好图

在这一节中，我们证明下述定理。

定理 17：对于 $k \geq 5$，P_4 是 k-Turán 好图。

证明. 给定一个正整数 $k \geq 5$，令 G 是 n 个顶点的不包含 K_k 的图。表 2.1 中第一行的图是所有的 4 个顶点诱导出的包含至少一条 P_4 的子图。我们假设它们在 G 中的数目分别是第二行的值。简单的计数可得到表中所有的数值。

表 2.1　4 个顶点诱导的包含 P_4 的子图表

4 个顶点诱导的包含 P_4 的子图					
每个诱导子图在 G 中的数目	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
每个子图包含 M_2 的数目	1	2	1	2	3
每个子图包含  的数目	0	0	1	2	4
每个子图包含 K_4 的数目	0	0	0	0	1
每个子图包含 P_4 的数目	1	4	2	6	12

由于根据定理 5 可知 K_3 是 k-Turán 好图，所以可得  也是 k-Turán 好图。因为 M_2、 和 K_4 都是 k-Turán 好图，我们有

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5 & \leq \mathcal{N}(M_2,G) & \leq \mathcal{N}(M_2,T_{k-1}(n)), \\ x_3+2x_4+4x_5 & \leq \mathcal{N}(\square,G) & \leq \mathcal{N}(\square,T_{k-1}(n)), \\ x_5 & \leq \mathcal{N}(K_4,G) & \leq \mathcal{N}(K_4,T_{k-1}(n)). \end{cases}$$


于是，

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(P_4,G) &= x_1+4x_2+2x_3+6x_4+12x_5 \\ &\leq 2(x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5)+(x_3+2x_4+4x_5)+2x_5 \\ &\leq 2\mathcal{N}(M_2,T_{k-1}(n))+\mathcal{N}(\square,T_{k-1}(n))+2\mathcal{N}(K_4,T_{k-1}(n)). \end{aligned}$$


现在我们只需证明

$$2\mathcal{N}(M_2,T_{k-1}(n))+\mathcal{N}(\square,T_{k-1}(n))+2\mathcal{N}(K_4,T_{k-1}(n))=\mathcal{N}(P_4,T_{k-1}(n)).$$


实际上，根据简单的计数，我们有如下等式。

$$\begin{cases} \mathcal{N}(P_4, T_{k-1}(n)) = 12\mathcal{N}(K_4, T_{k-1}(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,2}, T_{k-1}(n)) \\ \qquad + 4\mathcal{N}(\text{ind-}K_{2,2}, T_{k-1}(n)), \\ \mathcal{N}(M_2, T_{k-1}(n)) = 3\mathcal{N}(K_4, T_{k-1}(n)) + 2\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,2}, T_{k-1}(n)) \\ \qquad + 2\mathcal{N}(\text{ind-}K_{2,2}, T_{k-1}(n)), \end{cases}$$

$\mathcal{N}($$, T_{k-1}(n)) = 4\mathcal{N}(K_4, T_{k-1}(n)) + 2\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,2}, T_{k-1}(n)).$

根据上面的三个等式，可以得到

$2\mathcal{N}(M_2, T_{k-1}(n)) + \mathcal{N}($$, T_{k-1}(n)) + 2\mathcal{N}(K_4, T_{k-1}(n)) = \mathcal{N}(P_4, T_{k-1}(n)).$

证明完毕。 □

2.4 P_5 是 k-Turán 好图

在这一节中，我们将证明对所有的 $k \geq 4$，P_5 是 k-Turán 好图。$k = 4$ 的情况十分简单，所以我们先给出它的证明。

定理 18：P_5 是 4-Turán 好图。

证明. 令 G 是 n 个点的不包含 K_4 的图。类似定理 17 的证明，在表 2.2 中，我们列出所有至少包含一条 P_5 的 5 个点诱导出的子图，并假设每个在 G 中的数目为 x_i。

表 2.2 在不包含 K_4 的图中，5 个点诱导的包含 P_5 的子图表

5 个点诱导的包含 P_5 的子图														
每个诱导子图在 G 中的数目	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
每个子图包含  的数目	3	5	4	4	4	5	3	5	6	7	8	6	6	10
每个子图包含  的数目	0	0	1	0	0	1	0	2	1	2	2	0	0	4
每个子图包含  的数目	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2
每个子图包含 P_5 的数目	1	5	2	2	2	4	1	4	7	10	14	6	6	24

所以有

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(P_5, G) = & 1x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 1x_7 + 4x_8 \\ & + 7x_9 + 10x_{10} + 14x_{11} + 6x_{12} + 6x_{13} + 24x_{14}. \end{aligned}$$

根据定理 9，我们知道 和 是 4-Turán 好图。又由于 M_2 是 4-Turán 好图，所以 也是的。于是，

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+4x_3+4x_4+4x_5+5x_6+ & & \\ 3x_7+5x_8+6x_9+7x_{10}+8x_{11}+6x_{12}+6x_{13}+10x_{14} & \leq \mathcal{N}(\ , G) & \leq \mathcal{N}(\ , T_3(n)), \\ 1x_3+1x_6+2x_8+1x_9+2x_{10}+2x_{11}+4x_{14} & \leq \mathcal{N}(\ , G) & \leq \mathcal{N}(\ , T_3(n)), \\ 1x_8+1x_{10}+2x_{14} & \leq \mathcal{N}(\ , G) & \leq \mathcal{N}(\ , T_3(n)). \end{cases}$$

所以我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(P_5, G) &\leq \mathcal{N}(\ , G) + 3\mathcal{N}(\ , G) + \mathcal{N}(\ , G) \\ &\leq \mathcal{N}(\ , T_3(n)) + 3\mathcal{N}(\ , T_3(n)) + \mathcal{N}(\ , T_3(n)). \end{aligned}$$

因为

$$\begin{cases} \mathcal{N}(P_5, T_3(n)) = 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{2,3}, T_3(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,3}, T_3(n)) \\ \qquad + 24\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,2,2}, T_3(n)), \\ \mathcal{N}(\ , T_3(n)) = 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{2,3}, T_3(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,3}, T_3(n)) \\ \qquad + 10\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,2,2}, T_3(n)), \\ \mathcal{N}(\ , T_3(n)) = 4\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,2,2}, T_3(n)), \\ \mathcal{N}(\ , T_3(n)) = 2\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,2,2}, T_3(n)), \end{cases}$$

容易验证

$$\mathcal{N}(P_5, T_3(n)) = \mathcal{N}(\ , T_3(n)) + 3\mathcal{N}(\ , T_3(n)) + \mathcal{N}(\ , T_3(n)).$$

所以我们有 $\mathcal{N}(P_5, G) \leq \mathcal{N}(P_5, T_3(n))$，这意味着 P_5 是 4-Turán 好图。 □

为了证明 P_5 是 k-Turán 好图，我们需要下述命题。

命题 5：对于 $k \geq 4$， 是 k-Turán 好图。

证明. 是 4-Turán 好图以及 5-Turán 好图可以分别从定理 9 和推论 16 得到。

现在我们假设 $k \geq 6$。令 G 是 n 个点不包含 K_k 的图。跟之前一样，我们在表 2.3 中列出所有相关参数。

表 2.3　5 个点诱导的包含 的子图表

5 个点诱导的包含 的子图						
每个诱导子图在 G 中的数目	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
每个子图包含 的数目	2	2	4	3	6	10
每个子图包含 的数目	0	0	0	1	2	5
每个子图包含 K_5 的数目	0	0	0	0	0	1
每个子图包含 的数目	1	1	2	2	6	15

固定 $k \geq 6$。推论 14 说明 是 k-Turán 好图，命题 2 说明 是 k-Turán 好图，定理 5 说明 K_5 是 k-Turán 好图。于是，

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\,\cdot\,, G) &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 15x_6 \\ &\leq \frac{\mathcal{N}(\,\cdot\,, G) + 3\mathcal{N}(\,\cdot\,, G) + 5\mathcal{N}(K_5, G)}{2} \\ &\leq \frac{\mathcal{N}(\,\cdot\,, T_{k-1}(n)) + 3\mathcal{N}(\,\cdot\,, T_{k-1}(n)) + 5\mathcal{N}(K_5, T_{k-1}(n))}{2}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{cases}\mathcal{N}(\,\cdot\,, T_{k-1}(n)) = 2\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,2,2}, T_{k-1}(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,1,2}, T_{k-1}(n)) \\ \qquad\qquad + 15\mathcal{N}(K_5, T_{k-1}(n)), \\ \mathcal{N}(\,\cdot\,, T_{k-1}(n)) = 4\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,2,2}, T_{k-1}(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,1,2}, T_{k-1}(n)) \\ \qquad\qquad + 10\mathcal{N}(K_5, T_{k-1}(n)), \\ \mathcal{N}(\,\cdot\,, T_{k-1}(n)) = 2\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,1,2}, T_{k-1}(n)) + 5\mathcal{N}(K_5, T_{k-1}(n)),\end{cases}$$

容易验证

$$\frac{\mathcal{N}(\,\cdot\,, T_{k-1}(n)) + 3\mathcal{N}(\,\cdot\,, T_{k-1}(n)) + 5\mathcal{N}(K_5, T_{k-1}(n))}{2} = \mathcal{N}(\,\cdot\,, T_{k-1}(n)).$$

证明完毕。 □

现在我们证明下述定理。

定理 19：对于任意的 $k \geq 5$，P_5 是 k-Turán 好图。

证明. 我们首先证明对于 $k \geq 6$，P_5 是 k-Turán 好图。令 G 是 n 个点的不包含 K_k 的图。通过计数，我们得到表 2.3。

表 2.4　5 个点诱导的包含 P_5 的子图表

5 个点诱导的包含 P_5 的子图																		
每个诱导子图在 G 中的数目	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}
每个子图包含 的数目	3	5	4	4	4	5	3	6	5	7	8	6	6	10	6	9	12	15
每个子图包含 的数目	0	0	1	0	0	1	0	1	2	2	2	0	0	4	1	3	6	10
每个子图包含 的数目	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2	0	2	6	15
每个子图包含 P_5 的数目	1	5	2	2	2	4	1	7	4	10	14	6	6	24	6	18	36	60

于是，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(P_5, G) =& 1x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 1x_7 + 7x_8 + 4x_9 + 10x_{10} \\
& + 14x_{11} + 6x_{12} + 6x_{13} + 24x_{14} + 6x_{15} + 18x_{16} + 36x_{17} + 60x_{18}.
\end{aligned}
$$

由于 、 和 都是 k-Turán 好图，我们得到下面的不等式。

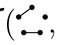
$$
\begin{cases}
3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 3x_7 + 6x_8 + 5x_9 + 7x_{10} + 8x_{11} + 6x_{12} \\
\quad +6x_{13} + 10x_{14} + 6x_{15} + 9x_{16} + 12x_{17} + 15x_{18} \le \mathcal{N}(\ , G) \le \mathcal{N}(\ , T_{k-1}(n)), \\
1x_3 + 1x_6 + 1x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} \\
\quad +4x_{14} + 1x_{15} + 3x_{16} + 6x_{17} + 10x_{18} \le \mathcal{N}(\ , G) \le \mathcal{N}(\ , T_{k-1}(n)), \\
1x_9 + 1x_{10} + 2x_{14} + 2x_{16} + 6x_{17} + 15x_{18} \le \mathcal{N}(\ , G) \le \mathcal{N}(\ , T_{k-1}(n)).
\end{cases}
$$

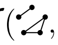
因此，

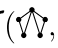
$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(P_5, G) &\le \mathcal{N}(\ , G) + 3\mathcal{N}(\ , G) + \mathcal{N}(\ , G) \\
&\le \mathcal{N}(\ , T_{k-1}(n)) + 3\mathcal{N}(\ , T_{k-1}(n)) + \mathcal{N}(\ , T_{k-1}(n)).
\end{aligned}
$$

由于

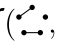
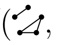
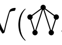
$\mathcal{N}(P_5, T_{k-1}(n)) = 60\mathcal{N}(K_5, T_{k-1}(n)) + 36\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,1,2}, T_{k-1}(n)) + 24\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,2,2}, T_{k-1}(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,3}, T_{k-1}(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{2,3}, T_{k-1}(n))$,

$\mathcal{N}($$, T_{k-1}(n)) = 15\mathcal{N}(K_5, T_{k-1}(n)) + 12\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,1,2}, T_{k-1}(n)) + 10\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,2,2}, T_{k-1}(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,3}, T_{k-1}(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{2,3}, T_{k-1}(n))$,

$\mathcal{N}($$, T_{k-1}(n)) = 10\mathcal{N}(K_5, T_{k-1}(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,1,2}, T_{k-1}(n)) + 4\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,2,2}, T_{k-1}(n))$,

$\mathcal{N}($$, T_{k-1}(n)) = 15\mathcal{N}(K_5, T_{k-1}(n)) + 6\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,1,1,2}, T_{k-1}(n)) + 2\mathcal{N}(\text{ind-}K_{1,2,2}, T_{k-1}(n))$,

容易验证，

$\mathcal{N}(P_5, T_{k-1}(n)) = \mathcal{N}($$, T_{k-1}(n)) + 3\mathcal{N}($$, T_{k-1}(n)) + \mathcal{N}($$, T_{k-1}(n))$,

证明完毕。

当 $k = 5$ 时，除了表 2.4 中的 $x_{18} = 0$ 以及 $\mathcal{N}(K_5, T_4(n)) = 0$ 之外，其它完全一样，于是结论 P_5 是 5-Turán 好图可由类似的分析得到。 □

2.5 小结

在本章中，我们构造了一些新的 k-Turán 好图类，并且基于一些已知的 k-Turán 好图类，我们证明了 P_4 和 P_5 都是 k-Turán 好图。该方法也许也能用于 $l \geq 6$ 的 P_l，但缺点是 l 个点诱导的包含 P_l 的子图太多了，难以一一计数。所以后续希望能找到新的方法去攻克这个问题。

3 图的最小度与子图问题

3.1 引言

给定一个图 G，对每个大于等于 3 的正整数 r，我们令 $P_r(G)$ 表示 G 中 r 部子图的最大的边数，令 $f_r(G)$ 表示 G 中不含 K_r 的子图的最大边数。显然，$P_{r-1}(G) \leq f_r(G)$。令 δ_r 表示使得下述成立的最大的数：对于充分大的 n，任何 n 个点满足最小度 $\delta(G) \geq \delta_r n$ 的图 G，我们都有 $P_{r-1}(G) = f_r(G)$。

在 1983 年，Erdős[17] 提出了下列问题：哪些图的最大二部子图和最大不包含三角形的子图有相等数量的边数。由 Turán 定理，他注意到 $P_{r-1}(G) = f_r(G)$ 对于 G 是完全图的时候成立。之后，Babai、Simonovits 和 Spencer[6] 证明了对于每条边以二分之一的概率选取的随机图 $G(n, 1/2)$，$P_{r-1}(G) = f_r(G)$ 在渐近意义下几乎成立。一个一般性的条件是由 Bondy、Shen、Thomassé 和 Thomassen[8] 给出，他们证明了 $P_{r-1}(G) = f_r(G)$ 成立的充分条件可以是对图的最小度加要求。并且，他们还证明了 $0.675 \leq \delta_3 \leq 0.85$。在 2006 年，Balogh、Keevash 和 Sudakov[7] 把这个上下界改进到了 $0.75 \leq \delta_3 < 0.791$。

在本章中，我们给出了下述对于 $r \geq 4$ 的 δ_r 的上下界。

定理 20：当 $r \geq 4$ 时，我们有 $\frac{3r-4}{3r-1} < \delta_r \leq \frac{4(3r-7)(r-1)+1}{4(r-2)(3r-4)}$。

对 $r = 4$ 的情况，我们给出一个更好的上界。

定理 21：$\delta_4 \leq 0.9415$。

本章的结构如下。在下一节中，我们给出定理 20 中的 δ_r 的上界。在第 3.3 节中，我们通过一些递归构造给出 δ_r 的下界。在第 3.4 节中，我们给出在满足某些最小度条件下且不包含 K_4 的图的一些重要性质并在第 3.5 中给出 δ_4 的更好的上界。最后一节对本章进行总结。

3.2 δ_r 的上界

符号表示：令 $G=(V,E)$ 表示一个图，其中点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。我们令 $v(G)=|V(G)|$、$e(G)=|E(G)|$。如果 $X\subset V(G)$，那么 $G[X]$ 表示 G 在 X 上的诱导子图，即点集为 X，边集为 G 中落在 X 中的边。给定一个图 G 和 $V(G)$ 中的一个点 u，$d_A(u)$ 表示 u 在 A 中的邻点，其中 $A\subseteq V(G)$。

给定整数 $k\geq 2$，G^k 表示 G 的 k 次幂，即 $V(G^k)=V(G)$ 以及 $E(G^k)=\{uv: u$ 和 v 在G 中的距离 $\leq k\}$。给定图 G 和 H，$G+H$ 表示顶点集 $V(G+H)=V(G)\cup V(H)$，边集 $E(G+H)=E(G)\cup E(H)\cup\{uv: u\in V(G), v\in V(H)\}$ 的图。

在我们证明上界之前，我们需要一些准备。

下述引理是概率方法的一个简单结论。

引理 22：假设 G 是一个 n 个顶点的图，则 G 包含一个边数至少为 $\frac{r-2}{r-1}e(G)$ 的 $r-1$ 部子图。

证明. 考虑将 G 中顶点随机划分为 $r-1$ 部，则每条边在这个 $(r-1)$ 部子图中存在的概率为 $1-\frac{r-1}{(r-1)^2}=\frac{r-2}{r-1}$。由期望的线性性可知，存在一个边数至少为 $\frac{r-2}{r-1}e(G)$ 的 $r-1$ 部子图。 □

引理 23：假设 Γ 是图 G 的一个 $r-1$ 部子图，并且存在 m 条关联着 $V(G)\backslash V(\Gamma)$ 中的点的边，则 G 包含一个边数至少为 $e(\Gamma)+\frac{r-2}{r-1}m$ 的 $r-1$ 部子图。

注记 2：在[7] 中，Balogh 等人证明了引理 23 的二部子图的情况. 以下对于一般情况的证明是类似的。为了完整性，我们给出证明。

引理 23 的证明. 令 $(A_1,A_2,\ldots,A_{r-1})$ 为子图 Γ 顶点的划分。定义一个 $r-1$ 部子图 G'，它的顶点划分为 $(B_1,\ldots,B_{r-1})$ 使得对所有的 i 满足 $A_i\subseteq B_i$，并且对于每个点 $v\in V(G)\setminus V(\Gamma)$，我们令它以 $\frac{1}{r-1}$ 的概率随机地落在每个 B_i 里。这样的话，每条与 $V(G)\setminus V(\Gamma)$ 中的顶点关联的边就以 $\frac{r-2}{r-1}$ 的概率出现在 G' 里。所以由期望的线性性可知 $\mathbb{E}[e(G')]=e(\Gamma)+\frac{r-2}{r-1}m$，即存在一个边数至少为这么多的 $r-1$ 部子图。 □

以下引理描述了不包含 K_r 的图一定是 $r-1$ 部图的充分条件。

引理 24：[5] 令 G 是一个不包含 K_r 的 n 个顶点的图，且满足 $\delta(G) > \frac{3r-7}{3r-4}n$，则 $\chi(G) \le r-1$。

现在我们重新叙述定理 20 的部分内容并证明。该证明与[8] 中 $r=3$ 的情况类似。

定理 25：令 G 是一个 n 个顶点的最小度满足 $\delta(G) \ge \frac{4(3r-7)(r-1)+1}{4(r-2)(3r-4)}n+1$ 的图，其中 n 充分大。那么，G 中最大的不包含 K_r 的子图的边数与最大的 $r-1$ 部子图的边数相同。因此，$\delta_r \le \frac{4(3r-7)(r-1)+1}{4(r-2)(3r-4)}$。

证明. 令 $\delta := \frac{4(3r-7)(r-1)+1}{4(r-2)(3r-4)}$ 并且假设 G 是一个 n 顶点的最小度 $\delta(G) \ge \delta n+1$ 的图。令 H 和 A 分别为 G 中最大的不包含 K_r 的子图和 G 中最大的 $r-1$ 部子图。由引理 22 可知，我们有

$$e(H) \ge e(A) \ge \frac{r-2}{r-1}e(G) \ge \frac{r-2}{r-1}\frac{\delta(G)}{2}n \ge \frac{r-2}{r-1}\frac{\delta n+1}{2}n.$$

如果 H 中存在一个度数不超过 $\frac{3r-7}{3r-4}n$ 的点 x_1，则删掉它。类似地，如果 $H \setminus x_1$ 中存在一个度数不超过 $\frac{3r-7}{3r-4}(n-1)$ 的点 x_2，则删掉。我们不断地重复这个过程，直到得到一个顶点数为 m 的图 M 满足最小度严格大于 $\frac{3r-7}{3r-4}m$。由引理 24 可知 M 是 $r-1$ 部图。若 $m=n$，则结论显然成立。现在假设 $m<n$。因为

$$\begin{aligned}\binom{r-1}{2}\left(\frac{m}{r-1}\right)^2 = \frac{m^2(r-2)}{2(r-1)} \ge & e(M) \ge e(H) - \frac{3r-7}{3r-4}\left(\binom{n+1}{2}-\binom{m+1}{2}\right) \\ \ge & \frac{r-2}{r-1}\frac{\delta}{2}n^2 - \frac{3r-7}{2(3r-4)}(n^2-m^2),\end{aligned}$$

所以 $m \ge (\delta(r-2)(3r-4)-(3r-7)(r-1))^{1/2}n$。

令 $V(G)\backslash V(M) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}\}$。定义 $F = \{e \in E(G) : e$ 至少关联一个 x_i，$1 \le i \le n-m\}$，则

$$|F| \ge \sum_{i=1}^{n-m} d_G(x_i) - \binom{n-m}{2} \ge (\delta n+1)(n-m) - \binom{n-m}{2}.$$

由引理 23 可知，存在一个 $r-1$ 部子图，其边数至少为

$$\begin{aligned}
&e(H)-\frac{3r-7}{3r-4}\left(\binom{n+1}{2}-\binom{m+1}{2}\right)+\frac{r-2}{r-1}|F|\\
\geq &e(H)-\frac{3r-7}{3r-4}\left(\binom{n+1}{2}-\binom{m+1}{2}\right)+\frac{r-2}{r-1}\left((\delta n+1)(n-m)-\binom{n-m}{2}\right).
\end{aligned}$$

如果 $e(H)-\frac{3r-7}{3r-4}\left(\binom{n+1}{2}-\binom{m+1}{2}\right)+\frac{r-2}{r-1}\left((\delta n+1)(n-m)-\binom{n-m}{2}\right)\geq e(H)$，则可推出 $e(A)\geq e(H)$，即 $e(A)=e(H)$，证明完毕。也就是说，现在只需证明

$$\frac{r-2}{r-1}\left((\delta n+1)(n-m)-\binom{n-m}{2}\right)-\frac{3r-7}{3r-4}\left(\binom{n+1}{2}-\binom{m+1}{2}\right)\geq 0.$$

因为 $m<n$，两边同时除以 $n-m$ 可得

$$\frac{r-2}{r-1}\left(\delta n+1-\frac{n-m-1}{2}\right)-\frac{3r-7}{3r-4}\frac{n+m+1}{2}\geq 0,$$

即，

$$m\geq 2(r-1)(3r-4)\left((\frac{1}{2}-\delta)\frac{r-2}{r-1}+\frac{3r-7}{2(3r-4)}\right)n-(6r^2-20r+17).$$

我们有 $m\geq(\delta(r-2)(3r-4)-(3r-7)(r-1))^{1/2}n$，所以只需证明

$$\begin{aligned}
(\delta(r-2)(3r-4)-(3r-7)(r-1))^{1/2}n \geq &2(r-1)(3r-4)\cdot\\
&\left((\frac{1}{2}-\delta)\frac{r-2}{r-1}+\frac{3r-7}{2(3r-4)}\right)n.
\end{aligned}$$

容易验证上述不等式在 $\delta\geq\frac{4(3r-7)(r-1)+1}{4(r-2)(3r-4)}$ 的情况下是成立的，证明完毕。 □

3.3 δ_r 的下界

在这一节中，我们给出当 $r\geq 4$ 时候的 δ_r 的下界。我们首先证明 $r=4$ 的情况，这也是我们方法中的基础。在[7] 里，Balogh 等人给出了下面的 δ_3 的下界。

定理 26：[7] 对于任意的 $\delta<\frac{3}{4}$，都存在 n 和一个 n 个顶点的图 G，其最小度至少为 δn，并且最大的不含三角形的子图边数大于最大的二部子图的边数。所以，$\delta_3\geq\frac{3}{4}$。

基于他们的构造，我们给出 δ_4 的一个下界。

定理 27：$\delta_4>\frac{8}{11}$。

证明. 令 G' 为文献[7] 定理 3.1 中定义在 $n' = \frac{8}{11}n$ 个顶点上的图。该图最主要的性质为如下。将图 G' 的顶点平均地划分为 5 部 $V_0, V_1, \ldots, V_4$，使得每部大小为 $v(V_i) = \frac{8}{55}n$。对于 $i \in \mathbb{Z}_5$，$G'[V_i \cup V_{i+1}]$ 构成一个完全图，并且对于 $i, i+2 \in \mathbb{Z}_5$，每一对点 uv，其中 $u \in V_i$、$v \in V_{i+2}$，随机地成为边的概率为 θ，其中 $\theta < \frac{3}{8}$。运用概率方法，文献[7] 的作者们证明了存在一个图满足对于 $i, i+2 \in \mathbb{Z}_5$ 以及任意的两个子集 $A_i \subset V_i$、$A_{i+2} \subset V_{i+2}$，都有 $e(A_i, A_{i+2}) = \theta|A_i||A_{i+2}| + o(n^2)$。我们接着定义 G 为在 G' 的基础上额外加 $\frac{3}{11}n$ 个顶点 V_5，其中 V_5 为一个独立集并且每个点都与 G' 中的所有顶点相连。选取 $\theta = \frac{1}{8} + o(1)$，则 G 有 n 个顶点，满足对于任意的 $i \in \mathbb{Z}_5$ 以及 $v \in V_i$ 都有 $d_G(v) = \left(\frac{8}{55}(3+2\theta) + \frac{3}{11}\right)n + o(n) > \frac{8}{11}n$，并且对于 $u \in V_5$ 有 $d_G(u) = \frac{8}{11}n$。所以，$\delta(G) = \frac{8}{11}n$。

我们接下来要证明的就是图 G 的最大不包含 K_4 的子图的边数严格大于最大的 3 部子图的边数。假设 G 的最大的 3 部子图将 G 的顶点划分为 C_1、C_2 和 C_3。对于 $1 \le i \le 3$，令 $B_i = V(G') \cap C_i$，不失一般性，我们假设 $|B_1| \le |B_2| \le |B_3|$。由于 V_5 是一个独立集并且每个点都连接 V_5 外的所有点，所以我们可以将 V_5 放在 C_1 中，这并不会减少边数。考虑 B_1 中的点。由 G' 的结构可知，对于点 $v \in B_1$，我们有 $d_{G'}(v) < \frac{6}{11}n$。所以存在 $i \in \{2, 3\}$，使得如果我们将 v 移动到 C_i 中，则减少的边数会小于 $\frac{3}{11}n$，但同时，因为 v 与 V_5 中所有的点都连边，所以会增加至少 $\frac{3}{11}n$ 那么多的边。因而，如果 B_1 是非空的，则我们总是可以将 B_1 中的点移动到 C_1 或 C_2，从而得到边数更大的 3 部子图。所以，B_1 是空的。

基于上述的讨论，最大的 3 部子图的结构肯定是这样的，即所有 V_5 中的点构成 C_1，G' 中的点构成 C_2 和 C_3。由[7] 可知，G' 中最大的二部子图的边数小于 $\frac{64}{605}n^2$。所以，$P_3(G) < \frac{184}{605}n^2$。然而，对 $i \in \mathbb{Z}_5$，将 G 中所有 V_i 内部的边移除所得到的子图是不包含 K_4 的，并且有 $\frac{184}{605}n^2$ 条边。证明完毕。 □

基于上述定理，我们可以得到一般情况下的下界。

定理 28：对于 $r \ge 4$，我们有 $\delta_r > \frac{3r-4}{3r-1}$。

证明. 令 G_4 就是在定理 27 的证明中的图 G。我们递归地定义一个图序列 $\{G_r\}_{r=4}^{\infty}$。

假设我们已经定义了图 G_{r-1}，满足 $V(G_{r-1}) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_r$，其中 $|V_0| = |V_1| = \cdots = |V_4| = \frac{8}{55}n$，$|V_5| = |V_6| \cdots = |V_r| = \frac{3}{11}n$。并且，假设我

们有 $P_{r-2}(G_{r-1}) < f_{r-1}(G_{r-1})$。

然后我们按照下述方式定义 G_r: $V(G_r) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{r+1}$，其中 $|V_{r+1}| = \frac{3}{11}n$，$E(G_r) = E(G_{r-1}) \cup \{uv : u \in V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_r, v \in V_{r+1}\}$。我们将 G_{r-1} 看成是 G_r 的诱导子图。

我们有

$$\begin{aligned} d_{G_r}(v) &= \frac{8}{55}(3+2\theta)n + \frac{3}{11}(r-3)n + o(n) \\ &= \left(\frac{3}{11}r - \frac{1}{11}\right)n + \frac{8}{55}(2\theta - 2)n + o(n),\ \forall v \in V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_4; \\ d_{G_r}(u) &= \frac{8}{11}n + \frac{3}{11}(r-4)n = \left(\frac{3}{11}r - \frac{4}{11}\right)n,\ \forall u \in V_5 \cup \cdots \cup V_{r+1}. \end{aligned}$$

特别地，我们可以取 $\theta = \frac{1}{16}$，则

$$d_{G_r}(v) = \left(\frac{3}{11}r - \frac{4}{11}\right)n + o(n),\ \forall v \in V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_4.$$

假设 G_r 的最大的 $r-1$ 部子图将 $V(G_r)$ 划分为 $C_1, C_2, \cdots, C_{r-1}$，不失一般性，我们假设 $|C_1| \geq |C_2| \geq \ldots \geq |C_{r-1}|$。由于 V_{r+1} 中的点形成的是一个独立集并且每个点都与 V_{r+1} 外面的所有点都连边，所以我们把 V_{r+1} 全都放在 C_{r-1} 中并不会减少边的数目。现在考虑其它的顶点。

由递归可知，对所有的 $u \in V_5 \cup \cdots \cup V_r$，我们都有 $d_{G_{r-1}}(u) = (\frac{3}{11}r - \frac{7}{11})n$。如果存在这样的点 $u \in C_{r-1}$，则存在某个 $i \in \{1, 2, \cdots, r-2\}$，使得 $d_{C_i}(u) \leq \frac{1}{r-2}(\frac{3}{11}r - \frac{7}{11})n$，如果我们将 u 移到 C_i 中，最多会减少 $\frac{1}{r-2}(\frac{3}{11}r - \frac{7}{11})n$ 条边，但由于 u 与 $V_{r+1} \subseteq C_{r-1}$ 中的点连边，所以同时会增加 $\frac{3}{11}n$（$> \frac{1}{r-2}(\frac{3}{11}r - \frac{7}{11})n$）条边。所以 C_{r-1} 中不含 $V_5 \cup \cdots \cup V_r$ 中的点，否则就会存在一个更大的 $r-1$ 部子图。

由递归可知，对所有的 $v \in V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_4$，我们都有 $d_{G_{r-1}}(v) = (\frac{3}{11}r - \frac{7}{11})n + o(n)$。类似地，如果存在一个点 $v \in C_{r-1}$，则存在某个 $i \in \{1, 2, \cdots, r-2\}$，使得 $d_{C_i}(v) = \frac{1}{r-2}(\frac{3}{11}r - \frac{7}{11})n + o(n)$，如果我们将 v 移到 C_i 中，最多会减少 $\frac{1}{r-2}((\frac{3}{11}r - \frac{7}{11})n + o(n))$ 条边，但由于 v 与 $V_{r+1} \subseteq C_{r-1}$ 中的点连边，所以同时会增加 $\frac{3}{11}n$（$> \frac{1}{r-2}((\frac{3}{11}r - \frac{7}{11})n + o(n))$）条边。所以 C_{r-1} 中不含 $V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_4$ 中的点，否则就会存在一个更大的 $r-1$ 部子图。

基于以上的讨论，我们总结出 G_r 中的最大的 $r-1$ 部子图的结构肯定是这样的，即 V_{r+1} 中的所有顶点构成 C_{r-1}，$V(G_{r-1})$ 中的点构成其余的 $r-2$ 部。所以

有

$$P_{r-1}(G_r) = P_{r-2}(G_{r-1}) + |V_{r+1}||V(G_{r-1})| < f_{r-1}(G_{r-1}) + |V_{r+1}||V(G_{r-1})| \leq f_r(G_r).$$

我们已经证明了 G_r 的最小度为 $\left(\frac{3}{11}r - \frac{4}{11}\right)n$，以及 G_r 的顶点数为 $\left(\frac{3}{11}r - \frac{1}{11}\right)n$。因此，对于任意的 $r \geq 4$，我们构造出了图 G_r 满足最小度与总顶点数目的比值为 $\frac{3r-4}{3r-1}$，且 $P_{r-1}(G_r) < f_r(G_r)$。所以有，$\delta_r > \frac{3r-4}{3r-1}$。 □

3.4 δ_4 的较弱的上界

在我们证明定理 21 之前，我们先给出一个稍微弱一点的上界，这有助于我们理解这个方法。

我们首先描述一下最小度最大的且不包含 G_r 的图的结构。对于 $d \geq 1$，我们定义图 F_d 如下: 顶点集 $V(F_d)$ 为模 $3d-1$ 的整数，即 $\mathbb{Z}_{3d-1}$。顶点 $v \in \mathbb{Z}_{3d-1}$ 与顶点 $v+1, v+4, v+7, \ldots, v-1$ 连边。于是 F_d 是一个有 $3d-1$ 个顶点的 d 正则的图。

如果存在一个映射 $f : V(G) \to V(H)$ 使得 $uv \in E(G)$ 能推出 $f(u)f(v) \in E(H)$，则称 G 同态于 H。

在[41] 中，Jin 扩展了 Andrásfai、Erdős 和 Sós 的对于情况 $r = 2$ 的定理以及 Häggkvist [39] 的结果。

定理 29：[41] 令 $1 \leq d \leq 9$，G 是一个 n 个顶点的不包含三角形的且最小度 $\delta > \frac{d+1}{3d+2}n$ 的图，则 G 同态于 F_d。

在[9] 的第四章中，Nikiforov 证明类似上面不包含 K_r 的结论，我们之后会用到 $r = 3$ 的情况。

定理 30：[9] 令 $r \geq 2$，$1 \leq d \leq 9$，G 是一个 n 个顶点的不包含 K_{r+1} 的图。如果 $\delta(G) > \left(1 - \frac{2d-1}{(2d-1)r-d+1}\right)n$，则 G 同态于 $F_d + K_{r-2}$。

接下来，我们需要一个引理，描述这些图类在最小度限制的情况下的一些性质。

引理 31：假设 $d \geq 2$，我们用 $\{0, 1, \ldots, 3d-2\}$ 来标记 F_d 中的顶点，用 $3d-1$ 标记 K_1 中的顶点。用实数来表示 $F_d + K_1$ 中的顶点的重量，顶点 i 的重量为 x_i，其

中 $0 \le x_i \le 1$ 并且 $\sum_{i=0}^{3d-1} x_i = 1$。记 $g_i = \sum_{j:j\sim i} x_j$，$e = \frac{1}{2}\sum_i x_i g_i$。假设对于每个 $i \in \mathbb{Z}_{3d}$，都有 $g_i \ge \gamma$，则

$$\gamma \le \frac{3d-1}{5d-2},$$
$$e \le \frac{1}{6}(125d^2\gamma^2 - 150d^2\gamma + 45d^2 - 175d\gamma^2 + 200d\gamma - 57d + 50\gamma^2 - 50\gamma + 14).$$

证明. 注意到顶点 $3d-1$ 与 F_d 中所有的顶点都连边，除了 1 之外的每个 $i \in \mathbb{Z}_{3d-1}$，只与 $\{0,1,2\}$ 中的一个连边，点 1 与点 0 和点 2 都连边。因此

$$\begin{aligned} 5\gamma &\le g_0 + g_1 + g_2 + 2g_{3d-1} \\ &= x_1 + \sum_{i=0}^{3d-2} x_i + 3x_{3d-1} + 2\sum_{i=0}^{3d-2} x_i \\ &= x_1 + 3, \end{aligned}$$

所以 $x_1 \ge 5\gamma - 3$。类似地，对于 $i \in \{0,1,\dots,3d-2\}$，有 $x_i \ge 5\gamma - 3$。而且有

$$\begin{aligned} (5d-7)\gamma &\le g_3 + g_4 + \cdots + g_{3d-2} + (2d-3)g_{3d-1} \\ &= \sum_{i=0}^{3d-2} g_i - (g_0 + g_1 + g_2) + (2d-3)\sum_{i=0}^{3d-2} x_i \\ &= d\sum_{i=0}^{3d-2} x_i + (3d-1)x_{3d-1} - x_1 - 3 + 2\sum_{i=0}^{3d-2} x_i + (2d-3)\sum_{i=0}^{3d-2} x_i \\ &= 3d - 4 - x_1, \end{aligned}$$

所以 $x_1 \le 3d-4-(5d-7)\gamma$。联立这两个不等式，我们得到 $3d-1 \ge (5d-2)\gamma$。设

$$y_i = \frac{x_i - (5\gamma - 3)}{3d-1-\gamma(5d-2)}, \quad 对于\ i = 0,1,\dots,3d-2$$

以及

$$y_{3d-1} = \frac{x_{3d-1} - (1-\gamma)}{3d-1-\gamma(5d-2)}.$$

如果 $3d-1-\gamma(5d-2) = 0$，则对于 $i = 0,1,\dots,3d-2$，我们有 $x_i - (5\gamma-3) = 0$ 以及 $x_{3d-1} - (1-\gamma) = 0$，所以对于所有的 i, 我们令 $y_i = 0$，这并不会引起矛盾。所

以对 $i \in \{0,1,\ldots,3d-2\}$，我们有 $0 \le y_i \le 1$，并且 $\frac{-(1-\gamma)}{3d-1-\gamma(5d-2)} \le y_{3d-1} \le 0$，以及

$$\sum_{i=0}^{3d-1} y_i = \frac{\sum_{i=0}^{3d-1} x_i - (3d-1)(5\gamma-3) - 1 + \gamma}{3d-1-\gamma(5d-2)} = 3.$$

为了方便起见，我们设 $t = 3d-1-\gamma(5d-2) \ge 0$，记

$$\begin{aligned}
e =& \sum_{i\sim j} x_i x_j = \sum_{\substack{i\sim j\\ i,j=0}}^{3d-2} x_i x_j + x_{3d-1}\sum_{i=0}^{3d-2} x_i \\
=& \sum_{\substack{i\sim j\\ i,j=0}}^{3d-2} (5\gamma-3+ty_i)(5\gamma-3+ty_j) + (1-\gamma+ty_{3d-1})\sum_{i=0}^{3d-2}(5\gamma-3+ty_i) \\
=& \sum_{\substack{i\sim j\\ i,j=0}}^{3d-2} (5\gamma-3)^2 + \sum_{i=0}^{3d-2} y_i \sum_{\substack{j:j\sim i\\ j=0}}^{3d-2} (5\gamma-3)t + t^2 \sum_{\substack{i\sim j\\ i,j=0}}^{3d-2} y_i y_j \\
& + (1-\gamma+ty_{3d-1})[(3d-1)(5\gamma-3)+t(3-y_{3d-1})] \\
=& \frac{1}{2}d(3d-1)(5\gamma-3)^2 + (5\gamma-3)td(3-y_{3d-1}) + t^2\sum_{\substack{i\sim j\\ i,j=0}}^{3d-2} y_i y_j \\
& + (1-\gamma)[(3d-1)(5\gamma-3)+3t] + t[(3d-1)(5\gamma-3)+3t]y_{3d-1} \\
& - (1-\gamma)ty_{3d-1} - t^2 y_{3d-1}^2 \\
=& \frac{1}{2}d(3d-1)(5\gamma-3)^2 + 3dt(5\gamma-3) + (1-\gamma)[(3d-1)(5\gamma-3)+3t] \\
& - t^2 y_{3d-1}^2 + (t((3d-1)(5\gamma-3)+3t) - dt(5\gamma-3) - (1-\gamma)t)y_{3d-1} + t^2 \sum_{\substack{i\sim j\\ i,j=0}}^{3d-2} y_i y_j.
\end{aligned}$$

由于对于 $i \in \{0,1,\ldots,3d-2\}$，都有 $y_i \ge 0$，且 $\sum_{i=0}^{3d-2} y_i = 3-y_{3d-1}$，众所周知（比如参考[7]），满足前面条件的 $\sum_{\substack{i\sim j\\ i,j=0}}^{3d-2} y_i y_j$ 的极大值是能取到的，前提是 $y_i > 0$ 的那些点构成一个完全子图。因为 F_d 是不包含三角形的，所以这个完全子图就是一条边。于是 $\sum_{\substack{i\sim j\\ i,j=0}}^{3d-2} y_i y_j \le (\frac{3-y_{3d-1}}{2})^2$。因此，

$$\begin{aligned}
e \le& \frac{1}{2}d(3d-1)(5\gamma-3)^2 + 3dt(5\gamma-3) + (1-\gamma)[(3d-1)(5\gamma-3)+3t] + \frac{9}{4}t^2 \\
& - \frac{3}{4}t^2 y_{3d-1}^2 + (t((3d-1)(5\gamma-3)+3t) - dt(5\gamma-3) - (1-\gamma)t - \frac{3}{2}t^2)y_{3d-1}.
\end{aligned}$$

将 $t = 3d-1-\gamma(5d-2)$ 带入到上面的不等式中，仔细计算后得到 y_{3d-1} 的系数

为 $-\frac{1}{2}t^2$。所以我们有

$$\begin{aligned}e\leq&\frac{1}{2}d(3d-1)(5\gamma-3)^2+3dt(5\gamma-3)+(1-\gamma)[(3d-1)(5\gamma-3)+3t]+\frac{9}{4}t^2\\&-\frac{1}{4}t^2(3y_{3d-1}^2+2y_{3d-1})\\=&\frac{1}{4}(75d^2\gamma^2-90d^2\gamma+27d^2-110d\gamma^2+126d\gamma-36d+32\gamma^2-32\gamma+9)\\&-\frac{1}{4}t^2(3y_{3d-1}^2+2y_{3d-1}).\end{aligned}$$

由于 $\frac{-(1-\gamma)}{3d-1-\gamma(5d-2)}\leq y_{3d-1}\leq 0$，我们得到 $-\frac{1}{4}t^2(3y_{3d-1}^2+2y_{3d-1})\leq\frac{1}{12}t^2$。总的来说，我们有 $e\leq\frac{1}{6}(125d^2\gamma^2-150d^2\gamma+45d^2-175d\gamma^2+200d\gamma-57d+50\gamma^2-50\gamma+14)$。

对于 $d=2$ 的情况，我们能略微提升这个上界。对 $i\in\{0,1,\ldots,4\}$，令 $z_i=1-y_i$，于是 $0\leq z_i\leq 1$ 且 $\sum_{i=0}^4 z_i=5-\sum_{i=0}^4 y_i=5-(3-y_5)=2+y_5$。于是有

$$\sum_{\substack{i\sim j\\i,j=0}}^4 y_iy_j=\sum_{\substack{i\sim j\\i,j=0}}^4(1-z_i)(1-z_j)=5-2\sum_{i=0}^4 z_i+\sum_{\substack{i\sim j\\i,j=0}}^4 z_iz_j=1-2y_5+\sum_{\substack{i\sim j\\i,j=0}}^4 z_iz_j.$$

基于上面的讨论，$\sum_{\substack{i\sim j\\i,j=0}}^4 z_iz_j\leq(\frac{2+y_5}{2})^2=1+y_5+\frac{1}{4}y_5^2$，我们有 $\sum_{\substack{i\sim j\\i,j=0}}^4 y_iy_j\leq 2-y_5+\frac{1}{4}y_5^2$。于是，

$$\begin{aligned}e\leq&\frac{1}{2}d(3d-1)(5\gamma-3)^2+3dt(5\gamma-3)+(1-\gamma)[(3d-1)(5\gamma-3)+3t]+2t^2-\frac{3}{4}t^2y_5^2\\\leq&\frac{1}{2}(25d^2\gamma^2-30d^2\gamma+9d^2-45d\gamma^2+52d\gamma-15d+14\gamma^2-14\gamma+4).\end{aligned}$$

将 $d=2$ 带入上面不等式得到 $e\leq 12\gamma^2-15\gamma+5$。证明完毕。 □

我们接下来证明下述命题。

命题 6：令 $d\geq 2$ 并假设图 G 同态于 F_d+K_1，但是不同态于 F_i+K_1，其中 $i<d$，则该同态是一个满同态。

证明. 令 f 为从 G 到 F_d+K_1 的同态。假设 f 不是满的，则存在某个 $i\in\{0,1,\ldots,3d-1\}$ 使得 i 没有原像。

- 如果 $i\in\{0,1,\ldots,3d-2\}$，由对称性，我们可以令 $i=3d-2$。定义

$$g:(F_d+K_1)\backslash\{3d-2\}\to F_{d-1}+K_1$$

使得对 $0 \leq j \leq 3d-5$，$g(j) = j$，$g(3d-4) = 0$，$g(3d-3) = 1$，以及 $g(3d-1) = 3(d-1)-1$。容易验证 g 是一个同态。所以 $g \circ f$ 一个是从 G 到 $F_{d-1} + K_1$ 的同态，与要求矛盾。

- 如果 $i = 3d-1$，定义

$$g : (F_d + K_1) \backslash \{3d-1\} \to F_{d-1} + K_1$$

使得对 $0 \leq j \leq 3d-5$，$g(j) = j$，$g(3d-4) = 0$，$g(3d-3) = 1$ 以及 $g(3d-1) = 3(d-1)-1$。容易验证 g 是一个同态。类似地，$g \circ f$ 是从一个从 G 到 $F_{d-1} + K_1$ 的同态，与要求矛盾。

□

引理 32：令 G 是一个 n 个顶点的最小度 $\delta(G) \geq \gamma n$ 的图。假设 G 同态于 $F_d + K_1$，但是不同态于 $F_i + K_1$，其中 $i < d$，则有

(i) 如果 $d = 2$，则 $\gamma \leq \frac{5}{8}$ 并且 $n^{-2}e(G) \leq 12\gamma^2 - 15\gamma + 5$。

(ii) 如果 $d = 3$，则 $\gamma \leq \frac{8}{13}$ 并且 $n^{-2}e(G) \leq \frac{1}{3}(325\gamma^2 - 400\gamma + 124)$。

(iii) 如果 $d = 4$，则 $\gamma \leq \frac{11}{18}$ 并且 $n^{-2}e(G) \leq 225\gamma^2 - 275\gamma + \frac{253}{3}$。

证明. 令 G 是 n 个顶点的满足引理 32 的条件的图，令 f 是从 G 到 $F_d + K_1$ 的同态。我们将 F_d 和 K_1 中的点分别标记为 $\{0, 1, \ldots, 3d-2\}$ 和 $3d-1$。对于任意的 $i \in \{0, 1, \ldots, 3d-1\}$，令 $x_i = |\{x \in V(G) : f(x) = i\}|/n = |f^{-1}(i)|/n$，则有 $0 \leq x_i \leq 1$ 以及 $\sum_{i=0}^{3d-1} x_i = 1$。命题 6 中证明的 f 的满射性保证了每个 $f^{-1}(i)$ 都是非空的。所以，如果 $x \in f^{-1}(i)$ 并且 x 和 y 在 G 中是相连的，则 $f(y)$ 和 $f(x)$ 在 $F_d + K_1$ 中是相连的。于是，$g_i = \sum_{j:j\sim i} x_j \geq d_G(x)/n \geq \gamma$，这满足引理 31 的要求。所以结论成立。 □

现在我们能够证明下述 δ_4 的稍弱的上界。

定理 33：假设 G 是一个 n 个顶点的最小度为 $\frac{49}{52}n + 1$ 的图，则其最大的不包含 K_4 的子图和最大的 3 部子图的边数相等。于是，$\delta_4 \leq \frac{49}{52}$。

证明. 令 G 是一个 n 个顶点的最小度为 $\frac{49}{52}n+1$ 的图，则有 $e(G)\geq\frac{1}{2}\delta n$。我们假设 $P_3(G)<f_4(G)$，然后导出矛盾。

令 H 是最大的不包含 K_4 的子图满足 $e(H)=f_4(G)$，记 $e(H)=tn^2$。由于 $f_4(G)>P_3(G)\geq\frac{2}{3}e(G)\geq\frac{\delta n}{3}$，我们有 $t>\frac{\delta}{3n}$。按照我们在定理 20 的证明过程中做的，我们构造图序列 $H=H_n,H_{n-1},\ldots$，其中如果 H_k 中存在一个度数不超过 $\frac{8}{13}k$ 的点，就删除这个点得到 H_{k-1}。令 Γ 为最后的图，记 $v(\Gamma)=\alpha n$，则 Γ 不包含 K_4 且最小度 $\delta(\Gamma)>\frac{8}{13}v(\Gamma)$，并且有

$$e(\Gamma)\geq e(H)-\frac{8}{13}(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(\alpha n+1))=tn^2-\frac{4}{13}(n+\alpha n+1)(n-\alpha n),$$

即

$$n^{-2}e(\Gamma)\geq t-\frac{4}{13}\left(1+\alpha+\frac{1}{n}\right)(1-\alpha). \tag{3.1}$$

由于 $\delta(\Gamma)>\frac{8}{13}\alpha n$，根据定理 30，$\Gamma$ 同态与 F_d+K_1，其中 $d\geq 3$。选择 d 使得对任意的 $i<d$，Γ 都不同态于 F_i+K_1。现在我们关注 d 的取值。

如果 $d=3$，则由引理 32 (ii) 以及 $\gamma=\frac{8}{13}$，我们有

$$n^{-2}e(\Gamma)\leq\frac{4}{13}\alpha^2.$$

再联合 (3.1)，我们有 $t\leq\frac{4}{13}\alpha^2+\frac{4}{13}\left(1+\alpha+\frac{1}{n}\right)(1-\alpha)$。由于 $t>\frac{\delta}{3n}$，于是

$$\delta<\frac{12}{13}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n}\right)n\leq\max_{0\leq\alpha\leq 1}\frac{12}{13}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n}\right)n=\frac{12}{13}n+\frac{12}{13},$$

这与 $\delta\geq\frac{49}{52}n+1$ 矛盾。

如果 $d=2$，则由引理 32 (i) 以及 $\gamma=\frac{8}{13}$，我们有

$$n^{-2}e(\Gamma)\leq\frac{53}{169}\alpha^2.$$

类似地，联合 (3.1)，我们有 $t\leq\frac{53}{169}\alpha^2+\frac{4}{13}\left(1+\alpha+\frac{1}{n}\right)(1-\alpha)$。由于 $t>\frac{\delta}{3n}$，于是

$$\begin{aligned}\delta<\left(\frac{3}{169}\alpha^2-\frac{12}{13n}\alpha+\frac{12}{13}(1+\frac{1}{n})\right)n&\leq\max_{0\leq\alpha\leq 1}\left(\frac{3}{169}\alpha^2-\frac{12}{13n}\alpha+\frac{12}{13}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)n\\&=\max\left\{\frac{12}{13}n+\frac{12}{13},\frac{159}{169}n\right\},\end{aligned}$$

这同样与 $\delta\geq\frac{49}{52}n+1$ 矛盾。

因此，唯一剩下的情况就是 $d=1$，即 Γ 是 3 部图（由于 $\delta(\Gamma)>\frac{8}{13}\alpha n$，显然 Γ 不可能是二部图）。G 中与 $V(G)\backslash V(\Gamma)$ 中的点关联的边数为

$$m=\sum_{v\in V(G)\backslash V(\Gamma)} d(v)-e(V(G)\backslash V(\Gamma))\geq(1-\alpha)n\delta-\binom{(1-\alpha)n}{2}.$$

运用引理 23，我们有

$$\begin{aligned}t=&n^{-2}f_4(G)>n^{-2}P_3(G)\geq n^{-2}\left(e(\Gamma)+\frac{2}{3}m\right)\\>&t-\frac{4}{13}\left(1+\alpha+\frac{1}{n}\right)(1-\alpha)+\frac{2}{3n^2}\left((1-\alpha)n\delta-\frac{(1-\alpha)n((1-\alpha)n-1)}{2}\right).\end{aligned}$$

这给出了 $\delta<3n\left(\frac{25}{78}-\frac{1}{78}\alpha-\frac{1}{78n}\right)$。又因为 $\delta\geq\frac{49}{52}n+1$，所以有 $\frac{49}{52}n+1<3n\left(\frac{25}{78}-\frac{1}{78}\alpha-\frac{1}{78n}\right)$，即 $\alpha<\frac{1}{2}-\frac{27}{n}$。

另一方面，根据 Turán 定理，我们有 $e(\Gamma)\leq v(\Gamma)^2/3=\frac{\alpha^2n^2}{3}$。于是由不等式 (3.1) 可得 $t\leq\frac{1}{3}\alpha^2+\frac{4}{13}\left(1+\alpha+\frac{1}{n}\right)(1-\alpha)$。因为 $t>\frac{\delta}{3n}$，所以有 $\delta<3n\left(\frac{1}{39}\alpha^2-\frac{4}{13n}\alpha+\frac{4}{13}(1+\frac{1}{n})\right)$。于是 $\frac{49}{52}n+1<3n\left(\frac{1}{39}\alpha^2-\frac{4}{13n}\alpha+\frac{4}{13}(1+\frac{1}{n})\right)$，即 $0<n\alpha^2-12\alpha-\frac{n}{4}-1$，而这对所有的 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}-\frac{27}{n}\right)$ 都不成立。证明完毕。 □

3.5 δ_4 上界的改进

在这一节中，我们用符号 $a=b\pm c$ 表示 $b-c<a<b+c$。

引理 34：令 $\delta=0.9415$，假设 $1\geq t\geq\delta/3$，则存在 $\epsilon>0$ 使得下述对于 $\gamma=\frac{6t-2(2\delta-1)^2}{9+9t-12\delta}-\epsilon$ 成立:

(i) $11/18<\gamma<2t$,

(ii) $3(2t-\gamma)(2-3\gamma)>(3\gamma-4\delta+2)^2$。

假设 $t\leq((31-32\delta)^2+15)/48$，则，

(iii) 如果 $\gamma\leq 8/13$，则 $t>\frac{1}{3}(325\gamma^2-400\gamma+124)$；并且

(iv) 不等式

$$\left(12\gamma^2-\frac{31}{2}\gamma+5\right)\alpha^2+\frac{1}{2}\gamma\geq t$$

在 $0\leq\alpha\leq 1$ 的范围内无解。

证明. 首先，我们记 $s=3+3t-4\delta$，注意到 $s\ge 3(1-\delta)>0$，所以有 $\gamma=\frac{2}{3}-\frac{8(1-\delta)^2}{3s}-\epsilon$。

(i) 计算可得 $\frac{d\gamma}{dt}=8(1-\delta)^2s^{-2}$ 从而有 $0<\frac{d\gamma}{dt}\le 8/9$。于是为了证明 $11/18<\gamma<2t$，只需验证 $t=\delta/3$ 即可。我们计算得 $0.6147>\gamma=\frac{8}{9}\delta-\frac{2}{9}-\epsilon>0.6146-\epsilon$。由于 $11/18<0.6112$ 以及 $2t>0.6276$，所以当 ϵ 足够小时我们有 $11/18<\gamma<2t$。

(ii) 我们有

$$(6t-3\gamma)(2-3\gamma)-(3\gamma-4\delta+2)^2=6s\epsilon>0.$$

假设还有 $t\le t^*=((31-32\delta)^2+15)/48$，则我们有 $s=3+3t-4\delta\le 64(\delta-1)^2$。

(iii) 假设 $\gamma\le 8/13$。令 $g_1(\gamma)=\frac{1}{3}(325\gamma^2-400\gamma+124)$，则通过计算可得

$$\frac{d^2g_1(\gamma(t))}{dt^2}=\frac{8}{3}(1-\delta)^2s^{-4}(15600(1-\delta)^2-200s)+10400(1-\delta)^2s^{-3}\epsilon.$$

由于 $s\le 64(1-\delta)^2$，于是 $\frac{d^2g_1(\gamma(t))}{dt^2}>0$。因此 $t-g_1(\gamma)$ 是一个关于 t 的凹函数。为了证明该函数是正的，只需验证极端情况 $t=\delta/3$ 和 $t=t'$ 时的值即可，其中 $t'=0.3146\pm 0.0001$ 是 t 在 $\gamma=8/13$ 时的取值。对于足够小的 ϵ，我们有

$$\delta/3-g_1(\gamma(\delta/3))=0.0060\pm 0.0001+O(\epsilon)>0,$$

以及

$$t'-g_1(8/13)=0.0069\pm 0.0001+O(\epsilon)>0,$$

与要求相符。

(iv) 如果 $t=((31-32\delta)^2+15)/48=0.3283\pm 0.0001$，则有 $\gamma=5/8-\epsilon$，并且不等式

$$\left(12\gamma^2-\frac{31}{2}\gamma+5\right)\alpha^2+\frac{1}{2}\gamma\ge t$$

变成

$$O(\epsilon)\cdot\alpha^2+0.3125-\frac{1}{2}\epsilon\ge t=0.3283\pm 0.0001,$$

其中 $O(\epsilon)\to 0$ 当 $\epsilon\to 0$。显然当 ϵ 充分小的时候，这在 $0\le\alpha\le 1$ 时无解。

现在假设 $t<((31-32\delta)^2+15)/48$ 以及 $s<64(1-\delta)^2$，则有 $12\gamma^2-\frac{31}{2}\gamma+5=12(\gamma-2/3)(\gamma-5/8)>0$。所以 $(12\gamma^2-\frac{31}{2}\gamma+5)\alpha^2+\frac{1}{2}\gamma\ge t$ 的解为 $\alpha\ge r_1=$

$\frac{1}{2}s^{1/2}(1-\delta)^{-1}(64(1-\delta)^2-s)^{-1/2}(s-2(1-\delta))+h(\epsilon)$，其中当 $\epsilon \to 0$ 时有 $h(\epsilon) \to 0$。我们忽略 $h(\epsilon)$，因为这并不影响下面的计算。我们发现

$$\frac{dr_1}{ds} = \frac{1}{2}(1-\delta)^{-1}s^{-1/2}(64(1-\delta)^2-s)^{-3/2}[32(s+2\delta-2)(1-\delta)^2+s(64(1-\delta)^2-s)] > 0.$$

仔细地计算可以得到在范围 0.31379 ± 0.00001 中存在某个 t 使得 $r_1 = 1$。如果 $t \geq 0.3138$ 则有 $\alpha \geq r_1 > 1$，矛盾，所以我们有 $t < 0.3138$。另一方面，$t \geq \delta/3 > 0.3138$，矛盾。证明完毕。 □

定理 35：**假设 G 是 n 个顶点的最小度为 $0.9415n$ 的图，其中 n 充分大，则 G 的最大的不包含 K_4 的子图和最大的 3 部子图的边数一样多。于是，$\delta_4 \leq 0.9415$。**

证明. 令 G 是 n 个顶点的最小度为 δn 的图，则 $e(G) \geq \frac{1}{2}\delta n^2$。假设 $P_3(G) < f_4(G)$，当 $\delta = 0.9415$ 时我们将导出矛盾。这就证明了 $\delta_4 \leq 0.9415$。

令 H 为 G 的满足 $e(H) = f_4(G)$ 的不包含 K_4 的子图，记 $e(H) = tn^2$。因为 $f_4(G) > P_3(G) \geq \frac{2}{3}e(G) \geq \frac{\delta n^2}{3}$，所以我们有 $t > \frac{\delta}{3}$。跟我们在证明定理 25 的过程中一样，我们构造一系列的图 $H = H_n, H_{n-1}, \ldots$，其中如果 H_k 存在某一个度数不超过 γk 的点，就删掉这个点得到图 H_{k-1}。记最后的图为 Γ 并记 $v(\Gamma) = \alpha n$，则 Γ 不包含 K_4 且最小度为 $\delta(\Gamma) > \gamma v(\Gamma)$，$e(\Gamma) \geq e(H) - \gamma(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+(\alpha n+1)) = tn^2 - \frac{\gamma}{2}(n+\alpha n+1)(n-\alpha n)$，即

$$\beta\alpha^2 := n^{-2}e(\Gamma) \geq t - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha^2) - O(1/n), \tag{3.2}$$

即 $(2\beta-\gamma)\alpha^2 \geq 2t-\gamma-O(1/n)$。由引理 34 (i) 可知 $2t-\gamma > 0$，所以对充分大的 n 有 $2\beta > \gamma$，以及

$$\alpha^2 \geq \frac{2t-\gamma}{2\beta-\gamma}.$$

由引理 34 (i) 可知 $\gamma > 11/18$，所以根据定理 30 可得 Γ 同态于某个 $d \leq 4$ 的 $F_d + K_1$。选取 d 满足 Γ 不同态于任意 $i < d$ 的 $F_i + K_1$。现在我们讨论 d 的取值。

假设 $d = 1$，即 Γ 是 3 部图。在这种情况下，根据 Turán 定理有 $e(\Gamma) \leq v(\Gamma)^2/3 = \frac{\alpha^2 n^2}{3}$，即 $\beta \leq 1/3$。所以 $\gamma < 2/3$。G 中与 $V(G)\backslash V(\Gamma)$ 关联的边数为

$$m = \sum_{v \in V(G)\backslash V(\Gamma)} d(v) - e(V(G)\backslash V(\Gamma)) \geq (1-\alpha)n^2\delta - \binom{(1-\alpha)n}{2}.$$

运用引理 23，我们有

$$\begin{aligned} t =& n^{-2}f_4(G) > n^{-2}P_3(G) \geq n^{-2}\left(e(\Gamma)+\frac{2}{3}m\right) \\ \geq& t-\frac{1}{2}\gamma(1-\alpha^2)+\frac{2}{3}\left((1-\alpha)\delta-\frac{(1-\alpha)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

由于 $\gamma < 2/3$，所以得到 $\alpha < \frac{3\gamma-4\delta+2}{2-3\gamma}$。因为 $\alpha^2 \geq \frac{2t-\gamma}{2\beta-\gamma}$，从而有

$$\frac{2t-\gamma}{2\beta-\gamma} < \left(\frac{3\gamma-4\delta+2}{2-3\gamma}\right)^2,$$

又因为 $\beta \leq 1/3$，我们有 $3(2t-\gamma)(2-3\gamma) < (3\gamma-4\delta+2)^2$。这与引理 34 (ii) 矛盾。所以这个情况导出了矛盾。注意到如果 $t > ((31-32\delta)^2+15)/48$，则我们可以选取 $\gamma = 5/8$ 使其满足引理 34中的不等式 (i) 和 (ii)，这也直接引起矛盾，因为根据引理 24，我们知道 Γ 只能是 3 部图。于是我们可以假设

$$t \leq ((31-32\delta)^2+15)/48.$$

对于 $d=4$ 的情况，由引理 32 可知 $\gamma \leq 11/18$，这与引理 34 (i) 矛盾。对于 $d=3$ 的情况，我们得到 $\beta \leq \frac{1}{3}(325\gamma^2-400\gamma+124) < t$，于是得到 $\alpha > 1$，矛盾。所以只能是 $d=2$，即 Γ 是 (F_2+K_1) 的形状。

根据引理 32，我们有 $\beta \leq 12\gamma^2-15\gamma+5$。我们重写 $\alpha^2 \geq \frac{2t-\gamma}{2\beta-\gamma}$ 为

$$\left(12\gamma^2-\frac{31}{2}\gamma+5\right)\alpha^2+\frac{1}{2}\gamma \geq t.$$

然而，引理 34 (vi) 说明上述不等式在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 上是无解的。证明完毕。 □

3.6 小结

在本章中，我们扩展了下面的问题，即何时能保证 G 中的最大的不包含三角形的子图边数与最大的二部子图的边数一样多。我们仍旧关注于图的最小度条件，并获得了一般情况的上下界，但是下述 Balogh、Keevash 和 Sudakov[7] 提出的猜想还是未解决的。

猜想 36：[7] 任意 n 个点的最小度至少为 $(3/4+o(1))n$ 的图中的最大不包含三角形的子图边数与最大的二部子图边数一样多。

4 强可分矩阵与某些组合结构

4.1 引言

群试是由 Dorfman[11] 在 1943 年提出的，并且被广泛应用在不同的领域，如血液测试、化学泄露测试、电子短路侦测、编码理论等。其基本形式如下，一共有 n 个样本，每个样本可能是阳性的（也称为感染态），也可能是阴性的（也称为纯净态）。研究目的是为了高效地找出所有的阳性样本。为了避免一个一个地测试，群试是将所有的样本融合成不同的小组，并对每个小组进行测试。如果结果是阳性的，意味着这组样本中含有至少一份阳性样本。如果结果是阴性的，意味着这组样本中不含阳性样本。群试的目的就是为了在找出所有阳性样本的前提下最小化测试的次数。

在群试中，有两种一般性的模型算法，自适应性算法和非自适应性算法。自适应性算法被设计成若干轮，同轮间的测试是独立的，但是后轮能用到所有前轮的结果信息，该模型存在测试次数能达到信息论下界的算法。反之，非自适应性算法必须同时进行所有测试，并且要马上识别出所有阳性的样本。由于可以利用更多信息，自适应性算法通常能比非自适应性算法需要更少的测试次数。然而，非自适应性算法也有其自身的优势，他们更节约时间。

在文献[23] 中，Fan 等人提出了一种新的非自适应性的组合群试模型，称为 t-强可分矩阵（strongly t-separable matrix，t-SSM），该模型的优势在于结合了 t-分离矩阵（t-disjunct matrix，t-DM）和 t-可分矩阵（$\bar{t}$-separable matrix，$\bar{t}$-SM）的优点，即有着和 t-DM 一样高效的确定阳性样本的方案，但同时条件要求更弱。因而对 t-强可分矩阵的研究是一件十分有意义的工作。

在本章，我们用新的概率方法改进了 t-强可分矩阵和一些组合结构的码率的下界，包括局部稀薄集族和消去集族。我们首先介绍一下这些结构的概念和相关背景。

4.1.1 强可分矩阵

一个非自适应性组合群试方案可以表示为一个 0-1（二元）矩阵 $B=(b_{ij})$，其中，B 的列表示样本，行表示测试。于是，如果第 j 个样本包含在第 i 次测试中，则令 $b_{ij}=1$；否则，$b_{ij}=0$。并且我们可以将 B 的列 c_j 看成是集合 $\{i \mid b_{ij}=1\}$ 的关联向量，这样我们就能很方便的考虑列的并，即对应的关联向量的布尔和。我们首先给出文献[12] 中的分离矩阵和可分矩阵的定义。

令 M、n、t 是满足 $M \geq n \geq 2$ 的整数，令 B 是规模为 $n \times M$ 的二元矩阵。记符号 $[n]=\{1,\ldots,n\}$ 以及 $[M]=\{1,\ldots,M\}$。令 $\mathcal{F}=\{c_1,\ldots,c_M\} \subseteq \{0,1\}^n$ 表示 B 的列向量的集合，其中对于任意的 $j \in [M]$，$c_j=(c_j(1),\ldots,c_j(n)) \in \{0,1\}^n$。如果对于任意的 $i \in [n]$，$c_k(i)=1$ 时都必有 $c_j(i)=1$，则我们称向量 c_j 覆盖向量 c_k。

定义 37：令 n、M、$t \geq 2$ 为整数，B 是规模为 $n \times M$ 的二元矩阵。

- 若 B 的任意 t 列向量的布尔和不覆盖任意其它向量，则称 B 为 t-分离矩阵（t-disjunct matrix），简记为 t-DM。
- 若 B 的所有可能的 $\leq t$ 列向量的布尔和都互不相同，则称 B 为 $\bar{t}$-可分矩阵（$\bar{t}$-separab matrix），简记为 $\bar{t}$-SM。
- 若 B 的所有可能的 t 列向量的布尔和都互不相同，则称 B 为 t-可分矩阵（t-separab matrix），简记为 t-SM。

定义 38：一个规模为 $n \times M$ 二元矩阵 B 如果满足下述条件，则称其为 t-强可分矩阵（strongly t-separable matrix），简记为 t-SSM，即，对于任意的 $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ 满足 $|\mathcal{F}_0|=t$，我们都有

$$\bigcap_{\mathcal{F}' \in \mathcal{U}(\mathcal{F}_0)} \mathcal{F}' = \mathcal{F}_0,$$

其中

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}_0)=\left\{\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} : \bigvee_{c \in \mathcal{F}_0} c = \bigvee_{c \in \mathcal{F}'} c\right\}.$$

下列关系是已知的，可参考文献[12,23]。

$$\overline{t+1}\text{-可分} \Rightarrow t\text{-分离} \Rightarrow t\text{-强可分} \Rightarrow \bar{t}\text{-可分}. \tag{4.1}$$

在文献[13] 中，Du 和 Hwang 证明了一个二元矩阵是 $\overline{t+1}$-可分的当且仅当它是 $(t+1)$-可分的且是 t-分离的。这里，我们给出 $\bar{t}$-可分与 t-强可分的关系。

定理 39：**令 t 是一个正整数，B 为 $(t+1)$-SM，则 B 是 $\bar{t}$-可分的当且仅当 B 是 t-强可分的。**

证明. 充分性由关系 (4.1) 可知，所以我们只需要证明必要性。令 B 为 $(t+1)$-SM，$\mathcal{F}$ 表示 B 的列向量集合。令 $\mathcal{F}_1=\{c_1,\ldots,c_t\}\subseteq\mathcal{F}$，大小为 t，假设存在大小为 $t+1$ 的 $\mathcal{F}_2$，使得 $\bigvee_{c\in\mathcal{F}_1}c=\bigvee_{c\in\mathcal{F}_2}c$。如果 $\mathcal{F}_1\not\subseteq\mathcal{F}_2$，则由 $(t+1)$-可分的性质可知，对于任意的 $c'\notin\mathcal{F}_1$，都有 $\bigvee_{i=1}^t c_i\neq\left(\bigvee_{i=1}^t c_i\right)\vee c'$，所以再根据 B 也是 $\bar{t}$-可分的可知 $\mathcal{U}(\mathcal{F}_1)=\mathcal{F}_1$。于是我们得到 $\bigcap_{\mathcal{F}'\in\mathcal{U}(\mathcal{F}_1)}\mathcal{F}'=\mathcal{F}_1$，即 $\mathcal{F}_1$ 满足定义 38 的要求。如果 $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2$，令 $\mathcal{F}_2=\{c_1,\ldots,c_t,c_{t+1}\}$，由 $(t+1)$-可分的性质可知，对于任意的 $c\notin\{c_1,c_2,\ldots,c_{t+1}\}$，都有 $\bigvee_{i=1}^t c_i\neq\left(\bigvee_{i=1}^t c_i\right)\vee c'$。所以，$\mathcal{U}(\mathcal{F}_1)=\{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\}$。类似地，我们得到 $\bigcap_{\mathcal{F}'\in\mathcal{U}(\mathcal{F}_1)}\mathcal{F}'=\mathcal{F}_1$，即 $\mathcal{F}_1$ 满足定义 38 中的要求。如果不存在大小为 $t+1$ 的 $\mathcal{F}_2$ 使得 $\bigvee_{c\in\mathcal{F}_1}c=\bigvee_{c\in\mathcal{F}_2}c$，则对于任意的 $c'\notin\mathcal{F}_1$，都有 $\bigvee_{i=1}^t c_i\neq\left(\bigvee_{i=1}^t c_i\right)\vee c'$，这意味着 $\bigvee_{i=1}^t c_i$ 无法覆盖不在 $\mathcal{F}_1$ 中的任何向量。又因为 B 是 $\bar{t}$-可分的，我们有 $\bigcap_{\mathcal{F}'\in\mathcal{U}(\mathcal{F}_1)}\mathcal{F}'=\mathcal{F}_1$，即 $\mathcal{F}_1$ 满足定义 38 的要求。因为 $\mathcal{F}_1$ 的选取是任意的，所有根据定义 38 可知 B 是 t-SSM。 □

令 $SSM(t,n)$、$DM(t,n)$ 和 $S(\bar{t},n)$ 分别表示一个 n 行的 t-SSM、t-DM 和 $\bar{t}$-SM 的最大的可能的列数。用以下符号表示它们的码率

$$\begin{aligned} R(t) &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log_2 SSM(t,n)}{n}, \\ R_D(t) &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log_2 DM(t,n)}{n}, \\ R_S(\bar{t}) &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log_2 S(\bar{t},n)}{n}. \end{aligned}$$

下述定理结合了 $R_D(t)$ 和 $R_S(\bar{t})$ 的最好的上下界，对于更多的细节，可以参考文献 [10,12,14,15,18]。

定理 40：[10,12,14,15,18] 令 t 是一个 ≥ 2 的整数。如果 $t \to \infty$，则有

$$\frac{1}{t^2 \log_2 e}(1+o(1)) \leq R_D(t) \leq R_S(\bar{t}) \leq R_D(t-1) \leq \frac{2\log_2(t-1)}{(t-1)^2}(1+o(1)),$$

其中 e 表示自然常数。并且

$$0.1814 \leq R_D(2) \leq 0.3219,$$

$$0.3135 \leq R_S(2) \leq 0.4998.$$

根据 SSM、DM 和 SM 之间的关系，可以直接得到下面的推论。

推论 41：[23] 令 t 是一个 ≥ 2 的整数，则当 $t \to \infty$ 时，我们有

$$\frac{1}{t^2 \log_2 e}(1+o(1)) \leq R(t) \leq \frac{2\log_2(t-1)}{(t-1)^2}(1+o(1)),$$

并且，

$$0.1814 \leq R(2) \leq 0.4998.$$

在文献 [23] 中，Fan 等人改进了 $R(2)$ 的下界。

定理 42：[23] $R(2) \geq 0.2213$。

4.1.2 局部稀薄集族

在这一小节中，我们介绍一些下界可用类似我们改进 t-SSM 下界的方法进行改进的组合结构。令 $\mathcal{F}$ 表示全集为 n 个元素的子集族。不失一般性，我们假设全集为 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$。沿用 [2,3,21] 中的记号，如果对于子集族中的任意 k 的不同的集合，至少有一个点 $i \in [n]$ 只被这 k 个集合中的恰好一个包含，那么我们说这个子集族是 k-局部稀薄（k-locally thin）集族。

对于 k-局部稀薄集族，有以下两种扩展。

- (见 [22]) 如果对于集族中任意的 k 个不同的集合，至少存在一个点只被 1 个或 2 个集合包含，那么我们说这个集族是 k-局部 2-稀薄（k-locally 2-thin）集族。
- (见 [27]) 如果对于集族中任意的 k 个不同的集合，存在至少 b 个点，使得这每个点都被恰好一个集合包含，那么我们说这个集族是 (k,b)-局部稀薄（locally (k,b)-thin）集族。

注意到，一个集族如果是 k-局部稀薄集族，那么它也是 $(k+1)$-局部 2-稀薄集族。

由于第一种扩展的要求比原本更弱，而第二种更强，所以我们令 $WM(n,k,2)$ 和 $SM(n,k,b)$ 分别表示 $[n]$ 的 k-局部 2-稀薄集族和 (k,b)-局部稀薄集族的最大可能的大小。用以下符号分别表示它们的码率

$$wt(k,2)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log_2 WM(n,k,2)}{n},$$
$$st(k,b)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log_2 SM(n,k,b)}{n}.$$

该问题最早是由 Alon、Fachini、Körner 和 Monti[2,3,21] 提出并研究的。他们证明了 $\frac{1}{3}(6-\log_2 37)\le st(4,1)<0.4561\cdots$ 以及对于所有的偶数 k 都有 $st(k,1)<2/k$ 成立，并且对于所有的 k，有

$$\Omega\left(\frac{1}{k}\right)\le st(k,1)\le O\left(\frac{\log_2 k}{k}\right)<0.793.$$

确定 $st(k,1)$ 的值是一个十分困难的问题，比如说，我们甚至不知道是否有 $st(3,1)<1$。

后来，Fachini 等人[22] 得到了 $st(5,1)$ 和 $wt(6,2)$ 的新的上下界。

定理 43：[22]

$$0.1900<\frac{\log_2\frac{625}{369}}{4}\le st(5,1)\le wt(6,2)<0.596.$$

4.1.3 t-消去集族

在这一小节中，我们介绍另一个广为人知的相关结构，即消去集族（cancellative set families）。如果对于子集族 $\mathcal{F}$ （也可看成是对应的 0-1 的关联向量的集合）中任意不同的 $t+2$ 个集合 $A_1,\ldots,A_t$ 和 B,C，都有

$$A_1\cup\cdots\cup A_t\cup B\neq A_1\cup\cdots\cup A_t\cup C,$$

那么我们说这个集族是 t-消去的（t-cancellative）。对于 $t=1$ 的情况，我们简称为消去的。

实际上，在[27] 中有指出，我们可以把一个集族 $\mathcal{F}$ 是 t-消去的条件等价于要求其对应的 0-1 关联向量（对于 $A\in\mathcal{F}$，令 $x:=x(A)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，满足 $x_i=1$ 如果 $i\in A$，否则 $x_i=0$）满足下述条件：对于任意的 $(t+2)$ 个不同的

向量 $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(t+2)})$（考虑其任意但是固定的顺序），存在至少 $(t+1)$ 个不同的 $k \in [n]$，使得对应的有序的 $(t+2)$ 个元组 $(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(t+2)})$ 都不同，而且求和满足 $x_k^{(1)} + x_k^{(2)} + \cdots + x_k^{(t+2)} = 1$。也就是说，我们可以认为 t-消去的条件比 $(t+2, t+1)$-局部稀薄强很多。

令 $c(t, n)$ 表示 n 个元素的 t-消去集族的最大可能的大小。对 $t = 1$ 的情况，最早是由 Erdős 和 Katona[42] 提出的，并且猜测 $c(1, n) = \Theta(3^{n/3})$。后来被 Shearer[49] 的一个十分漂亮的构造证否，给出 $c(1, 3k) \geq k3^{k-2}$，从而得到下界对 $n > n_0$，有 $c(1, n) > 1.46^n$。

$c(1, n)$ 的渐进值在文献[50]（构造）和文献[26]（上界）中给出，即存在某个常数 $\gamma > 0$ 使得

$$\frac{\gamma}{\sqrt{n}} 1.5^n < c(1, n) < 1.5^n.$$

由于两个消去集族的拼接也是消去集族，于是我们有 $c(1, n+m) \geq c(1, n)c(1, m)$。所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c(1, n)^{1/n}$ 存在。对于 $t \geq 2$ 的情况，目前无已知结果，Körner 和 Sinaimeri[43] 介绍了如下 $t = 2$ 时的记号

$$r(t) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log_2 c(t, n)}{n},$$

并证明了 $0.1139 < r(2) \leq 0.42$。后来，Füredi[27] 将这个上界改进为 $r(2) \leq \log_2 5 - 2 = 0.3219\cdots$。

本章的结构如下。在第 4.2 节，我们改进 2-强可分矩阵码率的下界并给出计算一般的 t-强可分矩阵码率的方法。在第 4.3 节，我们讨论一些组合结构的码率的下界，包括局部稀薄集族和消去集族。第 4.4 节对本章进行小结。

4.2 t-强可分矩阵的下界

在这一小节中，我们主要考虑 t-SSM 的最大码率。我们首先会改进 2-SSM 的下界。接着，我们会给出得到 $t \geq 3$ 的 t-SSM 的下界的方法并给出 $t = 3$ 时的严格计算。

4.2.1 $R(2)$ 下界的改进

由 Shearer 在[49] 中的构造的启发，在这一部分，我们用通过改进常见的概率方法来提高 $R(2)$ 的下界。

定理 44：$R(2) \geq 0.2237$。

证明. 不失一般性，我们假设 $45 \mid n$，不然，我们可以用 $45\lfloor \frac{n}{45} \rfloor$ 来代替 n，由于 n 是趋于无穷的，所以这将不会影响码率。将 $[n]$ 划分成 $n/45$ 个区组，每个大小为 45，并将每个区组划分成 15 个三元组。在每个三元组中，给元素分别标记 $0, 1, 2$。

子集族中的每个子集的选取方法如下，对于每个区组，我们任意挑选一个三元组，选取里面所有的三个元素，对该区组的其它三元组，我们任意选择其中一个元素，使得挑选出来的元素满足如下关系：挑选的 14 的元素的标记之和恰好被 3 整除。于是，对于每个区组，我们共有 15×3^{13} 中选取方式，所以这样选出来的子集的数目为

$$M = (15 \times 3^{13})^{n/45}.$$

我们将这个子集族记为 $\mathcal{H}$。我们声明对于这个子集族的任意三个不同的子集 $A, B, C \in \mathcal{H}$，都有 $A \cup B \neq A$ 或 C 以及 $A \cup B \neq A \cup C$。首先，第一个不等式成立是显然的。对于第二个不等式，假设 $A \cup B = A \cup C$，则有 $(B \triangle C) \subseteq A$。如果 B 和 C 选取的是不同的选取全部元素的三元组，那么对应的 $(B \triangle C)$ 中的两个三元组中会包含两个元素。如果 B 和 C 选取的是相同的选取全部元素的三元组，那么根据标记和被 3 整除的条件，我们知道在 $(B \triangle C)$ 至少存在两个三元组包含两个元素。根据 A 的选取结构可知，这都与 $(B \triangle C) \subseteq A$ 矛盾。

我们以概率 $p^{n/45}$ 独立随机地挑选 $\mathcal{H}$ 中的每个成员，p 的值将会在后面确定。我们现在数出可能会挑选的坏的结构的数目。

我们需要禁止的是两种坏的结构。第一种情况是对某个 $s \geq 2$，有 $A \cup B = A \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_s$，第二种情况是对于某个 $s \geq 2$，有 $A \cup B = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_s$，其中 $A, B, C_i, D_j \in \mathcal{H}$。实际上，只要我们有第二种结构，我们都能够在右边并上 A 或者 B 来得到第一种结构，因此，我们只需要禁止掉第一种情况即可。

现在我们来对 $A \cup B = A \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_s$ 的数目进行计数，其中 $s \geq 2$。先考虑某个固定的 45 个元素的区组。如果 $A \cup B$ 中只有一个选取全部元素的三元组，则 C_i 中选取全部元素的三元组一定跟 A 一样，这样的三元组一共有 15 种选取方式。对于其它的 14 个三元组中每一个，$A \cup B$ 中要么包含一个元素（即 A、

B 和 C_i 选取的元素相同），要么包含两个元素（即 A 和 B 选取不同的元素，而 C_i 选取的一定是二者之一，但是至少有一个 C_i 选取的元素必须和 B 相同）。这样的一个三元组元素的选取方式最多为

$$3 + 6(2^s - 1) = 3 \times 2^{s+1} - 3.$$

而最后一个三元组的元素选取是由被 3 整除的条件确定的，所以对于每个区组，总共的元素的选取方式最多为 $15 \times (3 \times 2^{s+1} - 3)^{13}$。

如果 $A \cup B$ 包含两个选取全部元素的三元组，即 B 中选取全部元素的三元组与 A 不同，则 C_i 中选取全部元素的三元组要么和 A 相同要么和 B 相同，这样的选取方式最多为

$$15 \times 14 \times 2^s.$$

剩下的 13 个三元组中元素的选取仍然有 $3 \times 2^{s+1} - 3$ 种方式。所以在这种情况下，对于一个区组，总共的选取方式最多为 $210 \times 2^s \times (3 \times 2^{s+1} - 3)^{13}$。

由于我们还需禁掉结构 $A \cup B = B \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_s$，其中 $s \geq 2$，所以如果下式成立

$$2\sum_{s=2}^{\infty} \left((15 \times (3 \times 2^{s+1} - 3)^{13} + 210 \times 2^s \times (3 \times 2^{s+1} - 3)^{13})p^{s+2}\right)^{n/45} \ll (15 \times 3^{13}p)^{n/45},$$

那么我们可以从每个坏的结构中移除一个集合从而得到 2-SSM，并且大小至少为 $(15 \times 3^{13}p)^{n/45}/2$。将上述不等式两边同时除以 $(15 \times 3^{13}p)^{n/45}$ 得

$$2\sum_{s=2}^{\infty} \left(\frac{(210 \times 2^s + 15)(6 \times 2^s - 3)^{13}}{15 \times 3^{13}} p^{s+1}\right)^{n/45} \ll 1,$$

即

$$2\sum_{s=2}^{\infty} \left((14 \times 2^s + 1)(2^{s+1} - 1)^{13} p^{s+1}\right)^{n/45} \ll 1.$$

现在我们估算上述不等式的左边。令 $f(s) = (14 \times 2^s + 1)(2^{s+1} - 1)^{13} p^{s+1}$。假

设有 $(2^{14}p)^{n/45} < 1$，那么

$$\begin{aligned}\sum_{s=2}^{\infty} f(s)^{n/45} &= \sum_{s=2}^{5} f(s)^{n/45} + \sum_{s=6}^{\infty} f(s)^{n/45} \\ &\le \sum_{s=2}^{5} f(s)^{n/45} + \sum_{s=6}^{\infty} \left(15 \times 2^s \times 2^{13(s+1)} p^{s+1}\right)^{n/45} \\ &= \sum_{s=2}^{5} f(s)^{n/45} + (15 \times 2^{13}p)^{n/45} \sum_{s=6}^{\infty} \left((2^{14}p)^{n/45}\right)^s \\ &= \sum_{s=2}^{5} f(s)^{n/45} + (15 \times 2^{13}p)^{n/45} \frac{(2^{14}p)^{6n/45}}{1-(2^{14}p)^{n/45}}.\end{aligned}$$

令 $p = 4.487 \times 10^{-5}$，那么对于 $s \in \{2,3,4,5\}$，有 $f(s) < 1$，而且有 $\left((15 \times 2^{13}p) \times (2^{14}p)^6\right)^{n/45} < 1$，以及 $(2^{14}p)^{n/45} < 1$。因此，当 n 充分大的时候，我们有 $\sum_{s=2}^{\infty} f(s)^{n/45} \ll 1/2$。

于是，我们证明了长度为 n 的大小为 $\left(4.487 \times 10^{-5} \times 15 \times 3^{13}\right)^{n/45}/2$ 的 2-SSM 的存在性，所以有

$$R(2) \ge \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2\left(\left(4.487 \times 10^{-5} \times 15 \times 3^{13}\right)^{n/45}/2\right)}{n} \ge 0.2237.$$

□

4.2.2 $t \ge 3$ 的 $R(t)$ 下界的改进

类似 $t=2$ 的情况，现在我们给出对于求解 $t \ge 3$ 的 $R(t)$ 的一般性方法，在此之前，仅知的结论是由推论 41 得到的。

首先我们定义 $S(a,b) := \sum_{i=1}^{b} (-1)^{b-i}\binom{b}{i} i^a$，表示从一个集合 $A = \{1,\ldots,a\}$ 到一个集合 $B = \{1,\ldots,b\}$ 的满射的数目。

我们假设 $b \mid n$，其中 b 是一个只与 t 有关的将在后面才确定的常正整数。实际上，如果 $b \nmid n$，那么我们可以用 $b\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ 来代替 n，这将不会影响码率。将 $[n]$ 划分成 $\frac{n}{b}$ 个区组，每个区组都包含 b 个元素。在每个区组中，选取一个元素，这样总共可以得到的子集的数目为

$$M = b^{n/b}.$$

我们记这个集族为 $\mathcal{H}$。

我们以概率 $p^{\frac{n}{b}}$ 独立随机地从 $\mathcal{H}$ 中挑选每个成员，其中 p 将在后面确定。我们现在数出我们可能挑选的坏结构的数目。

对于 $0 \le t' \le t-1$，我们要禁掉坏结构：$A_1 \cup \cdots \cup A_t = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_{t'}} \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_s$，其中 $s \ge 0$。由于对于某个 $0 \le t' \le t-2$，只要我们有 $A_1 \cup \cdots \cup A_t = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_{t'}} \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_s$，那么就会有 $A_1 \cup \cdots \cup A_t = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_{t'+1}} \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_s$，所以我们只需要禁掉 $A_1 \cup \cdots \cup A_t = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_{t-1}} \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_s$，其中 $\{i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, t\}$。

现在我们首先研究一种情况 $A_1 \cup \cdots \cup A_t = A_1 \cup \cdots \cup A_{t-1} \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_s$。考虑一个固定的 b 个元素的区组，我们考虑每个 A_i 的选取方式。总共最多为

$$g(s) := \sum_{j=1}^{t-1} \binom{b}{j} S(t,j) j^s + \binom{b}{t} S(t,t)(t^s - (t-1)^s),$$

其中 $\binom{b}{j}$ 表示 $A_1 \cup \cdots \cup A_t$ 可以选择的 j 个位置的数目，$S(t,j)$ 表示 $A_1 \cup \cdots \cup A_t$ 中 t 个元素可以怎样落在选取的 j 个位置的数目，j^s 表示所有的 C_i 的元素可以选取的方式数目。最有一项是 $j = t$ 的情况，比较特殊是因为如果 $A_1 \cup \cdots \cup A_t$ 包含 t 个位置，那么为了使得 $A_1 \cup \cdots \cup A_t = A_1 \cup \cdots \cup A_{t-1} \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_s$ 成立，$C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_s$ 不能仅仅只与 $A_1 \cup \cdots \cup A_{t-1}$ 中的 $t-1$ 个位置相同。

因此，如果我们有

$$t \sum_{s=0}^{\infty} \left(g(s) p^{s+t} \right)^{n/b} \ll (bp)^{n/b}, \tag{4.2}$$

其中 t 表示一共有 t 种选取 $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{t-1}}$ 的方式（注意到 t 只是一个常数，并且忽略不等式 (4.2) 左边的 t 并不会影响不等式的成立，所以为了简便，我们后面在计算 $t = 3$ 时会忽略它），那么我们可以从每个坏结构中移除一个集合从而得到 t-SSM，大小至少为 $(bp)^{n/b}/2$，所以码率至少为

$$\frac{\log_2(bp)}{b}. \tag{4.3}$$

对于参数 b 和 p 的选取，我们只需要保证不等式 (4.2) 成立即可。

这里我们计算 $t = 3$ 的情况，目前最好的 3-SSM 码率的下界是由关系 $R(3) \ge R_D(3) \ge 0.079$ 得到。现在我们改进这个下界。

定理 45：$R(3) \geq 0.0974$。

证明. 我们将 $t=3$ 带到之前我们讨论的过程中去，得到

$$g(s) := b(b-1)(b-2)3^s - b(b-1)(b-5)2^s + b.$$

现在我们需要确定 b 和 p 的取值使得下式成立

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(g(s)p^{s+3}\right)^{n/b} \ll (bp)^{n/b},$$

上式是由 (4.2) 得到的，根据我们之前所说，我们忽略了左边的系数 3。两边同时除以右边项可得

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(((b-1)(b-2)3^s - (b-1)(b-5)2^s + 1)p^{s+2}\right)^{n/b} \ll 1. \tag{4.4}$$

假设 $b \geq 6$ 以及 $3p < 1$，得到

$$\begin{aligned}
\text{不等式 (4.4) 的左边} &\leq \left((3b-2)p^2\right)^{n/b} + \sum_{s=1}^{\infty} \left((b-1)(b-2)3^s p^{s+2}\right)^{n/b} \\
&\leq \left((3b-2)p^2\right)^{n/b} + \left((b-1)(b-2)p^2\right)^{n/b} \sum_{s=1}^{\infty} \left((3p)^{n/b}\right)^s \\
&\leq \left((3b-2)p^2\right)^{n/b} + \left((b-1)(b-2)p^2\right)^{n/b} \frac{(3p)^{n/b}}{1-(3p)^{n/b}} \\
&\leq \left((3b-2)p^2\right)^{n/b} + \frac{\left(3(b-1)(b-2)p^3\right)^{n/b}}{1-(3p)^{n/b}}.
\end{aligned}$$

令 $b=6$、$p=0.24999$，以及 n 趋于无穷，容易验证下面的不等式成立

$$\left((3b-2)p^2\right)^{n/b} + \frac{\left(3(b-1)(b-2)p^3\right)^{n/b}}{1-(3p)^{n/b}} \ll 1.$$

因此，根据 (4.3)，我们有

$$R(3) \geq 0.0974.$$

$\square$

4.3 在组合结构上的应用

在这一节中，我们将给出之前介绍的相关组合结构的下界，包括 k-局部稀薄集族和 t-消去集族。

4.3.1 k-局部稀薄集族

在这一小节中，我们改进 5-局部稀薄集族和 6-局部 2-稀薄集族的下界。

定理 46：$st(5,1) > 0.1965$。

证明. 令 $\mathcal{H}$ 表示我们在第 4.2.2 小节定义的大小为 $b^{n/b}$ 的集族。同样地，我们以概率 $p^{\frac{n}{b}}$ 独立随机地选取 $\mathcal{H}$ 中的成员，其中 b 和 p 将在后面确定。

我们现在数出我们可能挑选的坏结构的数目。对于 $\mathcal{H}$ 中任意不同的 5 个成员 $A_1, A_2, \ldots, A_5$，如果不存在某个点使得它恰好只属于其中一个成员，那么我们称这 5 个成员是坏的。考虑一个固定的 b 个元素的区组，我们计算每个 A_i 中元素可能的选取方式，最多为

$$h(b) = b + b(b-1)\binom{5}{3},$$

其中，右边的第一项表示所有 5 个元素都在同一个位置，第二项表示 5 个元素分配在两个位置的方式数目，3 个在一个位置，另外 2 个在另一位置，我们简记为 $\{3,2\}$-型。容易验证，这是仅有的两类坏结构。因为，如果 5 个元素分配在超过 2 个位置，根据鸽巢原理，必然会存在至少一个位置只包含一个元素。于是，如果我们有

$$\big(h(b)p^5\big)^{n/b} \ll (bp)^{n/b},$$

那么，我们一从每个坏结构中移除一个集合从而得到 5-局部稀薄集族。令 $b=5$、$p=0.39518$，令 n 趋于无穷，易证上述不等式成立，于是我们得到 5-局部稀薄集族，码率至少为

$$\frac{\log_2(bp)}{b} > 0.1965.$$

证明完毕。 □

定理 47：$wt(6,2) > 0.2522$。

证明. 该证明与定理 46 的证明类似。令 $\mathcal{H}$、b、p 表示与定理 46 的证明中相同意义的参数。

对于 $\mathcal{H}$ 中的任意 6 个不同的成员 $A_1, A_2, \ldots, A_6$，如果不存在一个点使得它只属于这 6 个成员中的一个或两个，那么我们称这是坏的。考虑固定的一个包含 b 个元素的区组，我们数出每个 A_i 可能的元素选取方式数目。其最多为

$$h(b) = b + \binom{b}{2}\binom{6}{3},$$

其中右边的第一项表示所有 6 个元素只落在一个位置的数目，第二项表示 6 个元素落在两个位置，3 个在一个位置，另外 3 个在另一位置，即 $\{3,3\}$-型。我们声明这就是仅有的两类坏结构。因为，如果 6 个元素落在两个位置上，那么其它的情况只能是 $\{5,1\}$-型和 $\{4,2\}$-型，这两种都不是坏的；如果 6 个元素落在三个位置上，根据鸽巢原理，必然会存在至少一个位置上会有一个或两个元素。因此，如果我们有

$$\left(h(b)p^6\right)^{n/b} \ll (bp)^{n/b},$$

我们可以从每个坏结构中移除一个集合从而得到 6-局部 2-稀薄集族。

令 $b = 4$、$p = 0.50318$，令 n 趋于无穷，易证上述不等式成立，从而我们得到一个 6-局部 2-稀薄集族，码率至少为

$$\frac{\log_2(bp)}{b} > 0.2522.$$

证明完毕。 □

4.3.2 t-消去集族

在这一小节中，我们给出对于 $r(2)$ 的下界的改进。对于 $t \geq 3$ 时的 $r(t)$，我们只需要令在证明 $R(t)$ 的方法中的参数 $s = 1$ 即可。

定理 48：$r(2) > 0.1170$。

证明. 该证明与定理 45 的证明类似。唯一的不同在于我们这里只需要令 $s = 1$ 即可，即我们只需要禁掉结构 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup A_2 \cup C_1$，其中 $A_1, A_2, A_3, C_1 \in \mathcal{H}$，$\mathcal{H}$ 为我们在前面描述的大小为 $b^{n/b}$ 的集族。采用相同的符号，我们只需要选取合适的参数令下式成立即可

$$(g(1)p^4)^{n/b} \ll (bp)^{n/b},$$

其中 $g(1) = b + 6b(b-1) + b(b-1)(b-2)$。于是令 $b = 5$、$p = 0.3001$，我们有

$$r(2) \geq \frac{\log_2(bp)}{b} > 0.1170.$$

证明完毕。 □

4.4 小结

在本章，我们考虑了一些有意思的结构的码率的下界，包括 t-强可分矩阵、局部稀薄集族和消去集族。用一种新的概率方法的模型，我们能够改进这些下界。但是目前存在的上下界之间的鸿沟还是十分巨大的，后续如果能继续改进上下界将十分有意义。

5 其它在研问题

本章简要介绍在攻读博士学位期间的其它研究工作，这些课题或主题稍偏离于本文所讨论的极值构型问题，或因尚在研究初步阶段而未形成完整的成果。限于篇幅，只对这些课题的进展做简要介绍而不再展开论述。

5.1 子空间覆盖码

由于 Ahlswede、Cai、Li 和 Yeung 的开创性工作[1]，网络编码在这过去的二十年里吸引了大量的关注，他们在文章中说明了网络吞吐量不仅可以通过转发数据包，而且还可以通过执行它们的线性组合来显著提高。

一个多播网络是一个拥有 h 条信息的源节点和 N 个接收节点形成的无圈图，且每个接收节点要在一轮信息发送后，收到所有的这 h 条信息。更多多播网络编码的细节可以参考文献[25]。

Kötter 和 Kschischang[44] 介绍了随机网络纠错码的框架。在他们的模型中，产生了一种新的纠错码类型，即射影空间下的常数维空间码。这是在有限域上的有限维空间的某些 k 维子空间形成的集合，满足每个 t 维子空间最多被集合里面的一个 k 维子空间包含。子空间码的码字之间的距离定义为 $d_s(U,V)=\dim(U+V)-\dim(U)-\dim(V)=\dim(U)+\dim(V)-2\dim(U\cap V)$。这类码在以前只被零星地研究过，但是它们的组合结构，即有限域上的区组设计是早在被研究了。

在文献[19] 中，Etzion 等人研究了子空间的填充（packing）和覆盖（covering）。一个子空间填充 $t-(n,k,\lambda)_q$ 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上的一些 k 维子空间的集合 $\mathcal{C}$（也叫区组或者码字），使得 $\mathbb{F}_q^n$ 的每个 t 维子空间只被 $\mathcal{C}$ 中最多 λ 个区组包含。用 $A_q(n,k,t;\lambda)$ 表示一个 $t-(n,k,\lambda)_q$ 填充的最大的不重复的 k 维子空间的数量。$\lambda=1$ 的特殊情况即为常数维码。一个 $\alpha-(n,k,\delta)_q^c$ Grassmanian 覆盖码（covering Grassmanian code）$\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上的 k 维子空间的集合，满足任意 α 个码字张成的空间维数最多为 $k+\delta$。这样的码的最大可能的大小记为 $B_q(n,k,\delta;\alpha)$。在文献[20] 中证明了子空

间填充和 Grassmanian 覆盖码是等价的，即

$$B_q(n,k,\delta;\alpha) = A_q(n,n-k,n-k-\delta+1;\alpha-1).$$

那么该研究问题就是确定在某些参数限制下 Grassmanian 覆盖码的大小的上下界。我们对此问题的贡献是运用极值组合中超图与子空间的联系，通过类比超图的 Turán 数，在某些参数下改进了 Grassmannian 覆盖码的上界，得到了如下定理。

定理 49：令 $|\mathcal{G}_q(n,k)| = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \prod_{i=0}^{k-1} \frac{q^n-q^i}{q^k-q^i}$ 表示 $\mathbb{F}_q^n$ 上的所有 k 维子空间的数目，于是我们有当 $\alpha \geq 2$ 以及 $\delta \leq (\alpha-1)k$ 时，有 $B_q(n,k,\delta;\alpha) \leq \frac{\alpha-1}{\begin{bmatrix} k \\ h \end{bmatrix}_q} \begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}_q$，其中 $h := \lfloor k - \frac{\delta-1}{\alpha-1} + \frac{\alpha-2}{\alpha-1} \rfloor$.

对于不同的 α 的值，我们利用具体的构造给出了 Grassmannian 覆盖码在某些参数下的下界，得到如下定理。

定理 50：

- 当 $k \geq 2$ 时，我们有 $B_2(n,k,k+1;3) \geq 2^{n-2k+1}$；
- 当 $k \geq 3\lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ 时，我们有 $B_2(n,k,k+\gamma;3) \geq 2^{\lfloor \frac{n-2k+1}{k+1} \rfloor \lfloor \frac{k}{\lceil \gamma/2 \rceil} \rfloor}$；
- 当 $k < 3\lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ 以及 $\gamma \leq k-1$ 时，我们有 $B_2(n,k,k+\gamma;3) \geq 2^{2\lfloor \frac{n-2k+1}{k+1} \rfloor}$；
- 特别地，$B_2(n,k,2k;3) \geq 2^{\lfloor \frac{n-k}{k} \rfloor}$；
- 对于 $q \geq 3$，我们有 $B_q(n,k,k+\gamma;3) \geq q^{\lfloor \frac{n-2k+1}{k+1} \rfloor \lfloor \frac{k}{\gamma} \rfloor}$；
- 对于一般的 α，当 $\alpha - 1 < \lfloor \frac{\lfloor n/k \rfloor}{\alpha} \rfloor$ 时，我们有 $B_q(n,k,(\alpha-1)k;\alpha) \geq q^{\lfloor \frac{\lfloor n/k \rfloor}{\alpha} \rfloor}$。

当 n 充分大的时候，我们利用概率方法得到下述定理。

定理 51：

- $B_q(n,k,\delta;\alpha) \geq \Omega(q^{(k-\frac{\delta-1}{\alpha-1})n})$；
- 若 $\gcd(\alpha-1,\delta-1)=1$，则有 $B_q(n,k,\delta;\alpha) = \Omega(q^{(k-\frac{\delta-1}{\alpha-1})n} n^{\frac{1}{\alpha-1}})$；
- 特别地，当 $k \mid n$ 时，我们有 $B_q(n,k,2k;3) \geq \lfloor \sqrt{\frac{q^n-1}{q^{2k}-1}} \rfloor$。

5.2 超图的诱导子图的 Turán 问题

一个 r 一致的超图 $\mathcal{H}$ 是由某个有限的点集中的 r 元子集构成的。我们通常记它的点集为 $V(\mathcal{H})$，边集为 $E(\mathcal{H})$。

定义 52：对一个点集为 $\{v_1,\ldots,v_p\}$ 以及边集为 $\{e_1,\ldots,e_q\}$ 的图 F 来说，如果一个超图 $\mathcal{H}$ 中存在不同的点 $\{w_1,\ldots,w_p\}\subseteq V(\mathcal{H})$ 以及不同的边 $\{f_1,\ldots,f_q\}\subseteq E(\mathcal{H})$，使得如果 $e_i=v_\alpha v_\beta$，就有 $\{w_\alpha,w_\beta\}\subseteq f_i$，那么称 $\mathcal{H}$ 包含一个 Berge F。点 $\{w_1,\ldots,w_p\}$ 称为 Berge F 的基点。

定义 53：对一个点集为 $\{v_1,\ldots,v_p\}$ 以及边集为 $\{e_1,\ldots,e_q\}$ 的图 F 来说，如果一个超图 $\mathcal{H}$ 中存在不同的点 $W:=\{w_1,\ldots,w_p\}\subseteq V(\mathcal{H})$ 以及不同的边 $\{f_1,\ldots,f_q\}\subseteq E(\mathcal{H})$，使得如果 $e_i=v_\alpha v_\beta$，就有 $\{w_\alpha,w_\beta\}=f_i\cap W$，那么称 $\mathcal{H}$ 包含一个 F 的迹(trace)。

令 $B(F)$ 和 $Tr(F)$ 分别表示所有与 Berge F 和 F 的迹同构的超图的集合。对于 $r\geq 2$，令 $ex_r(n,B(F))$ 和 $ex_r(n,Tr(F))$ 分别表示 n 个点的 r 一致的不含 Berge F 和 F 的迹的超图的最大的边数。注意到 $Tr(F)\subseteq B(F)$，所以有

$$ex_r(n,B(F))\leq ex_r(n,Tr(F)).$$

在 [47] 中，Mubayi 和 Zhao 确定了当 $s\in\{3,4\}$ 时，对于所有 r 的 $ex_r(n,Tr(K_s))$ 的渐近值，并猜测对于 $s\geq 5$，$ex_r(n,Tr(K_s))\sim\left(\frac{n}{s-1}\right)^{s-1}$。后来，Sali 和 Spiro[48] 确定了当 $s\geq 2r-1$ 且 $t\geq(s-1)!+1$ 时 $ex_r(n,Tr(K_{s,t}))$ 的阶。最近，Füredi 和 Luo[28] 通过 F 的广义 Turán 数确定了 $ex_r(n,Tr(F))$ 的数量级。特别地，他们证明了

$$ex_r(n,Tr(F))=\Theta\left(\max_{2\leq s\leq r} ex(n,K_s,F)\right),$$

其中 $ex(n,K_s,F)$ 表示所有 n 个顶点的不包含 F 的图中最多包含的 K_s 的数目。当 F 是外平面图（外平面图是指能将 F 画在平面上时，没有边交叉，且所有的顶点都在同一个面上的图）时，他们给出了下面的定理。

定理 54：[28] 如果 F 是 m 个顶点的外平面图，则有

$$ex(n-r+2,F)\leq ex_r(n,Tr(F))\leq\frac{1}{2}r^r(m-2)^{(r-2)}ex(n,F).$$

在[28] 中，Füredi 和 Luo 还探讨了当 F 是一个星型（star）的情况，给出了对应的上下界。之后，Luo 和 Spiro[45] 给出了当 $t \geq 14$ 时的 $ex_3(n, Tr(K_{2,t}))$ 的上界。

我们对此问题的贡献是运用组合设计的结构，我们改进了 $ex_r(n, Tr(K_{1,t}))$ 的下界。我们先给出集合上覆盖（covering）的定义。

定义 55：令 $v \geq k \geq t$，令 X 是 v 个元素（点）的集合。一个 t-(v,k,λ) 覆盖是 X 的一些 k 元子集（区组）的集合，记作 $\mathcal{B}$，使得每个 X 的 t 元子集至少被 $\mathcal{B}$ 中的 λ 个区组包含。一个覆盖的大小即为 $\mathcal{B}$ 的大小。

这样，我们就能改进[28] 中 $ex_r(n, Tr(K_{1,t}))$ 的下界。

定理 56：对任意的 $r \geq 2$，$t \geq 3$，如果 $n = a(r+t-1)+b$，其中 $b \leq r+t-2$，令 C 是 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的一个最小的 $(r-1)$-$(r+t-1, r, 1)$ 覆盖，大小为 c，则

$$a\left(\binom{r+t-1}{r} - c\right) + \binom{b}{r} \leq ex_r(n, Tr(K_{1,t})).$$

同时，我们找到了若干无穷类使得该下界与上界完全匹配。

定理 57：当 $r = 3$ 时，下述成立。

- 若 $t+2 \equiv 0 \mod 6$ 以及 $t+2 \mid n$，则 $ex_3(n, Tr(K_{1,t})) = \frac{n}{t+2}\left(\binom{t+2}{3} - \frac{(t+2)^2}{6}\right)$；
- 若 $t+2 \equiv 1$ 或 $3 \mod 6$ 以及 $t+2 \mid n$，则

$$ex_3(n, Tr(K_{1,t})) = \frac{n}{t+2}\left(\binom{t+2}{3} - \frac{(t+2)(t+1)}{6}\right).$$

当 $r = 2k$ 以及 $2k(k+1) \mid n$ 时，我们有 $ex_r(n, Tr(K_{1,3})) = \frac{n(k+1)}{2}$。

另外，我们还改进了当 t 比较小的时候的 $ex_3(n, Tr(K_{2,t}))$ 的上界。

定理 58：令 $t \geq 3$ 为正整数，我们有 $ex_3(n, Tr(K_{2,t})) \leq \left(\frac{\sqrt{3(3t-1)(t-1)}}{3} + \frac{\sqrt{t-1}}{2}\right) n^{3/2} + o(n^{3/2})$。

5.3 偶圈在二部图中的饱和数问题

图的饱和数是一个与 Turán 数关系十分密切的一个值。如果一个图 G 不包含 H，但是任意增加一条边后会产生 H，那么我们称 G 是 H-饱和的。所有 n 个点的 H-饱和的图中最小的边数称为 H 在 K_n 中的饱和数，记为 $sat(K_n, H)$。上面可以将 G 看成是 K_n 的子图，那么我们可以将 G 限制为二部图 $K_{n,m}$ 的子图，类似地，我们记 H 在 $K_{n,m}$ 中的饱和数为 $sat(K_{n,m}, H)$。更多的饱和数的内容可以参考文献[24] 以及引用它的文献。在文献[24] 中，作者们提出了一个公开问题，即确定 $sat(K_{n,m}, C_{2t})$ 的值，其中 C_{2t} 表示 $2t$ 个点的圈。目前只有 $t = 2$ 的情况是已知的。

我们对此问题的贡献是确定了 $sat(K_{n,m}, C_6)$ 的确值，并给出了其它偶圈情况的上界。

定理 59：$sat(K_{n,m}, C_{2t}) \leq n+m+t^2-3t+1$。特别地，$sat(K_{n,m}, C_6) = n+m+1$。

6 总结与展望

极值组合在近几十年的发展十分迅速，产生了许多强大的工具以及深刻的理论。本论文主要研究了广义 Turán 型问题、图的子图问题以及极值组合在非自适应性组合群试上的应用，并对已有的工作有所推进。我们认为以下几个问题是值得继续深入研究的。

首先就是 Turán 问题，旨在确定 $ex(n,F)$，即 n 个点的不包含 F 的图的最大边数。著名的 Erdős-Stone-Simonovits 定理告诉我们 $ex(n,F)=(1-\frac{1}{\chi(F)-1}+o(1))\binom{n}{2}$，这在渐近意义上解决了 $\chi(F)\geq 3$ 的情况，但是对于 F 是二部图的情况，我们所知道的还是十分有限的，具体可以参考文献[29] 及其引文。因此，这将是之后 Turán 问题的研究重点。

其次是广义 Turán 问题，这是由 Alon 和 Shikhelman 在[4] 中首先系统研究的，旨在确定 $ex(n,H,F)$，即 n 个顶点的不包含 F 的图中最大的子图 H 的数目。我们在本论文中成功证明了 P_4 和 P_5 是 k-Turán 好图。最近，文献[40] 证明了 P_6 是 k-Turán 好图。因此，我们希望之后能思考出新的方法，对剩下的情况进行统一证明。

最后便是极值组合在其它领域中的应用。我们运用改进的概率方法，成功地提高了用于非自适应性组合群试的强可分矩阵码率的下界，但是与上界还是有着十分大的差距，我们希望之后能缩短上下界的距离。同时，如今疫情反复，我们也希望该理论能够用于实际，对疫情检测做出贡献。另外，现在也是互联网快速发展的时代，大数据的处理是一个挑战。子空间码在这方面将发挥重要的作用，我们希望后续在这方面能有更多的进展。

参 考 文 献

[1] R. Ahlswede, N. Cai, S.-Y. R. Li, and R. W. Yeung. Network information flow. IEEE Trans. Inform. Theory, 46(4):1204–1216, 2000.

[2] N. Alon, E. Fachini, and J. Körner. Locally thin set families. Combin. Probab. Comput., 9(6):481–488, 2000.

[3] N. Alon, J. Körner, and A. Monti. String quartets in binary. Combin. Probab. Comput., 9(5):381–390, 2000.

[4] N. Alon and C. Shikhelman. Many T copies in H-free graphs. J. Combin. Theory Ser. B, 121:146–172, 2016.

[5] B. Andrásfai, P. Erdős, and V. T. Sós. On the connection between chromatic number, maximal clique and minimal degree of a graph. Discrete Math., 8:205–218, 1974.

[6] L. Babai, M. Simonovits, and J. Spencer. Extremal subgraphs of random graphs. J. Graph Theory, 14(5):599–622, 1990.

[7] J. Balogh, P. Keevash, and B. Sudakov. On the minimal degree implying equality of the largest triangle-free and bipartite subgraphs. J. Combin. Theory Ser. B, 96(6):919–932, 2006.

[8] A. Bondy, J. Shen, S. Thomassé, and C. Thomassen. Density conditions for triangles in multipartite graphs. Combinatorica, 26(2):121–131, 2006.

[9] R. Chapman, editor. Surveys in combinatorics 2011, volume 392 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. Papers from the 23rd British Combinatorial Conference held at the University of Exeter, Exeter, July 3–8, 2011.

[10] D. Coppersmith and J. B. Shearer. New bounds for union-free families of sets. Electron. J. Combin., 5:Research Paper 39, 16, 1998.

[11] R. Dorfman. The detection of defective members of large populations. Ann. math. stat., 14(4):436–440, 1943.

[12] D.-Z. Du and F. K. Hwang. Combinatorial group testing and its applications, volume 12 of Series on Applied Mathematics. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, second edition, 2000.

[13] D.-Z. Du and F. K. Hwang. Pooling designs and nonadaptive group testing, volume 18 of Series on Applied Mathematics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006. Important tools for DNA sequencing.

[14] A. G. D'yachkov and V. V. Rykov. Bounds on the length of disjunctive codes. Problemy Peredachi Informatsii, 18(3):7–13, 1982.

[15] A. G. D'yachkov, V. V. Rykov, and A. M. Rashad. Superimposed distance codes. Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform., 18(4):237–250, 1989.

[16] P. Erdős. On the number of complete subgraphs contained in certain graphs. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 7:459–464, 1962.

[17] P. Erdős. On some problems in graph theory, combinatorial analysis and combinatorial number theory. In Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1983), pages 1–17. Academic Press, London, 1984.

[18] P. Erdős, P. Frankl, and Z. Füredi. Families of finite sets in which no set is covered by the union of two others. J. Combin. Theory Ser. A, 33(2):158–166, 1982.

[19] T. Etzion, S. Kurz, K. Otal, and F. Özbudak. Subspace packings: constructions and bounds. Des. Codes Cryptogr., 88(9):1781–1810, 2020.

[20] T. Etzion and H. Zhang. Grassmannian codes with new distance measures for network coding. IEEE Trans. Inform. Theory, 65(7):4131–4142, 2019.

[21] E. Fachini, J. Körner, and A. Monti. A better bound for locally thin set families. J. Combin. Theory Ser. A, 95(2):209–218, 2001.

[22] E. Fachini, J. Körner, and A. Monti. Self-similarity bounds for locally thin set families. Combin. Probab. Comput., 10(4):309–315, 2001.

[23] J. Fan, H.-L. Fu, Y. Gu, Y. Miao, and M. Shigeno. Strongly separable matrices for nonadaptive combinatorial group testing. Discrete Appl. Math., 291:180–187, 2021.

[24] J. R. Faudree, R. J. Faudree, and J. R. Schmitt. A survey of minimum saturated graphs. Electron. J. Combin., DS19(Dynamic Surveys):36, 2011.

[25] C. Fragouli and E. Soljanin. (Secure) linear network coding multicast: a theoretical minimum and some open problems. Des. Codes Cryptogr., 78(1):269–310, 2016.

[26] P. Frankl and Z. Füredi. Union-free hypergraphs and probability theory. European J. Combin., 5(4):395, 1984.

[27] Z. Füredi. 2-cancellative hypergraphs and codes. Combin. Probab. Comput., 21(1-2):159–177, 2012.

[28] Z. Füredi and R. Luo. Induced Turán problems and traces of hypergraphs. arXiv e-prints, page arXiv:2002.07350, Feb. 2020.

[29] Z. Füredi and M. Simonovits. The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems. In Erdös centennial, volume 25 of Bolyai Soc. Math. Stud., pages 169–264. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2013.

[30] D. Gerbner. Generalized Turán problems for small graphs. arXiv e-prints, page arXiv:2006.16150, June 2020.

[31] D. Gerbner. On Turán-good graphs. Discrete Math., 344(8):112445, 2021.

[32] D. Gerbner, E. Győri, A. Methuku, and M. Vizer. Generalized Turán problems for even cycles. J. Combin. Theory Ser. B, 145:169–213, 2020.

[33] D. Gerbner, A. Methuku, and M. Vizer. Generalized Turán problems for disjoint copies of graphs. Discrete Math., 342(11):3130–3141, 2019.

[34] D. Gerbner and C. Palmer. Counting copies of a fixed subgraph in F-free graphs. European J. Combin., 82:103001, 15, 2019.

[35] D. Gerbner and C. Palmer. Some exact results for generalized Turán problems. arXiv e-prints, page arXiv:2006.03756, June 2020.

[36] L. Gishboliner and A. Shapira. A generalized Turán problem and its applications. Int. Math. Res. Not. IMRN, (11):3417–3452, 2020.

[37] E. Győri, J. Pach, and M. Simonovits. On the maximal number of certain subgraphs in K_r-free graphs. Graphs Combin., 7(1):31–37, 1991.

[38] E. Győri, N. Salia, C. Tompkins, and O. Zamora. The maximum number of P_ℓ copies in P_k-free graphs. Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.), 88(3):773–778, 2019.

[39] R. Häggkvist. Odd cycles of specified length in nonbipartite graphs. In Graph theory (Cambridge, 1981), volume 62 of North-Holland Math. Stud., pages 89–99. North-Holland, Amsterdam-New York, 1982.

[40] D. Hei, X. Hou, and B. Liu. Some exact results of the generalized Turán numbers for paths. arXiv e-prints, page arXiv:2112.14895, Dec. 2021.

[41] G. P. Jin. Triangle-free graphs with high minimal degrees. Combin. Probab. Comput., 2(4):479–490, 1993.

[42] G. O. H. Katona. Extremal problems for hypergraphs. In Combinatorics (Proc. NATO Advanced Study Inst., Breukelen, 1974), Part 2: Graph theory; foundations, partitions and combinatorial geometry, pages 13–42. Math. Centre Tracts, No. 56, 1974.

[43] J. Körner and B. Sinaimeri. On cancellative set families. Combin. Probab. Comput., 16(5):767–773, 2007.

[44] R. Kötter and F. R. Kschischang. Coding for errors and erasures in random network coding. IEEE Trans. Inform. Theory, 54(8):3579–3591, 2008.

[45] R. Luo and S. Spiro. Forbidding $K_{2,t}$ traces in triple systems. Electron. J. Combin., 28(2):Paper No. 2.4, 15, 2021.

[46] J. Ma and Y. Qiu. Some sharp results on the generalized Turán numbers. European J. Combin., 84:103026, 16, 2020.

[47] D. Mubayi and Y. Zhao. Forbidding complete hypergraphs as traces. Graphs Combin., 23(6):667–679, 2007.

[48] A. Sali and S. Spiro. Forbidden families of minimal quadratic and cubic configurations. Electron. J. Combin., 24(2):Paper No. 2.48, 28, 2017.

[49] J. B. Shearer. A new construction for cancellative families of sets. Electron. J. Combin., 3(1):Research Paper 15, approx. 3, 1996.

[50] L. Tolhuizen. New rate pairs in the zero-error capacity region of the binary multiplying channel without feedback. IEEE Trans. Inform. Theory, 46(3):1043–1046, 2000.

[51] P. Turán. On an external problem in graph theory. Mat. Fiz. Lapok, 48:436–452, 1941.

[52] A. A. Zykov. On some properties of linear complexes. Mat. Sbornik N.S., 24(66):163–188, 1949.

作者简历

钱昺辰，男，1991 年，汉族，浙江湖州人。2010 年考入浙江大学数学科学学院（数学与应用数学专业），2014 年本科毕业，获得理学学士学位。2014 年进入浙江大学数学科学学院应用数学专业研究生学习至今，导师：葛根年。

1. 通信地址：中国浙江省杭州市浙江大学玉泉校区数学科学学院，310027.

2. 联系方式：(+86)18768117547，qianbingchen@zju.edu.cn

3. 研究兴趣：极值组合学，组合设计，编码理论.

4. 攻读学位期间发表的论文

- Bingchen Qian, Chengfei Xie, Gennian Ge. “On the minimal degree condition of graphs implying equality of the largest K_r-free subgraphs and $(r-1)$-partite subgraphs”, Discrete Mathematics, 344(8): 112453, 2021.
- Bingchen Qian, Chengfei Xie, Gennian Ge. “Some results on k-Turán-good graphs”, Discrete Mathematics, 344(9): 112509, 2021.
- Bingchen Qian, Xin Wang, Gennian Ge, “Improved Lower Bounds for Strongly Separable Matrices and Related Combinatorial Structures”, submitted.
- Xiangliang Kong, Yuanxiao Xi, Bingchen Qian, Gennian Ge, “Inverse problems of the Erdős-Ko-Rado type theorems for families of vector spaces and permutations”, Science China Mathematics, 2021, 64, https://doi.org/10.1007/s11425-020-1829-6.