分类号：O157.2　　　　　　　　单位代码：10335

密　级：　　　　　　　　　　　学　　号：10806073

浙江大学

博士学位论文

中文论文题目：常重码与常重复合码及其相关设计

英文论文题目：Constant-weight codes, constant-composition codes and related designs

申请人姓名：朱明志

指导教师：葛根年　教授

合作导师：

专业名称：应用数学

研究方向：组合设计与编码

所在学院：理学院数学系

论文提交日期：二〇一三年四月

常重码与常重复合码及其相关设计

论文作者签名：

指导教师签名：

论文评阅人 1：
评阅人 2：
评阅人 3：
评阅人 4：
评阅人 5：

答辩委员会主席：冯克勤\教授\清华大学
委员 1：冯克勤\教授\清华大学
委员 2：李松\教授\浙江大学
委员 3：武俊德\教授\浙江大学
委员 4：谈之奕\教授\浙江大学
委员 5：葛根年\教授\浙江大学

答辩日期：二〇一三年五月

致 谢

首先要感谢培养了我五年的导师——葛根年教授。在我来浙江大学直博的这五年里，葛老师无论是在科研还是生活上都给予了我很多的关心和指导。葛老师在组合设计及相关领域有着宽广的知识面、敏锐的洞察力和惊人的记忆力，在许多科研问题上他都及时向我指明了正确的道路，避免我在错误的研究方向上花费更多的时间。同时，葛老师更鼓励学生去开阔视野，将研究主题放到更广的方向上，不仅仅局限于组合设计理论领域，对培养学生自主研究的能力起到了很好的作用。而葛老师在科研和教学上严谨、认真的态度更是为我树立了榜样，这样一种态度比知识本身更令我敬佩。

另外我要感谢这五年中在学习和生活上给予过我指导的各位老师，特别是肯高迪亚大学的Clement Lam教授、德拉华大学的向青教授、福建师范大学的张胜元教授、浙江大学的冯涛研究员和范翠玲老师以及同济大学的杨亦挺老师等。在他们到浙江大学访问及教学期间，我从他们那里了解到了许多新课题和新方法，他们也在科研上给予了我悉心的指导。

我还必须要感谢曾经在一起学习、科研的各位师兄、师姐、师弟、师妹们，在这共同学习和生活的岁月里留下了许多美好的回忆。特别是张先得师姐、张会师姐和高斐同学，因为研究方向相似，在科研上更是给予了我许多帮助和指导。

此外，我要感谢我身边的朋友们，正是有了你们的陪伴，我的生活中才会总是充满欢笑和希望。每一次宝贵的回忆我都会永久珍藏。

最后，我要感谢我的父亲、母亲、祖母和女友，正是有了你们的关心和支持，我才能够顺利走完这五年的直博生涯。在我遇到困难时，你们总能给予我最及时的帮助和关怀。

摘 要

在编码理论中，常重码是一种带有检错和纠错能力的重要编码，其中所有的码字都有相同的Hamming重量。常重复合码是一类特殊的常重码，而置换码可视为一类特殊的常重复合码。常重复合码近来吸引了相当多的学者参与其研究，这主要是因为其广泛的应用背景，例如：离散无记忆信道中无错判决反馈容量的确定、多址方式的通信问题、球码调制、 DNA 编码、电力线通信、跳频序列、频率置换阵列以及频宽限制信道中的编码问题。

常重复合码问题的系统研究开始于二十世纪九十年代末。今天，许多方法都被用来确定常重复合码的最大码字个数问题。在 Svanström 等人的论文中，对于长度为n，极小Hamming距离为d且复合构型为$\overline{w}$的三元码的极大码字个数 $A_3(n,d,\overline{w})$提出了一些求上界及下界的方法。重量为3的最优三元常重复合码、重量为4且极小Hamming距离为5的最优三元常重复合码、重量为3的最优四元常重复合码以及重量为4且极小Hamming距离为7的最优四元常重复合码的码字个数问题都已先后被解决。本文第三章和第四章中将分别研究重量为 4 ，极小距离为 5 或 6 的最优四元常重复合码以及距离为6、复合构型为$[2,2]$的最优三元常重复合码的构造问题，并都得到了较为完整的存在性结果。

在第三章中，一些最优$(n,5,[2,1,1])_4$码可以由一个带有超单性质的n阶Room方得到。早在1850年， Kirkman 就给出了一个7阶Room方，并将其用来解决了著名的“15女生问题”。在后来的时间里，数学家们尝试了用代数、图论以及组合等方法来研究高阶Room方的存在性问题。在一个257阶的Room方被证明存在后，v阶Room方的存在性问题最终得到了完全解决。Room方与很多组合结构都有联系。例如，带有特殊性质的Room方曾被用来构造4-GDD。Room frame，可视为Room方的一种推广，曾被用来构造n阶几乎完全可分的有向k圈系和 4-frame。第三章中出现的超单Room方的存在性问题本身也是一个值得研究的问题。在第五章中，除了两个极小的阶数不能确定，这个问题得到了较好的解决。

早期，当许多无约束编码在信道通信纠错等方面有明显的应用时，常重码被

认为是仅有理论意义的编码。但在今天，人们发现常重码在越来越多的方面有重要应用。常重码在许多工程问题上被广泛应用，例如在光导纤维中的码分多址系统、无反馈冲突信道中的协议设计、自动重传请求中的错误控制系统、并行异步通信。另外，常重码还在球码和无偏直流约束码的设计中充当基础构件的角色。其更进一步的应用也已经扩展到跳频扩频系统、雷达和声纳的信号设计、移动无线电通信和信号同步。一种带有特殊性质的K-GDD被用来构造常重码。这种K-GDD被记为K-*GDD，其中任意两个相交区组中的点最多共享两个共同的组。在第六章中将主要考察4-*GDD(g^n)的存在性。在此之前，这类GDD存在性的必要条件被证明在下列情况下也是充分的：$g = 3$时，或者$g = 6$且n为素数幂、$n \equiv 3, 5, 7 \pmod 8$、$n \geq 19$时。在这一章中，将证明4-*GDD(6^n)存在的必要条件，$n \geq 14$，也是充分的。相应的最优四元$(n, 5, 4)$常重码的结果也将被扩展。

关键词： **常重码，常重复合码，四元码，Room方，Room frame，4-*GDD，超单性**

Abstract

In coding theory, a constant-weight code, is an error detection and correction code where all codewords share the same Hamming weight. Constant-composition codes are a special type of constant-weight codes which are important in coding theory. The class of constant-composition codes includes the important permutation codes and have attracted recent interest due to their numerous applications, such as in determining the zero error decision feedback capacity of discrete memoryless channels, multiple-access communications, spherical codes for modulation, DNA codes, powerline communications, frequency hopping, frequency permutation arrays, and coding for bandwidth-limited channels.

Systematic study began in late 1990's. Today, various methods have been applied to the problem of determining the maximum size of a constant-composition code. In the paper of Svanström et al. , some methods for providing upper and lower bounds on the maximum size $A_3(n, d, \overline{w})$ of a ternary code with length n, minimum Hamming distance d, and constant composition $\overline{w}$ were presented. The sizes of optimal ternary constant-composition codes with weight three， optimal ternary constant-composition codes with weight four and distance five， optimal quaternary constant-composition codes with weight three and optimal quaternary constant-composition codes with weight four and distance seven have been determined in recent years by different authors. In Chapters 3 and 4 of this dissertation, the problems of determining the sizes for optimal quaternary constant-composition codes with weight four, distances five or six and optimal ternary constant-composition codes with weight four, distance six and composition $[2, 2]$ are studied, and the problems are almost solved leaving one class and several other lengths undetermined.

In Chapter 3, an optimal $(n, 5, [2, 1, 1])_4$-code can be obtained from a Room square of side n with super-simple property. In 1850, Kirkman presented a Room square of side seven and used it to solve the well-known "15 Schoolgirls Problem". In the following years, mathematicians have tackled the problem algebraically, graph theoretically, as well as com-

binatorially. The solution to the existence problem of Room squares of side v was completed by the announcement of the existence of a Room square of side 257. Room squares are closely related to many other combinatorial objects. For examples, Room squares with additional properties have been used to construct 4-GDDs. Room frames, a generalization of Room squares, have been used to construct almost resolvable directed k-cycle systems of order n, and 4-frames. The problem for the existence of super-simple Room squares which are appeared in Chapter 3, is interesting itself. In Chapter 5, the problem is solved leaving only two minimal possible n undetermined.

While unrestricted codes have obvious applications in error correction, constant-weight codes have been historically regarded as a purely theoretical construction. Today, however, they are generally recognized as an important class of codes due to their numerous applications. They have been recently introduced in a number of engineering applications, including code-division multiple-access systems for optical fibers, protocol design for the collision channel without feedback, automatic-repeat-request error-control systems, and parallel asynchronous communications. In addition, they often serve as building blocks in the design of spherical codes and DC-free constrained codes. Further applications have been reported in frequency-hopping spread-spectrum systems, radar and sonar signal design, mobile radio, and synchronization. To construct constant-weight codes, K-GDDs with the "star" property, denoted by K-*GDDs, were introduced, in which any two intersecting blocks intersect in at most two common groups. In Chapter 6, the problem for the existence of 4-*GDD(g^n)s is considered. Previously, the necessary conditions for existence were shown to be sufficient for $g = 3$, and also sufficient for $g = 6$ with prime powers $n \equiv 3, 5, 7 \pmod 8$ and $n \geq 19$. In Chapter 6, the necessary condition for the existence of a 4-*GDD(6^n), namely, $n \geq 14$, is proved to be also sufficient. The known results on the existence of optimal quaternary $(n, 5, 4)$ CWCs are also extended.

Keywords: Constant-weight codes, constant-composition codes, quaternary codes, Room squares, Room frames, 4-*GDDs, super-simple

目 次

致谢 I
摘要 II
目次
1 绪论 1
1.1 背景介绍及研究现状 1
1.2 主要结果 5
2 背景知识 8
2.1 定义及记号 8
2.2 组合设计及编码 9
3 重量为4、距离为5或6的四元常重复合码 16
3.1 介绍 16
3.2 确定$A_4(n, 5, [2, 1, 1])$的值 17
3.3 确定$A_4(n, 6, [2, 1, 1])$的值 38
3.4 总结 61
4 距离为6、复合构型为$[2, 2]$的三元常重复合码 63
4.1 准备工作 63
4.2 长度$n \equiv 0, 1, 2, 5 \pmod 6$的情况 65
4.3 长度$n \equiv 3, 4 \pmod 6$的情况 74
4.4 总结 79
4.5 部分GDC的直接构造 80
5 超单Room方的存在性问题 84
5.1 介绍 84
5.2 与常重复合码的联系 84
5.3 准备工作 86
5.4 SSRS的存在性 86

5.5 总结 100
6 4-*GDD(6^n) 和相关的最优四元常重码 101
6.1 背景介绍 101
6.2 准备工作及Room frame构造 102
6.3 超单斜Room方 103
6.4 $14 \leq n \leq 307$时4-*GDD(6^n)的存在性 107
6.5 主要结果 115
6.6 总结 118
7 有待改进之处 131
7.1 常重复合码 131
7.2 超单Room方 131
参考文献 132
个人简介 141
攻读博士学位期间主要研究成果 142

表 目 录

3.1 大小为42的最优$(17,6,[2,1,1])_4$码的码字。 50
3.2 大小为80的最优$(23,6,[2,1,1])_4$码的码字。 50
3.3 大小为192的最优$(35,6,[2,1,1])_4$码的码字 51

4.1 引理 4.8 中码字长度较小的最优$(6t+1,6,[2,2])_3$码的基码字 68
4.2 引理 4.11 中组型为2^{3t+1}的$[2,2]$-GDC(6)的基码字 71
4.3 引理 4.14 中组型为$2^{3t}5^1$的$[2,2]$-GDC(6)的基码字 73
4.4 引理 4.17 中最优$(6t+4,6,[2,2])_3$码的基码字 75
4.5 引理 4.20中的参数 77
4.6 引理 4.21中的参数 78

6.1 引理6.18中SIP构造的参数 116

1 绪论

在这篇论文中，将主要研究常重码与常重复合码及其相关的组合设计。重点考察重量为4且距离为5或6的四元常重复合码、距离为6且复合构型为$[2,2]$的三元常重复合码、超单Room方和4-*GDD(6^n)等编码与组合设计的存在性问题。最终，对于以上每个问题都给出了较为完整的存在性结果。

1.1 背景介绍及研究现状

1.1.1 常重码

在编码理论中，常重码是一种带有检错和纠错能力的重要编码，其中所有的码字都有相同的Hamming重量。早期，当许多无约束编码在信道通信纠错等方面有明显应用时，常重码被认为是仅有理论意义的编码。但在今天，人们发现常重码在越来越多的方面有重要应用[1]。常重码在工程上被广泛应用，例如在光导纤维中的码分多址系统[2]、无反馈冲突信道中的协议设计[3]、自动重传请求中的错误控制系统[4]、并行异步通信[5]。另外，常重码还在球码[6]和无偏直流约束码[7,8]的设计中充当基础构件的角色。其更进一步的应用也已经扩展到跳频扩频系统、雷达和声纳的信号设计、移动无线电通信和信号同步[2,9,10]。对于常重码更一般的背景知识和相关的球码，推荐参考以下文献：[6,11,12]。

二元常重码已经被许多学者深入研究，研究的主题主要集中在确定$A_2(n,d,w)$的值，既长度为n、Hamming距离为d、码字重量为w的(n,d,w)码的最大可能码字个数。第一个系统记录$A_2(n,d,w)$的上下界的表格出现在MacWilliams和Sloane于1977年写的书中[12]，其中$n\leq 24$且$d\leq 10$。1978年，这些表格的更新版本及相关理论更完整的表述出现在[13]中。另一个更新版本可以在[14]中找到，其中还包含了$d=12$且$n\leq 27$时$A_2(n,d,w)$的上界的新表。文献[13]中的下界值在1980年被Graham和Sloane改进[15]。随后在1990年，Brouwer、Shearer、Sloane和Smith在[16]中总结了一系列特定参数码字构造的结果，给出了$n\leq 28$且$d\leq 18$时，

$A_2(n,d,w)$已知的最优下界。在2000年， Agrell 、 Vardy 和 Zeger 在[1] 中将$n \le 24$且$d \le 12$时，已有的$A_2(n,d,w)$的上界值做了许多改进，并将已有表的参数扩大到了$n \le 28$且$d \le 14$。五年后， Schrijver 利用 Terwilliger 代数和半正定规划的方法，成功地将$A_2(n,d,w)$的上界进行了改进[17] 。2010年， Chee 、 Xing 和 Yeo 利用一些递推规律，在[18] 中改进了网上已有的一些关于$A_2(n,d,w)$上下界的最新结果。同一年， Östergård 在[19] 中对一些特定参数的最优常重码进行了分类，并给出了一些参数的新结果。最近， Kang 、 Kim 和 Toan 在[20] 中利用 Delsarte 的线性规划界给出了一些二元常重码的新的上界。

非二元常重码虽然没有受到如同二元常重码那样广泛的关注，但由于其在带宽节省信道和DNA计算中寡核苷酸的序列设计等多方面的应用，目前在这个主题上也有许多文章，具体的研究大多集中在三元和四元的情况。结合文献[21] 中总结的多元常重码的研究结果，给出多元常重码如下的研究现状：

(i) $(n,d,w)_q$码一般构造的研究：[22–24] ；

(ii) 对于一般的d和w，$A_3(n,d,w)$的研究：[25–29]；

(iii) $A_q(n,3,3)$的研究：[10,23,30–38]；

(iv) $A_q(n,3,2)$和$A_q(n,4,3)$的研究：[22,39]；

(v) $A_q(n,2w-1,w)$的研究：[40]；

(vi) $A_3(n,3,4)$的研究：[23,41]；

(vii) $A_3(n,5,4)$的研究：[42–45]；

(viii) $A_3(n,6,4)$的研究：[46]；

(ix) $A_4(n,5,4)$的研究：[21,47–50]。

1.1.2 常重复合码

常重复合码是一类特殊的常重码，而置换码可视为一类特殊的常重复合码。常重复合码近来吸引了相当多的学者参与其研究，这主要是因为其广泛的应用背景，

诸如：离散无记忆信道中无错判决反馈容量的确定[51]、多址方式的通信问题[52]、球码调制[53]、DNA 编码[54–56]、电力线通信[57,58]、跳频序列[59]、频率置换阵列[60]以及频宽限制信道中的编码问题[61]。

该问题的系统研究开始于二十世纪九十年代末[29,62,63]。今天，许多方法都被用来确定常重复合码的最大码字个数问题，例如：计算机搜索[64]、填充设计[59,65–71]、锦标赛设计[72]、多项式及非线性函数[59,73–76]、三角差集[40]、PBD 闭集[77,78] 和其他诸多方法[79–82]。

在 Svanström 的论文[83] 中，对于长度为n、极小Hamming距离为d且复合构型为$\overline{w}$的三元码的极大码字个数 $A_3(n,d,\overline{w})$提出了一些求上界及下界的方法。重量为3的最优三元常重复合码的码字个数已经被 Chee、Ge 和 Ling 在[77] 中完全确定。重量为4、极小Hamming距离为5的最优三元常重复合码的码字个数也已经被Gao和Ge 在[84] 中完全确定。除了4个码字长度的最优码字个数未知，重量为3的最优四元常重复合码的码字个数已经被 Chee、Ge 和 Ling在[77] 中完全确定。最近，重量为4、极小Hamming距离为7的最优四元常重复合码的码字个数问题已经被Chee、Dau、Ling 和 Ling 在[40] 中解决。

1.1.3 Room方

在常重码和常重复合码的研究中，组合设计理论中的Room方发挥了重要作用。

T. G.Room 在1955年发表了一篇文章[85]，在其中他证明了3阶和5阶Room方不存在，并构造了一个7阶Room方，后来人们把这种方阵就称为Room方。而实际上，这种方阵的历史更加久远。早在1850年，Kirkman 就给出了一个7阶Room方，并将其用来解决了著名的“15女生问题”。在后来的时间里，数学家们尝试了用代数、图论以及组合等方法来研究高阶Room方的存在性问题。在一个257阶的Room方被证明存在后[86]，v阶Room方的存在性问题最终得到了完全解决。v阶Room方存在的充要条件为：v是正奇数且$v \neq 3$，$v \neq 5$。在[87] 中，Mullin 和 Wallis 给出了非3阶、5阶的正奇数阶Room方存在的一个简化证明。

定理 1.1 ([87]): 一个v阶Room方存在当且仅当v是奇数且$v \neq 3$，$v \neq 5$。

Room方与很多组合结构都有联系。例如，带有特殊性质的Room方曾被用来构造4-GDD[88]。Room frame，可视为Room方的一种推广，曾被用来构造n阶几乎完全可分的有向k圈系[89] 和 4-frame[90]。

1.1.4 4-*GDD(6^n)

Etzion在[23] 中证明，一个定义在 $\mathbb{Z}_{g+1}$ 上的最优 $(g+1)$ 元 (n,d,k) 常重码可以由一个组型为 g^n 的 k-GDD得到。记这个GDD为$(I_n \times I_g, \{\{i\} \times I_g : i \in I_n\}, \mathcal{B})$。其中$I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$，$d$是所得编码的距离。对于其中每个区组$\{(i_1, a_1), (i_2, a_2), \ldots, (i_k, a_k)\} \in \mathcal{B}$，对每个$1 \le j \le k$，将$a_j$放在第$i_j$位置，其他位置放0，这样可以得到一个长度为$n$的码字。如果一个组型为$g^n$的$k$-GDD所形成的所有码字构成的编码的距离为$2k-3$，则称之为一个广义Steiner系，记为GS$(2, k, n, g)$。

一个K-GDD被称为是带有“星”性质的，并记为K-*GDD，如果其任何两个相交区组的点至多共享两个公共组。当$K = \{3\}$时，一个3-*GDD(g^n)就是一个GS$(2, 3, n, g)$。记号K-*GDD首先在[31]中被引入。K-*GDD可以按照如下方法来构造GS$(2, k, n, g)$，因此也可以用来构造最优常重码。

引理 1.1 ([31]): 如果存在一个K-*GDD(g^n)，并且对任何$k \in K$都存在一个GS $(2, 3, k, h)$，则存在一个GS $(2, 3, n, gh)$。

引理 1.2 ([47]): 令m, h, s, w, g, t, u和a都是整数，使得$h = sg, n = sw, u \in \{0, 1\}$，$w \notin \{2, 6\}$，且$1 \le t \le w$成立。假设下列的设计存在:

(i) 一个4-*GDD(h^m)，其区组可被划分为t个集合$S_0, S_1, \ldots, S_{t-1}$，组可以被划分为$s$个大小为$g$的子组，使得对所有的$0 \le r \le t-1$，$S_r$相对于这些子组的极小距离都为5。

(ii) 一个GS$(2, 4, n+u, g)$。

则存在一个GS$(2, 4, mn+u, g)$。

下面所列出的4-*GDD(g^n)存在的必要条件已在[47] 里得到证明。

引理 1.3 ([47]): 4-*GDD(g^n)存在性的必要条件如下:

1. $n \geq 2g+2$;
2. $n \equiv 1, 4 \pmod{12}$, 如果$g \equiv 1, 5 \pmod 6$,

   $n \equiv 1 \pmod 3$, 如果$g \equiv 2, 4 \pmod 6$,

   $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, 如果$g \equiv 3 \pmod 6$.

当$g = 3$时，上述必要条件被证明也是充分的[47]。当$g = 6$，n是素数幂，且$n \equiv 3, 5, 7 \pmod 8$，$n \geq 19$时，上述必要条件同样被证明是充分的[49]。

1.2 主要结果

在第 2 章中，将主要介绍后文中所需的一些组合结构，包括：成对平衡设计（PBD）、可分组设计（GDD）、可分组编码（GDC）、Room方以及frame starter等。

在第 3 章中，将主要研究重量为4、距离为5或6的四元常重复合码的存在性问题。在研究中，主要利用了可分组编码和Room方构造等方法。在这一章中，这个问题得到了较好的解决，仅留下5个码字长度的最优码不能确定。而在此之前，四元常重复合码的存在性结果是很少的。最终得到的结论如下：

定理 1.2: 对于任意的$n \geq 4$,

$$A_4(n,5,[2,1,1]) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 4 \\ 2, & \text{如果} n = 5 \\ 6, & \text{如果} n = 6 \\ 10, & \text{如果} n = 7 \\ n\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, & \text{如果} n \geq 12 \text{ 并且} n \neq 13. \end{cases}$$

$$A_4(8,5,[2,1,1]) \geq 18,$$

$$A_4(9,5,[2,1,1]) \geq 27,$$

$$A_4(10,5,[2,1,1]) \geq 36,$$

$$A_4(11,5,[2,1,1]) \geq 48,$$

$$A_4(13,5,[2,1,1]) \geq 72.$$

定理 1.3：对于任意的$n \geq 4$，

$$A_4(n,6,[2,1,1]) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 4,5 \\ 4, & \text{如果} n = 7 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor, & \text{如果} n \geq 6 \text{ 并且} n \neq 7. \end{cases}$$

在第 4 章中，主要通过可分组编码和斜Room frame的方法，研究距离为6、复合构型为$[2,2]$的最优三元常重复合码的存在性问题。除了一类码长和其他类中少数的几个值外，这个问题得到了较好的解决。此前这类三元常重复合码的存在性结果是较少的。将主要的结果总结为如下定理：

定理 1.4：对于任何整数$n \geq 4$，令 $Q1 = \{7,8,13,14,16,22,76,88,94,124,142,166,184\}$， $Q2 = \{17,59,65,71,89\}$，

$$A_3(n,6,[2,2]) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 4,5 \\ 3, & \text{如果} n = 7 \\ 5, & \text{如果} n = 8 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor, & \text{如果} n \geq 6, n \not\equiv 5 \pmod 6\text{，且} n \notin Q1. \end{cases}$$

如果$n \geq 11, n \equiv 5 \pmod 6$ 且$n \notin Q2$,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor - 1 \leq A_3(n,6,[2,2]) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor.$$

在第 5 章中，主要研究与常重复合码相关的超单Room方的存在性问题。在这一章中，建立了超单Room方与一个大小为$n(n-1)/2$的最优超单$(n,5,[2,1,1])_4$码的等价关系。利用递归构造等方法，几乎完全确定了超单Room方的存在性问题。最终得到如下结果：

定理 1.5：一个n阶超单Room方存在的必要条件，$n \geq 15$，也是充分的，除了$n \in \{15,17\}$是可能的例外。

在第 6 章中，主要研究4-*GDD(6^n) 和相关的最优四元常重码。在证明过程中，提出了超单斜Room方的定义，并得到了一些关于超单斜Room方的存在性结果。利用超单斜Room方的结果和4-*GDD(6^n)的递归构造，最终得到如下结论：

定理 1.6：4-*GDD(6^n)存在的必要条件，$n \geq 14$，也是充分的。

并由此可以得到一些新的最优非线性四元常重码。

定理 1.7：如果$v \geq 14$，而$2n+1 \equiv 1 \pmod 4$是一个素数，且$2n+1 > 13$，则存在一个最优非线性四元$(w, 5, 4)$常重码，其中$w = 2vn+1$或$v(2n+1)$。

2 背景知识

2.1 定义及记号

整数集合 $\{i, i+1, \ldots, j\}$ 简记为$[i, j]$。环$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$简记为$\mathbb{Z}_q$。$\wr\cdot\int$ 表示多重集。

在本文中，如果没有明确说明是无限集，则所有的集合均为有限集。如果X和R是有限集，则R^X表示长度为$|X|$的向量的集合，其中每个向量$\mathsf{u} \in R^X$的每个分量的取值均在R中，该分量在向量中的位置由X中的元素作为索引。也就是说，对于每个$x \in X$，$\mathsf{u} = (\mathsf{u}_x)_{x \in X}$ 且$\mathsf{u}_x \in R$。一个长度为n的 q 元码是一个集合$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_q^X$，其中$X$是一个大小为$n$的集合。$\mathcal{C}$中的元素称为码字。定义一个向量$\mathsf{u} \in \mathbb{Z}_q^X$的Hamming范数（又称Hamming重量）为$\|\mathsf{u}\| = |\{x \in X : \mathsf{u}_x \neq 0\}|$。由这个范数导出的距离被称为Hamming距离，记为d_H，因此对于任意的两个向量$\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathbb{Z}_q^X$，有$d_H(\mathsf{u}, \mathsf{v}) = \|\mathsf{u} - \mathsf{v}\|$。一个向量$\mathsf{u} \in \mathbb{Z}_q^X$的复合构型是一个多元组$\overline{w} = [w_1, \ldots, w_{q-1}]$，其中，$w_j = |\{x \in X : \mathsf{u}_x = j\}|$。对于任意两个向量$\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathbb{Z}_q^X$，定义他们的支撑集为$\mathrm{supp}(\mathsf{u}, \mathsf{v}) = \{x \in X : \mathsf{u}_x \neq \mathsf{v}_x\}$。将$\mathrm{supp}(\mathsf{u}, 0)$记为$\mathrm{supp}(\mathsf{u})$，且称之为向量$\mathsf{u}$的支撑集。

在一个编码$\mathcal{C}$中，如果对于任何两个不同的码字$\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathcal{C}$，有$d_H(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \geq d$成立，则称编码$\mathcal{C}$的（极小）距离为$d$。如果对于任何一个码字$\mathsf{u} \in \mathcal{C}$都有$\|\mathsf{u}\| = w$，则称编码$\mathcal{C}$是常重的，且重量为$w$。

一个长度为n，距离为d，重量为w的q元常重码（CWC）被记为q元(n, d, w)常重码。一个q元 (n, d, w) 常重码中的码字个数被称为这个编码的大小。一个q元 (n, d, w) 常重码的最大可能大小记为$A_q(n, d, w)$，达到这个大小的q元(n, d, w)常重码被称为是最优的。

如果一个q元码$\mathcal{C}$中每一个码字的复合构型都是$\overline{w}$，则称$\mathcal{C}$是常重复合码（CCC），且复合构型为$\overline{w}$。一个长度为n，距离为d且常复合构型为$\overline{w}$的q元码记为一个$(n, d, \overline{w})_q$码。一个$(n, d, \overline{w})_q$码的极大码字个数被记为$A_q(n, d, \overline{w})$，而达到这

个码字个数的$(n,d,\overline{w})_q$码被称为是最优的。注意到下面的变换操作不会影响一个$(n,d,\overline{w})_q$码的距离和重量：

(i) 重新排列$\overline{w}$中的元素,

(ii) 删除$\overline{w}$中值为0的元素.

因此，后文中只考虑那些常复合构型为$\overline{w}=[w_1,\ldots,w_{q-1}]$的编码，其中$w_1\geq\cdots\geq w_{q-1}\geq 1$。

假设$\mathsf{u}\in\mathbb{Z}_q^X$是一个$(n,d,\overline{w})_q$码中的码字，其中$\overline{w}=[w_1,\ldots,w_{q-1}]$。令$w=\sum_{i=1}^{q-1}w_i$。则$\mathsf{u}$可以等价地表示为一个$w$元组$\langle a_1,a_2,\ldots,a_w\rangle\in X^w$，其中，

$$\begin{aligned}\mathsf{u}_{a_1}=\cdots=\mathsf{u}_{a_{w_1}}&=1,\\ \mathsf{u}_{a_{w_1+1}}=\cdots=\mathsf{u}_{a_{w_1+w_2}}&=2,\\ &\vdots\\ \mathsf{u}_{a_{\sum_{i=1}^{q-2}w_i+1}}=\cdots=\mathsf{u}_{a_w}&=q-1.\end{aligned}$$

例如一个长度为8且复合构型为$[2,1,1]$的码字(01021003)可表示为$<1,4,3,7>$，即1和4位置的元素为1，3位置的元素为2，7个位置的元素为3，其余位置的元素为0（以0位置作为起始位置）。在这个论文中，将使用这种形式来表示常重复合码中的码字。这样的表示具有更简洁、更灵活的特点。

2.2 组合设计及编码

本文中的递归构造是基于设计理论中的一些组合结构，在这一节中将对需要用到的组合结构做基本的介绍。其中最重要的工具是成对平衡设计（ PBD ），可分组设计（ GDD ），可分组编码（ GDC ），Room方和frame starter等。

2.2.1 成对平衡设计（PBD）

令K是正整数集的一个子集，λ是一个正整数。一个区组大小取值在集合K里的v阶成对平衡设计（PBD(v,K,λ) 或(K,λ)-PBD），是这样一个有限关联结构$(\mathcal{V},\mathcal{B})$，其中$\mathcal{V}$是一个大小为$v$的有限集合（称为点集），$\mathcal{B}$是由$\mathcal{V}$中子集（称

为区组）构成的一个集族，且满足：1、如果$B \in \mathcal{B}$，则$|B| \in K$；2、$\mathcal{V}$中任何两个不同元素组成的点对恰好出现在λ个区组中。λ被称为这个PBD的相遇数。当$\lambda = 1$时，则记为PBD(v, K) 或v阶K-PBD。如果$k \in K$上标记了星号（记为$k^\star$），则表示该PBD有且仅有一个区组大小为k。

引理 2.1 ([91]): 对于任意的整数$v \geq 7$且$v \notin \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 18, 19, 23\}$，存在一个$(v, \{4, 5, 6\}, 1)$-PBD。

引理 2.2 ([92]): 对于任意的整数$v \geq 10$且$v \notin [10, 20] \cup [22, 24] \cup [27, 29] \cup [32, 34]$，存在一个$(v, \{5, 6, 7, 8, 9\}, 1)$-PBD。

引理 2.3 ([91]): 对于任意的整数$v > 342$或者$v = 66$，存在一个$(v, \{7, 8, 9\}, 1)$-PBD。

引理 2.4 ([93]): 当$v > w$时，一个$(v, \{4, w^\star\}, 1)$-PBD存在，当且仅当$v \geq 3w + 1$，并且

(i) $v \equiv 1$ 或$4 \pmod{12}$ 而$w \equiv 1$ 或$4 \pmod{12}$; 或者

(ii) $v \equiv 7$ 或$10 \pmod{12}$ 而$w \equiv 7$ 或$10 \pmod{12}$。

2.2.2 可分组设计（GDD）

令K和G是正整数集合，λ是一个正整数。一个相遇数为λ的v阶可分组设计（(K, λ)-GDD）是这样一个三元组$(\mathcal{V}, \mathcal{G}, \mathcal{B})$，其中$\mathcal{V}$是一个大小为$v$的有限集，$\mathcal{G}$是$\mathcal{V}$的一个划分且其中每一个部分（称为组）的大小取值在$G$中，$\mathcal{B}$是由$\mathcal{V}$中子集（称为区组）构成的一个集族，且满足：1、如果$B \in \mathcal{B}$，则$|B| \in K$；2、$\mathcal{V}$中任何两个不同元素组成的点对要么恰好在λ个区组中出现，要么出现在一个组中；3、$|\mathcal{G}| > 1$。如果$v = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_s g_s$，且对所有的$i = 1, 2, \ldots, s$，均存在有$a_i$个大小为$g_i$的组，则称这个$(K, \lambda)$-GDD的组型为$g_1^{a_1} g_2^{a_2} \ldots g_s^{a_s}$。这是组型的指数记法。如果 $K = \{k\}$，则可将这个 (K, λ)-GDD记为(k, λ)-GDD。如果 $\lambda = 1$，则记为K-GDD。更进一步，一个$(k, 1)$-GDD简记为k-GDD。一个平行类或可划分类是指一系列可将这个设计的点集完全划分的区组集合。如果一个GDD的所有区组都

可以被划分到不同的平行类中，则称这个GDD是可划分的，一个可划分的GDD记为RGDD。

引理 2.5 ([94])：当$(g,u,m)\in\{(3,5,0),(4,6,7),(12,4,18),(12,5,18),(15,4,21)\}$时，存在组型为$g^u m^1$的4-GDD。

引理 2.6 ([94])：当$(g,u)\in\{(3,8),(4,7)\}$时，存在组型为g^u的4-RGDD。

引理 2.7 ([94])：存在一个组型为4^6的5-GDD。

一个组型为n^k的$\{k\}$-GDD也被称为一个横截设计，记为TD(k,n)。

引理 2.8 ([95])：令n为一个正整数，则：

(i) 当$n\notin\{2,3,6,10\}$时，存在一个TD$(5,n)$;

(ii) 当$n\notin\{2,3,4,6,10,14,18,22\}$时，存在一个TD$(6,n)$;

(iii) 当$n\notin\{2,3,4,5,6,10,14,15,18,20,22,26,30,34,38,46,60\}$时，存在一个TD$(7,n)$；

iv) 当$n\notin\{2,3,4,5,6,10,12,14,15,18,20,21,22,26,28,30,33,34,35,38,39,42,44,46,51,52,54,58,60,62,66,68,74\}$时，存在一个 TD$(8,n)$；

(v) 当q是一个素数幂时，存在一个TD$(q+1,q)$。

2.2.3 可分组编码（GDC）

给定$\mathsf{u}\in\mathbb{Z}_q^X$和$Y\subseteq X$，$\mathsf{u}$在$Y$上的限制（记为$\mathsf{u}\mid_Y$）是指一个向量$\mathsf{v}\in\mathbb{Z}_q^X$满足

$$\mathsf{v}_x=\begin{cases}\mathsf{u}_x, & \text{如果}x\in Y\\ 0, & \text{如果}x\in X\backslash Y.\end{cases}$$

一个距离为d的可分组编码（GDC）是一个三元组$(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$，其中$\mathcal{G}=\{G_1,\dots,G_t\}$是大小为$n$的集合$X$的一个划分，且$\mathcal{C}\subseteq\mathbb{Z}_q^X$是一个长度为$n$的$q$元码，使得对于任何两个不同的码字$u,v\in\mathcal{C}$，都有$d_H(u,v)\geq d$，且对于所有的$u\in\mathcal{C}$，

$1 \le i \le t$，都有$\|u|_{G_i}\| \le 1$。$\mathcal{G}$中的元素被称为组。如果$\mathcal{C}$是常重的，且重量为w，则将距离为d的GDC$(X, \mathcal{G}, \mathcal{C})$记为$w$-GDC$(d)$。如果$\mathcal{C}$是常复合构型的，则将此GDC记为$\overline{w}$-GDC$(d)$，其中每个码字$u \in \mathcal{C}$的复合构型均为$\overline{w}$。一个GDC$(X, \mathcal{G}, \mathcal{C})$的组型是指多重集$\wr |G| : G \in \mathcal{G} \wr$。如同在记GDD的组型时一样，也用指数记法来表示GDC的组型。一个GDC$(X, \mathcal{G}, \mathcal{C})$的大小（码字个数）记为$|\mathcal{C}|$。注意到一个大小为$s$的$(n, d, \overline{w})_q$码等同于一个大小为$s$、组型为$1^n$的$\overline{w}$-GDC$(d)$。

利用可分组编码，通过下面两个构造可以得到大阶数的常重复合码。

构造 2.1（（组填充构造）[77]）：令$d \le 2(w-1)$。假设存在一个大小为a、组型为$g_1^{t_1} \cdots g_s^{t_s}$的$w$-GDC$(d)$，$(X, \mathcal{G}, \mathcal{C})$。进一步假设对于每个$i$，$1 \le i \le s$，都存在一个大小为$b_i$的$(g_i, d, w)_q$码$\mathcal{C}_i$。则存在一个大小为$a + \sum_{i=1}^{s} t_i b_i$的$(\sum_{i=1}^{s} t_i g_i, d, w)_q$码$\mathcal{C}'$。特别的，如果$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{C}_i$，$1 \le i \le s$，均为常复合构型$\overline{w}$的，则$\mathcal{C}'$也是常复合构型$\overline{w}$的。

构造 2.2（（添加点构造）[77]）：令$y \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$。假设存在一个（主）编码w-GDC(d)，其组型为$g_1^{t_1} \cdots g_s^{t_s}$，大小为$a$，且下面的（部件）编码也都存在:

(i) 一个大小为b的$(g_1 + y, d, w)_q$码，

(ii) 对于任意的$2 \le i \le s$，都存在一个w-GDC(d)，且组型为$1^{g_i} y^1$，大小为c_i，

(iii) 当$t_1 \ge 2$时，存在一个w-GDC(d)，其组型为$1^{g_1} y^1$，大小为c_1。

则，存在一个$(y + \sum_{i=1}^{s} t_i g_i, d, w)_q$码，大小为

$$a + b + (t_1 - 1)c_1 + \sum_{i=2}^{s} t_i c_i.$$

如果主编码和部件编码都是常复合构型的，则得到的编码也是常复合构型的。

下面两个构造主要用于通过阶数较小的GDC得到阶数较大的GDC。

构造 2.3（（基本构造）[77]）：令$d \le 2(w-1)$, $\mathcal{D} = (X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$是（主）GDD，且$\omega : X \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 是一个赋权函数。假设对于每个$A \in \mathcal{A}$，都存在一个（部件）w-GDC(d)，其组型为$\wr \omega(a) : a \in A \wr$。则存在一个组型为$\wr \sum_{x \in G} \omega(x) : G \in \mathcal{G} \wr$的$w$-GDC$(d)$，记为$\mathcal{D}^*$。如果所有的部件GDC都有常复合构型$\overline{w}$，则$\mathcal{D}^*$也有常复合构型$\overline{w}$。

构造 2.4: 假设存在一个组型为$g_1^{t_1}\dots g_s^{t_s}$，大小为a的w-GDC(d)，和一个TD(w,m)。则存在一个组型为$(mg_1)^{t_1}\dots(mg_s)^{t_s}$，大小为$am^2$的$w$-GDC($d$)。如果初始的GDC有常复合构型$\overline{w}$，则得到的GDC同样有。

2.2.4 Room方和Room frame

令S是一个有n+1个元素（符号）的集合。一个（在符号集S上的）n阶Room方，RS(n)，是一个$n\times n$的阵列，F，其满足下面的性质：

1. F中的每一个位置要么是空的，要么包含由集合S中的不同元素组成的一个无序对；
2. S中的每个元素在F中每行和每列中均恰好出现一次；
3. 集合S中不同元素组成的无序对恰好在F中出现一次。

引理 2.9 ([87]): 一个n阶的Room方存在，当且仅当n是奇数，且$n\neq 3$ 或5。

对于一个n阶Room方, R, 其每个非空的位置可对应到一个四元集$\{i,j,r,c\}$，其中无序对$\{i,j\}$出现在R的第r行、第c列。如果一个n阶Room方中任何两个非空位置(r_1,c_1) 和(r_2,c_2) 分别包含无序对$\{i_1,j_1\}$ 和$\{i_2,j_2\}$ ，它们所对应的两个四元集$\{i_1,j_1,r_1,c_1\}$ 和$\{i_2,j_2,r_2,c_2\}$ 相交不超过两个元素，则称这个Room方是超单的（记为SSRS(n)）。

设$\{S_1,\dots,S_n\}$是集合S的一个划分，一个$\{S_1,\dots,S_n\}$-Room frame 是一个$|S|\times|S|$ 的阵列F，行列均由S中的元素作为标号，且满足下面的性质：

1. F中的每个位置要么是空的，要么包含由集合S中的不同元素组成的一个无序对；
2. 对每个$1\le i\le n$，子阵列$S_i\times S_i$中的位置都是空的，这些子阵列被称为洞；
3. 对于每个$s\in S_i$，每个元素$x\notin S_i$ 在行（列）s中出现一次；
4. 在F中出现的无序对$\{s,t\}$均来自$(S\times S)\setminus\cup_{i=1}^n(S_i\times S_i)$。

一个$\{S_1,\ldots,S_n\}$-Room frame，F，的型是$\{|S_1|,\ldots,|S_n|\}$。如果对于每个$1 \le j \le k$，F都有u_j个S_i的大小为t_j，则称F的型是$t_1^{u_1}\ldots t_k^{u_k}$。一个Room frame被称为是斜的，如果位置$(i,j)$非空可推出位置$(j,i)$是空的。一个$n$阶Room方等价于一个型为$1^n$的Room frame。

可以和定义超单Room方一样来定义超单Room frame。一个超单 $\{S_1,\ldots,S_n\}$-Room frame 将被记为$\{S_1,\ldots,S_n\}$-SSRF。

2.2.5 frame starter

令G是一个nh阶的加法阿贝尔群，H是一个h阶的子群，其中$nh-h$是偶数。$G\setminus H$中的一个型为h^n的frame starter（记为FS(h^n)）是一个由无序对组成的集合$S=\{\{x_i,y_i\}:1\le i\le (nh-h)/2\}$，使得下面两个性质成立：

(i) $\{x_i:1\le i\le (nh-h)/2\}\cup\{y_i:1\le i\le (nh-h)/2\}=G\setminus H$；

(ii) $\{\pm(x_i-y_i):1\le i\le (nh-h)/2\}=G\setminus H$。

G中的一个starter是在$G\setminus H$中的一个型为1^n的frame starter，且$H=\{0\}$。G中的一个斜starter是一个满足如下性质的starter，$S=\{\{s_i,t_i\}:1\le i\le (n-1)/2\}$，由$s_i+t_i=\pm(s_j+t_j)$可推出$i=j$，且对于任何$i$，都有$s_i+t_i\ne 0$。阿贝尔群$G$中的一个starter，$S=\{\{s_i,t_i\}\}$，如果在其中由$s_i+t_i=s_j+t_j$可推出$i=j$，且对任何$i$，$s_i+t_i\ne 0$，则称这个starter是强starter。令 $S=\{\{s_i,t_i\}:1\le i\le (g-1)/2\}$，$T=\{\{u_i,v_i\}:1\le i\le (g-1)/2\}$ 是G中的两个starter。不失一般性，可假设$s_i-t_i=u_i-v_i$对所有i成立。如果由$u_i-s_i=u_j-s_j$可推出$i=j$，且$u_i\ne s_i$对所有的i成立，则称S和T是正交starter。一个starter，$S=\{\{s_i,t_i\}:1\le i\le (g-1)/2\}$，的adder是一个由$G$中$(g-1)/2$个不同元素组成的有序集$A_S=\{a_1,a_2,\ldots,a_{(g-1)/2}\}$，且使得集合$T=\{\{s_i+a_i,t_i+a_i\}:1\le i\le (g-1)/2\}$同样形成$G$中的一个starter。这样得到的$T$与$S$是正交starter。

定理 2.1 ([96]): *如果在一个阶为n的群中存在两个相互正交的starter，则存在一个n阶Room方。如果那个n阶群是$\mathbb{Z}_n$，则得到的Room方是循环的。*

在$G \setminus H$中的一个型为h^n的frame starter，$S = \{\{s_i, t_i\} : 1 \le i \le (nh - h)/2\}$的adder是一个由$G$中$(nh - h)/2$个不同非零元素组成的有序集 $A_S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{(nh-h)/2}\}$，使得集合$T = \{\{s_i + a_i, t_i + a_i\} : 1 \le i \le (nh - h)/2\}$同样构成一个型为$h^n$ 的 frame starter 。如果对于任何i，j，都有$a_i \neq -a_j$成立，则这个adder，A，被称为是斜的。

引理 2.10 ([97]): 假设S是$G \setminus H$中的一个型为h^n的frame starter, 且A是其adder。则存在一个型为h^n的Room frame。更进一步，如果A是斜的，则得到的Room frame 也是斜的。

3 重量为4、距离为5或6的四元常重复合码

除了4个码字长度的最优码未知，重量为3的最优常重复合码的码字个数已经被Chee、 Ge 和 Ling基本确定[77]。可分组编码在他们构造码字的过程中扮演了重要的角色。在这一章中，研究的主要问题是通过可分组编码及 Room 方等手段，来构造 Hamming 重量为4，极小距离为5或6的最优四元常重复合码。在这一章中，这个问题得到了较好的解决，仅留下5个码字长度的最优码不能确定。而在此之前，四元常重复合码的存在性结果是很少的。

3.1 介绍

在 Svanström 的论文[83] 中，对于长度为n，极小Hamming距离为d且复合构型为$\overline{w}$的三元码的极大码字个数 $A_3(n,d,\overline{w})$提出了一些求上界及下界的方法。重量为3的最优三元常重复合码码字个数已经被 Chee 、 Ge 和 Ling 在[77] 中完全确定。重量为4、极小Hamming距离为5的最优三元常重复合码的码字个数也已经被Gao和Ge 在[84] 中完全确定。

除了4个码字长度的最优码字个数未知，重量为3的四元最优常重复合码的码字个数已经被 Chee、 Ge 和 Ling在[77] 中完全确定。最近，重量为4，极小Hamming距离为7的最优四元常重复合码的码字个数问题已经被 Chee 、 Dau 、 Ling 和 Ling 在[40] 中解决。

对于常重复合码，有如下一些上界：

引理 3.1 ([77]):

$$A_q(n,d,[w_1,\ldots,w_{q-1}]) =$$
$$\begin{cases} \binom{n}{\sum_{i=1}^{q-1} w_i}\binom{\sum_{i=1}^{q-1} w_i}{w_1,\ldots,w_{q-1}}, & \text{if } d \le 2 \\ \left\lfloor \frac{n}{\sum_{i=1}^{q-1} w_i} \right\rfloor, & \text{if } d = 2\sum_{i=1}^{q-1} w_i \\ 1, & \text{if } d \ge 2\sum_{i=1}^{q-1} w_i + 1. \end{cases}$$

下面的 Johnson 型的界也已被证明：

引理 3.2 ([83]):

$$A_q(n, d, [w_1, \ldots, w_{q-1}]) \le \frac{n}{w_1} A_q(n-1, d, [w_1 - 1, \ldots, w_{q-1}]).$$

更进一步，有如下一些结果：

引理 3.3 ([78]):

$$A_q(n, d, [w_1, \ldots, w_{q-1}]) \le$$
$$\begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{w_1} \left\lfloor \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{q-1} w_i - 1} \right\rfloor \right\rfloor & \text{if } d = 2\sum_{i=1}^{q-1} w_i - 3 \\ \left\lfloor \frac{n}{w_1} \left\lfloor \frac{n-1}{w_1 - 1} \right\rfloor \right\rfloor & \text{if } d = 2\sum_{i=1}^{q-1} w_i - 2. \end{cases}$$

推论 3.1:

$$A_4(n, 5, [2, 1, 1]) \le n \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

$$A_4(n, 6, [2, 1, 1]) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor.$$

证明. 将$w_1 = 1, w_2 = 2$及$w_3 = 1$代入引理 3.2 和引理 3.1，可得第一个等式。

将$w_1 = 2, w_2 = 1$及$w_3 = 1$代入引理 3.3 和引理 3.1 ，可得第二个等式。 □

在后文中，记$U(n, 5, [2, 1, 1]) = n \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$，$U(n, 6, [2, 1, 1]) = \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor$。

3.2 确定$A_4(n, 5, [2, 1, 1])$的值

3.2.1 Room方构造

定理 3.1: *对于一个奇数n，假设存在一个SSRS(n)，则存在一个最优 $(n, 5, [2, 1, 1])_4$码，其码字大小为$n(n-1)/2 = U(n, 5, [2, 1, 1])$。*

证明. 由这个SSRS(n)（记为R）的每一个非空位置(r, c)，都可以得到一个复合构型为$[2, 1, 1]$的码字$\langle i, j, r, c\rangle$，其中$\{i, j\}$出现在$R$的第$r$行、第$c$列。这样一共可以得到$n(n-1)/2$个码字。下面证明这$n(n-1)/2$个码字构成一个长度为$n$的最优编码。

因为R是超单的，所以任何两个码字不会在超过两个坐标处相交。如果某两个码字$\langle i_1, j_1, r_1, c_1\rangle$ 和$\langle i_2, j_2, r_2, c_2\rangle$ 之间的距离小于5，则必然至少会出现下列情况中的某一种：

1. $i_1 = i_2$ 且$j_1 = j_2$；

2. $i_1 = j_2$ 且$i_2 = j_1$；

3. $i_l = j_m$ 且$r_1 = r_2$ 其中$l, m \in \{1, 2\}$；

4. $i_l = j_m$ 且$c_1 = c_2$ 其中$l, m \in \{1, 2\}$；

5. $r_1 = r_2$ 且$c_1 = c_2$。

但是上面五种情况中的任何一种都与Room方的性质相矛盾。这就说明所得编码的任何两个码字的距离都大于或者等于5。因此，这样得到的码字就构成一个长度为n，大小为$n(n-1)/2 = U(n, 5, [2, 1, 1])$的最优编码。 □

定理 3.2: 如果存在一个型为2^t的超单Room frame，则存在一个最优$(2t, 5, [2, 1, 1])_4$码，其大小为$2t(t-1) = U(2t, 5, [2, 1, 1])$。

证明. 从这个超单Room frame，R，中的每个非空位置(r, c)，都可以得到一个复合构型为$[2, 1, 1]$的非空码字$\langle i, j, r, c\rangle$，其中$\{i, j\}$出现在$R$中的第$r$行、第$c$列。在$R$中一共有$2 \times 2t(t-1)/2 = 2t(t-1)$个非空位置，恰好等于$U(2t, 5, [2, 1, 1])$。因此总共得到$U(2t, 5, [2, 1, 1])$个这样的码字。剩下的证明和定理 3.1中的类似。 □

阿贝尔群G中的一个starter，$S = \{\{s_i, t_i\}\}$，如果其中由$s_i + t_i = s_j + t_j$成立可推出$i = j$，对任何i，$s_i + t_i \neq 0$成立，则称这个starter是强starter。称一个frame starter是强的，如果由$s_i + t_i = s_j + t_j$ 可推出$i = j$，且$s_i + t_i \notin H$ 对于所有的i 成立。令$A = \{\{s_i, t_i\}\}$，$B = \{\{u_i, v_i\}\}$是两个frame starter，假设$t_i - s_i = v_i - u_i$ 对于每个$1 \leq i \leq (g-t)/2$ 成立。如果由$u_i - s_i = u_j - s_j$可推出$i = j$，且$u_i - s_i \notin H$对所有的i 成立，则A和B称为是正交的frame starter。

引理 3.4 ([98]): 如果$A = \{\{s_i, t_i\}\}$是一个强frame starter，则A和$-A = \{\{-s_i, -t_i\}\}$是相互正交的frame starter。

引理 3.5 ([98]): 令$|G| = g$，$|H| = t$，如果在$G \setminus H$中存在一对相互正交的t-frame starter，则存在一个型为t^u的Room frame，其中$u = g/t$。

因此，如果在一个n阶群中，有一个可以得到SSRS(n)的强starter，则可以生成一个大小为$U(n,5,[2,1,1])$的最优$(n,5,[2,1,1])_4$码。类似的，如果在$G\setminus H$中，有一个可以得到型为$2^{g/2}$的超单Room frame的强frame starter，则可生成一个大小为$U(g,5,[2,1,1])$的最优$(g,5,[2,1,1])_4$码，其中$|G|=g$，$|H|=2$。

3.2.2 一些阶数较小的$[2,1,1]$-GDC(5)和距离为5的最优常重复合码

下面将通过计算机搜索的方法得到一些阶数较小的$[2,1,1]$-GDC(5)。这些构造基于利用不同的差来产生基区组（码字）的方法，而后将一个有限群（通常是$\mathbb{Z}_u$）作用于其上产生GDC或编码中的全部码字。因此，下文中将仅列出基码字和相应的有限群，而不会列出全部的码字。特别的，基码字的集合将被划分为两个部分P和R。P中的每一个码字将乘以m^i，i取遍所有的$0\le i\le s-1$，来生产s个码字。而R中包含了剩下的基码字。所需的编码由这些基码字$+M$ 模n得到。这样，下文仅列出每个编码所对应的n,m,s,M,P 和R。在某些时候，R可能为空，将被省略。

引理 3.6: *存在一个型为g^t，大小为$\frac{g^2t(t-1)}{2}$的$[2,1,1]$-GDC(5)，其中g和t的参数满足:*

1. $g=2, t\in\{8,9,11\}$;
2. $g=3, t\in\{7,9\}$;
3. $g=4, t\in\{5,6,7,8,9,11\}$;
4. $g=6, t\in\{5\}$。

证明. 对于每个给定的对子$\{g,t\}$，令$X_{\{g,t\}}=\mathbb{Z}_{gt}$，$\mathcal{G}_{\{g,t\}}=\{\{i,t+i,\ldots,(g-1)t+i\}:i\in\mathbb{Z}_t\}$，令$\mathcal{C}_{\{g,t\}}$分别是由下列基码字循环（或半循环）移位生成的。则$(X_{\{g,t\}},\mathcal{G}_{\{g,t\}},\mathcal{C}_{\{g,t\}})$ 是一个型为g^t，大小为$\frac{g^2t(t-1)}{2}$的$[2,1,1]$-GDC(5)。

1. $g=2,t=8,n=16,m=11,s=2,M=2$

$$\begin{array}{llllll}
P: & \langle 0,13,15,6\rangle \\
R: & \langle 1,11,0,13\rangle & \langle 0,1,4,14\rangle & \langle 0,11,9,15\rangle & \langle 0,6,2,1\rangle & \langle 0,3,7,10\rangle \\
 & \langle 0,2,13,7\rangle & \langle 1,5,2,11\rangle & \langle 0,7,14,12\rangle & \langle 0,5,1,3\rangle & \langle 0,9,3,4\rangle \\
 & \langle 0,12,6,9\rangle & \langle 1,3,12,2\rangle
\end{array}$$

2. $g = 2, t = 9, n = 18, m = 5, s = 2, M = 1$

$P:\ \langle 0,2,1,15\rangle$
$R:\ \langle 0,3,15,17\rangle\ \langle 0,11,14,1\rangle\ \langle 0,13,6,7\rangle\ \langle 0,12,4,10\rangle\ \langle 0,1,8,5\rangle$
$\langle 0,4,2,6\rangle$

3. $g = 2, t = 11, n = 22, m = 3, s = 5, M = 2$

$P:\ \langle 0,1,2,3\rangle\ \langle 0,2,7,4\rangle\ \langle 0,7,20,19\rangle\ \langle 1,3,5,8\rangle$

4. $g = 3, t = 7, n = 21, m = 5, s = 2, M = 1$

$P:\ \langle 0,13,16,18\rangle\ \langle 0,12,4,8\rangle$
$R:\ \langle 0,10,8,2\rangle\ \langle 0,17,1,12\rangle\ \langle 0,15,12,3\rangle\ \langle 0,1,10,11\rangle\ \langle 0,5,11,20\rangle$

5. $g = 3, t = 9, n = 27, m = 2, s = 3, M = 1$

$P:\ \langle 0,1,23,6\rangle\ \langle 0,8,12,7\rangle$
$R:\ \langle 0,14,15,17\rangle\ \langle 0,21,14,2\rangle\ \langle 0,17,3,11\rangle\ \langle 0,20,26,15\rangle\ \langle 0,15,25,19\rangle$
$\langle 0,3,5,16\rangle$.

6. $g = 4, t = 5, n = 20, m = 3, s = 2, M = 1$

$P:\ \langle 0,4,11,13\rangle\ \langle 0,6,4,2\rangle$
$R:\ \langle 0,9,6,3\rangle\ \langle 0,1,9,12\rangle\ \langle 0,3,2,1\rangle\ \langle 0,7,3,4\rangle$

7. $g = 4, t = 6, n = 24, m = 29, s = 2, M = 1$

$P:\ \langle 0,11,9,10\rangle\ \langle 0,10,23,21\rangle$
$R:\ \langle 0,15,16,8\rangle\ \langle 0,1,4,15\rangle\ \langle 0,20,7,16\rangle\ \langle 0,3,8,4\rangle\ \langle 0,5,20,3\rangle$
$\langle 0,8,10,13\rangle$

8. $g = 4, t = 7, n = 28, m = 3, s = 3, M = 1$

$P:\ \langle 0,8,5,4\rangle\ \langle 0,13,23,15\rangle\ \langle 0,27,3,25\rangle$
$R:\ \langle 0,2,22,11\rangle\ \langle 0,6,24,5\rangle\ \langle 0,10,26,13\rangle$

9. $g = 4, t = 8, n = 32, m = 5, s = 3, M = 1$

$P:\ \langle 0,3,14,21\rangle\ \langle 0,1,27,6\rangle$
$R:\ \langle 0,19,12,7\rangle\ \langle 0,4,1,19\rangle\ \langle 0,22,5,17\rangle\ \langle 0,14,31,28\rangle\ \langle 0,20,9,11\rangle$
$\langle 0,2,20,1\rangle\ \langle 0,6,28,10\rangle\ \langle 0,9,13,12\rangle$

10. $g = 4, t = 9, n = 36, m = 11, s = 2, M = 1$

$P:\ \langle 0,5,21,19\rangle\ \langle 0,32,30,7\rangle\ \langle 0,13,33,2\rangle\ \langle 0,14,24,4\rangle$
$R:\ \langle 0,3,31,6\rangle\ \langle 0,34,35,30\rangle\ \langle 0,21,26,20\rangle\ \langle 0,24,13,16\rangle\ \langle 0,6,17,21\rangle$
$\langle 0,7,29,31\rangle\ \langle 0,11,19,12\rangle\ \langle 0,16,23,33\rangle$

11. $g=4, t=11, n=44, m=3, s=5, M=1$

$$P:\ \langle 0,1,2,4\rangle\ \ \langle 0,8,16,25\rangle\ \ \langle 0,18,41,14\rangle\ \ \langle 0,21,19,39\rangle$$

12. $g=6, t=5, n=30, m=13, s=2, M=1$

$$\begin{array}{llllll} P: & \langle 0,9,7,3\rangle & \langle 0,2,29,28\rangle & & & \\ R: & \langle 0,18,26,29\rangle & \langle 0,13,22,19\rangle & \langle 0,11,14,2\rangle & \langle 0,14,16,27\rangle & \langle 0,7,13,14\rangle \\ & \langle 0,22,11,23\rangle & \langle 0,29,23,17\rangle & \langle 0,6,18,22\rangle. & & \end{array}$$

□

引理 3.7: 存在一个型为4^t2^1，大小为$8t^2$ 的$[2,1,1]$-GDC(5)，其中$t\in\{5,6\}$。

证明. 对于任意的$t\in\{5,6\}$，令$X_t=\mathbb{Z}_{4t}\cup\{a,b\}$，$\mathcal{G}_t=\{\{i,t+i,2t+i,3t+i\}:i\in\mathbb{Z}_t\}\cup\{\{a,b\}\}$，$\mathcal{C}_t$是分别是由下列基码字半循环移位生成的，其中元素$a,b$在自同构群作用下保持不变。

1. $t=5, m=3, s=2, M=2$

$$\begin{array}{llllll} P: & \langle 1,19,13,7\rangle & \langle 1,5,8,14\rangle & \langle 0,4,1,7\rangle & \langle 0,2,14,8\rangle & \\ R: & \langle 0,17,a,11\rangle & \langle 1,12,5,4\rangle & \langle 0,19,7,16\rangle & \langle 1,18,7,a\rangle & \langle 1,14,0,b\rangle \\ & \langle 1,8,b,2\rangle & \langle b,0,8,19\rangle & \langle 0,1,18,17\rangle & \langle b,1,19,12\rangle & \langle a,0,19,2\rangle \\ & \langle a,1,12,13\rangle & \langle 0,11,4,13\rangle & & & \end{array}$$

2. $t=6, m=5, s=2, M=2$

$$\begin{array}{llllll} P: & \langle 0,23,10,14\rangle & \langle 0,13,8,11\rangle & \langle 0,22,7,15\rangle & \langle 0,5,15,10\rangle & \\ R: & \langle 0,7,4,23\rangle & \langle a,0,20,21\rangle & \langle 0,20,1,4\rangle & \langle 1,23,14,3\rangle & \langle 1,14,9,10\rangle \\ & \langle b,0,23,19\rangle & \langle 1,22,15,b\rangle & \langle 0,8,22,9\rangle & \langle 1,10,23,a\rangle & \langle 1,11,4,21\rangle \\ & \langle b,1,10,0\rangle & \langle 0,21,b,5\rangle & \langle 0,9,a,16\rangle & \langle 1,5,6,22\rangle & \langle 1,17,21,12\rangle \\ & \langle a,1,17,14\rangle. & & & & \end{array}$$

□

引理 3.8: $A_4(n,5,[2,1,1])=U(n,5,[2,1,1])$对于所有的$n\in\{12,14,15,17,20,28,30,36,38,44,46,52,54,62,68,70,76,78,86,92,94,110,126,134\}$ 均成立。

证明. 对于引理中任意给定的n，令点集为$X=\mathbb{Z}_n$。则相应的编码分别由下列基码字循环移位生成的集合组成。

1. $n = 12, m = 1, s = 1, M = 1$

$$P: \quad \langle 0,1,3,9\rangle \quad \langle 0,2,7,5\rangle \quad \langle 0,3,11,7\rangle \quad \langle 0,4,10,2\rangle \quad \langle 0,5,9,11\rangle$$

2. $n = 14, m = 9, s = 3, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \langle 0,1,2,10\rangle \\ R: & \langle 0,4,10,7\rangle \quad \langle 0,6,13,5\rangle \quad \langle 0,2,5,4\rangle \end{array}$$

3. $n = 15, m = 1, s = 1, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,12,9\rangle \quad \langle 0,3,9,13\rangle \quad \langle 0,4,7,6\rangle \quad \langle 0,5,13,1\rangle \\ & \langle 0,6,5,14\rangle \quad \langle 0,7,11,12\rangle \end{array}$$

4. $n = 17, m = 2, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \langle 0,1,7,6\rangle \\ R: & \langle 0,6,2,9\rangle \quad \langle 0,8,11,15\rangle \quad \langle 0,3,1,2\rangle \quad \langle 0,10,9,4\rangle \quad \langle 0,4,8,1\rangle \\ & \langle 0,5,10,13\rangle \end{array}$$

5. $n = 20, m = 3, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \langle 0,18,9,16\rangle \quad \langle 0,4,12,17\rangle \quad \langle 0,3,5,4\rangle \\ R: & \langle 0,7,10,2\rangle \quad \langle 0,1,18,7\rangle \quad \langle 0,5,19,10\rangle \end{array}$$

6. $n = 28, m = 5, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,11,8\rangle \quad \langle 0,3,18,16\rangle \\ R: & \langle 0,21,24,19\rangle \quad \langle 0,16,20,21\rangle \quad \langle 0,4,26,18\rangle \quad \langle 0,6,14,23\rangle \quad \langle 0,20,13,27\rangle \\ & \langle 0,9,16,10\rangle \quad \langle 0,11,23,22\rangle \end{array}$$

7. $n = 30, m = 23, s = 3, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,11,14\rangle \\ R: & \langle 0,25,12,24\rangle \quad \langle 0,26,6,7\rangle \quad \langle 0,9,5,19\rangle \quad \langle 0,12,7,13\rangle \quad \langle 0,24,22,17\rangle \\ & \langle 0,13,3,21\rangle \quad \langle 0,27,15,25\rangle \quad \langle 0,10,24,15\rangle \end{array}$$

8. $n = 36, m = 31, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,5,9\rangle \quad \langle 0,3,13,14\rangle \quad \langle 0,4,27,23\rangle \quad \langle 0,11,15,8\rangle \\ R: & \langle 0,22,18,10\rangle \quad \langle 0,9,34,31\rangle \quad \langle 0,23,35,12\rangle \quad \langle 0,29,17,28\rangle \quad \langle 0,8,28,6\rangle \\ & \langle 0,6,14,26\rangle \quad \langle 0,12,6,30\rangle \end{array}$$

9. $n = 38, m = 13, s = 4, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \langle 0,32,26,21\rangle \quad \langle 0,30,5,14\rangle \quad \langle 0,7,37,13\rangle \\ R: & \langle 0,14,15,11\rangle \quad \langle 0,21,35,29\rangle \quad \langle 0,29,2,33\rangle \quad \langle 0,37,28,18\rangle \quad \langle 0,25,20,37\rangle \\ & \langle 0,3,22,28\rangle \end{array}$$

10. $n = 44, m = 5, s = 4, M = 1$

$P: \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,14,7\rangle \quad \langle 0,3,24,21\rangle$
$R: \langle 0,24,33,32\rangle \quad \langle 0,36,39,28\rangle \quad \langle 0,27,23,40\rangle \quad \langle 0,16,35,14\rangle \quad \langle 0,33,7,11\rangle$
$\langle 0,18,38,1\rangle \quad \langle 0,4,15,34\rangle \quad \langle 0,9,22,33\rangle \quad \langle 0,12,43,38\rangle$

11. $n = 46, m = 7, s = 4, M = 1$

$P: \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,12,20\rangle \quad \langle 0,5,32,29\rangle$
$R: \langle 0,30,41,31\rangle \quad \langle 0,17,34,16\rangle \quad \langle 0,8,16,43\rangle \quad \langle 0,26,13,33\rangle \quad \langle 0,19,44,13\rangle$
$\langle 0,22,45,15\rangle \quad \langle 0,34,31,25\rangle \quad \langle 0,9,18,36\rangle \quad \langle 0,36,29,22\rangle \quad \langle 0,18,37,23\rangle$

12. $n = 52, m = 7, s = 5, M = 1$

$P: \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,5,24\rangle \quad \langle 0,4,20,5\rangle$
$R: \langle 0,44,30,2\rangle \quad \langle 0,13,19,26\rangle \quad \langle 0,25,12,44\rangle \quad \langle 0,17,32,11\rangle \quad \langle 0,37,11,15\rangle$
$\langle 0,22,47,17\rangle \quad \langle 0,5,34,39\rangle \quad \langle 0,41,22,18\rangle \quad \langle 0,19,17,33\rangle \quad \langle 0,23,13,48\rangle$

13. $n = 54, m = 29, s = 4, M = 1$

$P: \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,5,12\rangle \quad \langle 0,5,11,1\rangle \quad \langle 0,10,32,53\rangle$
$R: \langle 0,45,43,6\rangle \quad \langle 0,12,53,30\rangle \quad \langle 0,32,23,34\rangle \quad \langle 0,51,18,11\rangle \quad \langle 0,36,28,27\rangle$
$\langle 0,24,50,41\rangle \quad \langle 0,48,19,7\rangle \quad \langle 0,11,38,9\rangle \quad \langle 0,33,42,28\rangle \quad \langle 0,15,30,36\rangle$

14. $n = 62, m = 7, s = 7, M = 1$

$P: \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,17,42\rangle \quad \langle 0,3,59,51\rangle$
$R: \langle 0,22,46,39\rangle \quad \langle 0,32,22,61\rangle \quad \langle 0,46,44,59\rangle \quad \langle 0,42,11,5\rangle \quad \langle 0,38,34,31\rangle$
$\langle 0,53,9,41\rangle \quad \langle 0,18,48,53\rangle \quad \langle 0,6,12,33\rangle \quad \langle 0,50,42,45\rangle$

15. $n = 68, m = 7, s = 7, M = 1$

$P: \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,5,64,19\rangle \quad \langle 0,2,29,66\rangle$
$R: \langle 0,58,62,51\rangle \quad \langle 0,40,10,25\rangle \quad \langle 0,4,58,17\rangle \quad \langle 0,60,28,41\rangle \quad \langle 0,24,50,1\rangle$
$\langle 0,51,34,20\rangle \quad \langle 0,16,33,15\rangle \quad \langle 0,12,60,43\rangle \quad \langle 0,20,66,7\rangle \quad \langle 0,25,20,48\rangle$
$\langle 0,29,45,39\rangle \quad \langle 0,36,12,2\rangle$

16. $n = 70, m = 13, s = 4, M = 1$

$P: \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,6,9\rangle \quad \langle 0,3,12,16\rangle \quad \langle 0,4,3,22\rangle \quad \langle 0,6,37,64\rangle$
$R: \langle 0,56,18,61\rangle \quad \langle 0,61,36,28\rangle \quad \langle 0,51,5,23\rangle \quad \langle 0,50,10,25\rangle \quad \langle 0,60,50,31\rangle$
$\langle 0,45,66,40\rangle \quad \langle 0,40,35,59\rangle \quad \langle 0,63,55,53\rangle \quad \langle 0,49,42,35\rangle \quad \langle 0,65,15,50\rangle$
$\langle 0,15,64,14\rangle \quad \langle 0,33,40,30\rangle \quad \langle 0,28,56,43\rangle \quad \langle 0,47,25,57\rangle$

17. $n = 76, m = 25, s = 7, M = 1$

$P: \langle 0,1,2,4\rangle \quad \langle 0,2,6,7\rangle \quad \langle 0,4,7,10\rangle \quad \langle 0,7,40,48\rangle$
$R: \langle 0,9,18,38\rangle \quad \langle 0,73,70,64\rangle \quad \langle 0,63,56,52\rangle \quad \langle 0,58,36,45\rangle \quad \langle 0,6,64,61\rangle$
$\langle 0,57,19,8\rangle \quad \langle 0,64,55,46\rangle \quad \langle 0,36,63,14\rangle \quad \langle 0,21,53,57\rangle$

18. $n = 78, m = 11, s = 5, M = 1$

$$\begin{array}{lccccc} P: & \langle 0,17,76,34\rangle & \langle 0,9,15,56\rangle & \langle 0,35,42,2\rangle & \langle 0,14,63,18\rangle & \langle 0,18,28,73\rangle \\ R: & \langle 0,32,5,75\rangle & \langle 0,13,29,9\rangle & \langle 0,40,26,66\rangle & \langle 0,41,60,30\rangle & \langle 0,30,44,3\rangle \\ & \langle 0,50,27,24\rangle & \langle 0,62,37,5\rangle & \langle 0,11,31,39\rangle & \langle 0,26,65,13\rangle & \langle 0,15,38,48\rangle \\ & \langle 0,44,52,50\rangle & \langle 0,4,17,40\rangle & \langle 0,58,2,15\rangle & & \end{array}$$

19. $n = 86, m = 9, s = 7, M = 1$

$$\begin{array}{lccccc} P: & \langle 0,3,15,25\rangle & \langle 0,1,2,37\rangle & \langle 0,6,16,11\rangle & \langle 0,2,5,74\rangle & \\ R: & \langle 0,72,70,68\rangle & \langle 0,28,51,77\rangle & \langle 0,57,85,27\rangle & \langle 0,63,29,6\rangle & \langle 0,52,35,51\rangle \\ & \langle 0,17,77,12\rangle & \langle 0,42,24,10\rangle & \langle 0,67,38,76\rangle & \langle 0,40,83,4\rangle & \langle 0,48,67,3\rangle \\ & \langle 0,7,72,15\rangle & \langle 0,35,79,20\rangle & \langle 0,16,46,59\rangle & \langle 0,65,59,83\rangle & \end{array}$$

20. $n = 92, m = 7, s = 11, M = 1$

$$\begin{array}{lccccc} P: & \langle 0,1,2,4\rangle & \langle 0,16,8,13\rangle & \langle 0,2,47,90\rangle & & \\ R: & \langle 0,21,90,51\rangle & \langle 0,47,38,9\rangle & \langle 0,35,46,69\rangle & \langle 0,75,62,6\rangle & \langle 0,33,74,14\rangle \\ & \langle 0,3,25,49\rangle & \langle 0,27,85,2\rangle & \langle 0,61,19,79\rangle & \langle 0,39,29,81\rangle & \langle 0,5,91,15\rangle \\ & \langle 0,37,23,63\rangle & \langle 0,23,66,1\rangle & & & \end{array}$$

21. $n = 94, m = 5, s = 11, M = 1$

$$\begin{array}{lccccc} P: & \langle 0,64,45,75\rangle & \langle 0,21,14,9\rangle & \langle 0,80,24,64\rangle & & \\ R: & \langle 0,31,66,67\rangle & \langle 0,23,78,26\rangle & \langle 0,88,15,23\rangle & \langle 0,89,67,81\rangle & \langle 0,61,64,47\rangle \\ & \langle 0,15,9,66\rangle & \langle 0,19,51,54\rangle & \langle 0,9,53,57\rangle & \langle 0,3,84,24\rangle & \langle 0,25,77,74\rangle \\ & \langle 0,45,92,77\rangle & \langle 0,37,48,15\rangle & \langle 0,1,30,53\rangle & & \end{array}$$

22. $n = 110, m = 57, s = 9, M = 1$

$$\begin{array}{lcccc} P: & \langle 0,38,25,2\rangle & \langle 0,17,1,85\rangle & \langle 0,14,26,13\rangle & \langle 0,69,10,59\rangle \\ R: & \langle 0,60,66,106\rangle & \langle 0,100,7,82\rangle & \langle 0,15,68,44\rangle & \langle 0,105,11,50\rangle \\ & \langle 0,25,83,103\rangle & \langle 0,20,33,97\rangle & \langle 0,65,32,48\rangle & \langle 0,22,44,11\rangle \\ & \langle 0,99,107,102\rangle & \langle 0,44,43,1\rangle & \langle 0,19,88,41\rangle & \langle 0,75,60,21\rangle \\ & \langle 0,18,99,79\rangle & \langle 0,80,4,27\rangle & \langle 0,74,36,108\rangle & \langle 0,33,64,66\rangle \\ & \langle 0,37,55,15\rangle & \langle 0,70,49,54\rangle & & \end{array}$$

23. $n = 126, m = 11, s = 6, M = 1$

$$\begin{array}{lcccc} P: & \langle 0,50,87,20\rangle & \langle 0,69,58,10\rangle & \langle 0,113,52,2\rangle & \langle 0,52,100,35\rangle \\ & \langle 0,96,41,11\rangle & \langle 0,106,78,44\rangle & \langle 0,103,110,75\rangle & \langle 0,37,57,68\rangle \\ R: & \langle 0,108,99,42\rangle & \langle 0,7,90,108\rangle & \langle 0,99,89,78\rangle & \langle 0,49,108,54\rangle \\ & \langle 0,98,18,125\rangle & \langle 0,35,54,90\rangle & \langle 0,70,72,115\rangle & \langle 0,14,50,117\rangle \\ & \langle 0,21,105,102\rangle & \langle 0,54,81,63\rangle & \langle 0,84,21,72\rangle & \langle 0,117,22,21\rangle \\ & \langle 0,81,97,99\rangle & \langle 0,90,9,84\rangle & & \end{array}$$

24. $n = 134, m = 117, s = 10, M = 1$

$$\begin{array}{lllll} P: & \langle 0,5,81,30\rangle & \langle 0,120,32,132\rangle & \langle 0,79,24,74\rangle & \langle 0,23,63,62\rangle \\ & \langle 0,72,25,9\rangle & & & \\ R: & \langle 0,87,74,101\rangle & \langle 0,112,84,75\rangle & \langle 0,56,61,67\rangle & \langle 0,118,75,20\rangle \\ & \langle 0,50,35,131\rangle & \langle 0,13,19,78\rangle & \langle 0,90,72,8\rangle & \langle 0,54,65,112\rangle \\ & \langle 0,114,94,68\rangle & \langle 0,106,80,23\rangle & \langle 0,4,109,90\rangle & \langle 0,15,82,50\rangle \\ & \langle 0,66,104,93\rangle & \langle 0,60,83,79\rangle & \langle 0,82,49,54\rangle & \langle 0,46,10,77\rangle. \end{array}$$

□

引理 3.9: $A_4(n,5,[2,1,1]) = U(n,5,[2,1,1])$，对每个$n \in \{19,21,23,24,25,26,27,29,31,32,33,34,35,37,39,40,41,42,43,45,47,48,49,50,51,53,55,56,57,58,59,61,63,64,65,66,67,69,71,73,74,75,77,79,83,85,87,88,89,93,95,99,103,104,106,107,109,111,123,125,127,131,133,138,139\}$都成立。

证明. 对应n是奇数或者偶数，相应的最优编码分别通过强starter或强frame starter构造得到。下列starter或frame starter的生成方式类似于上文中的基码字的。

1. $n = 19, m = 4, s = 9, M = 1$

$$P: \{1,3\}$$

2. $n = 21, m = 1, s = 1, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{3,19\},\{2,14\},\{6,13\},\{8,10\},\{15,16\},\{11,17\},\{5,9\},\{1,4\},\{7,18\}, \\ & \{12,20\} \end{array}$$

3. $n = 23, m = 2, s = 11, M = 1$

$$P: \{1,5\}$$

4. $n = 24, m = 5, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{1,10\},\{8,21\} \\ R: & \{3,7\},\{4,18\},\{6,11\},\{13,15\},\{14,22\},\{17,23\},\{19,20\} \end{array}$$

5. $n = 25, m = 2, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{1,8\},\{6,9\},\{7,15\},\{10,23\} \\ R: & \{3,24\},\{4,19\},\{11,13\},\{17,22\} \end{array}$$

6. $n=26, m=3, s=3, M=1$

$$P:\quad \{1,5\},\{2,10\},\{7,22\},\{8,25\}$$

7. $n=27, m=5, s=2, M=1$

$$\begin{aligned} P:&\quad \{13,17\},\{7,22\},\{6,14\} \\ R:&\quad \{1,10\},\{5,21\},\{9,12\},\{15,25\},\{18,23\},\{19,20\},\{24,26\} \end{aligned}$$

8. $n=29, m=7, s=7, M=1$

$$P:\quad \{1,3\},\{4,10\}$$

9. $n=31, m=7, s=15, M=1$

$$P:\quad \{1,3\}$$

10. $n=32, m=3, s=2, M=1$

$$\begin{aligned} P:&\quad \{13,18\},\{19,30\},\{3,31\},\{11,14\},\{8,27\},\{2,12\} \\ R:&\quad \{5,23\},\{15,21\},\{20,28\} \end{aligned}$$

11. $n=33, m=5, s=2, M=1$

$$\begin{aligned} P:&\quad \{1,15\},\{6,11\},\{16,29\},\{17,24\},\{7,31\},\{4,27\},\{25,28\} \\ R:&\quad \{10,32\},\{12,18\} \end{aligned}$$

12. $n=34, m=3, s=4, M=1$

$$P:\quad \{1,4\},\{13,18\},\{16,30\},\{21,33\}$$

13. $n=35, m=2, s=3, M=1$

$$\begin{aligned} P:&\quad \{1,3\},\{7,20\},\{22,25\},\{29,34\} \\ R:&\quad \{8,24\},\{13,27\},\{16,17\},\{19,26\},\{21,32\} \end{aligned}$$

14. $n=37, m=7, s=9, M=1$

$$P:\quad \{1,3\},\{2,5\}$$

15. $n = 39, m = 4, s = 3, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{11,34\},\{2,31\},\{21,27\},\{18,29\} \\ R: & \{1,4\},\{9,16\},\{10,12\},\{13,22\},\{14,26\},\{17,25\},\{23,36\} \end{array}$$

16. $n = 40, m = 3, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{1,18\},\{4,7\},\{9,36\},\{17,35\},\{22,24\},\{16,23\},\{31,39\},\{2,30\},\{33,38\} \\ R: & \{5,15\} \end{array}$$

17. $n = 41, m = 10, s = 5, M = 1$

$$P: \quad \{1,3\},\{2,5\},\{4,14\},\{11,35\}$$

18. $n = 42, m = 23, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{1,18\},\{5,38\},\{4,6\},\{22,27\},\{7,25\},\{9,41\},\{16,17\},\{20,28\} \\ R: & \{3,15\},\{10,24\},\{11,26\},\{30,37\} \end{array}$$

19. $n = 43, m = 9, s = 21, M = 1$

$$P: \quad \{1,3\}$$

20. $n = 45, m = 2, s = 3, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{13,23\},\{4,28\},\{18,31\},\{6,20\},\{21,44\} \\ R: & \{3,15\},\{5,32\},\{9,25\},\{10,19\},\{14,29\},\{30,38\},\{33,37\} \end{array}$$

21. $n = 47, m = 2, s = 23, M = 1$

$$P: \{1,5\}$$

22. $n = 48, m = 29, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{19,46\},\{39,43\},\{13,32\},\{14,21\},\{2,45\},\{15,29\},\{37,40\},\{11,28\}, \\ & \{5,35\} \\ R: & \{4,6\},\{12,20\},\{18,34\},\{26,36\},\{30,42\} \end{array}$$

23. $n = 49, m = 10, s = 11, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{1,3\} \\ R: & \{5,29\},\{27,46\},\{17,18\},\{42,45\},\{7,34\},\{21,33\},\{35,41\},\{23,37\}, \\ & \{25,36\},\{15,43\},\{19,26\},\{9,14\},\{28,38\} \end{array}$$

24. $n = 50, m = 7, s = 2, M = 1$

$$\begin{aligned} P: \quad & \{9,27\},\{6,36\},\{4,49\},\{12,46\},\{23,31\},\{38,45\},\{18,20\},\{1,14\}, \\ & \{19,41\},\{5,44\},\{3,32\},\{30,47\} \end{aligned}$$

25. $n = 51, m = 2, s = 3, M = 1$

$$\begin{aligned} P: \quad & \{7,23\},\{1,31\},\{27,47\},\{25,32\},\{9,10\},\{42,48\} \\ R: \quad & \{5,30\},\{8,44\},\{12,17\},\{16,24\},\{19,29\},\{21,38\},\{34,37\} \end{aligned}$$

26. $n = 53, m = 10, s = 13, M = 1$

$$P: \quad \{1,3\},\{4,14\}$$

27. $n = 55, m = 2, s = 7, M = 1$

$$\begin{aligned} P: \quad & \{1,3\},\{5,18\} \\ R: \quad & \{15,42\},\{49,54\},\{23,44\},\{28,38\},\{11,51\},\{31,53\},\{30,47\},\{14,33\}, \\ & \{29,43\},\{7,37\},\{19,39\},\{21,22\},\{35,46\} \end{aligned}$$

28. $n = 56, m = 3, s = 3, M = 1$

$$\begin{aligned} P: \quad & \{30,38\},\{11,44\},\{12,17\},\{39,40\},\{16,18\},\{1,53\} \\ R: \quad & \{7,21\},\{10,31\},\{13,35\},\{14,45\},\{19,26\},\{22,49\},\{23,42\},\{25,55\}, \\ & \{27,37\} \end{aligned}$$

29. $n = 57, m = 4, s = 4, M = 1$

$$\begin{aligned} P: \quad & \{13,30\},\{8,31\},\{11,53\},\{35,43\},\{3,7\} \\ R: \quad & \{2,22\},\{9,27\},\{15,45\},\{18,51\},\{19,25\},\{23,42\},\{33,54\},\{36,38\} \end{aligned}$$

30. $n = 58, m = 3, s = 7, M = 1$

$$P: \quad \{1,12\},\{17,30\},\{28,46\},\{41,57\}$$

31. $n = 59, m = 3, s = 29, M = 1$

$$P: \quad \{1,6\}$$

32. $n = 61, m = 12, s = 15, M = 1$

$$P: \quad \{1,3\},\{2,6\}$$

33. $n = 63, m = 11, s = 5, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{7,24\},\{15,38\},\{8,20\},\{32,61\} \\ R: & \{2,9\},\{16,42\},\{17,30\},\{18,43\},\{19,54\},\{21,45\},\{22,58\},\{27,48\}, \\ & \{35,53\},\{36,50\},\{46,55\} \end{array}$$

34. $n = 64, m = 11, s = 4, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{21,62\},\{3,17\},\{37,57\},\{5,44\},\{2,20\} \\ R: & \{1,10\},\{6,7\},\{8,15\},\{11,24\},\{13,48\},\{16,53\},\{18,58\},\{19,34\}, \\ & \{30,41\},\{40,56\},\{46,54\} \end{array}$$

35. $n = 65, m = 7, s = 4, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{30,33\},\{26,49\},\{48,58\},\{54,63\},\{43,50\} \\ R: & \{1,7\},\{2,10\},\{3,22\},\{5,6\},\{8,28\},\{14,42\},\{17,44\},\{21,34\}, \\ & \{23,35\},\{24,60\},\{31,56\},\{38,64\} \end{array}$$

36. $n = 66, m = 13, s = 5, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{3,23\},\{37,56\},\{7,58\},\{24,65\} \\ R: & \{6,18\},\{9,27\},\{10,12\},\{11,51\},\{14,20\},\{16,40\},\{21,55\},\{22,50\}, \\ & \{32,62\},\{36,44\},\{42,64\},\{52,63\} \end{array}$$

37. $n = 67, m = 4, s = 33, M = 1$

$$P: \ \{1,3\}$$

38. $n = 69, m = 2, s = 5, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{3,44\},\{10,54\},\{56,57\},\{30,67\},\{2,50\} \\ R: & \{1,23\},\{5,28\},\{13,64\},\{25,49\},\{26,29\},\{27,63\},\{35,46\},\{47,59\}, \\ & \{52,58\} \end{array}$$

39. $n = 71, m = 2, s = 35, M = 1$

$$P: \ \{1,7\}$$

40. $n = 73, m = 2, s = 9, M = 1$

$$P: \ \{1,3\},\{5,15\},\{9,33\},\{13,35\}$$

41. $n = 74, m = 3, s = 9, M = 1$

$$P: \ \{1,4\},\{13,56\},\{18,70\},\{61,73\}$$

42. $n = 75, m = 17, s = 7, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\quad \{1,3\},\{7,16\},\{24,43\} \\ R:&\quad \{25,65\},\{31,35\},\{14,45\},\{60,70\},\{23,71\},\{37,66\},\{9,69\},\{27,72\}, \\ &\quad \{13,20\},\{2,15\},\{11,29\},\{34,40\},\{10,53\},\{48,68\},\{50,55\},\{5,30\} \end{aligned}$$

43. $n = 77, m = 2, s = 5, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\quad \{9,32\},\{1,57\},\{28,47\},\{45,48\},\{40,49\} \\ R:&\quad \{5,31\},\{10,23\},\{11,43\},\{15,55\},\{20,54\},\{22,30\},\{29,62\},\{33,53\}, \\ &\quad \{39,61\},\{41,66\},\{44,60\},\{46,73\},\{58,69\} \end{aligned}$$

44. $n = 79, m = 2, s = 39, M = 1$

$$P:\quad \{1,3\}$$

45. $n = 83, m = 3, s = 41, M = 1$

$$P:\quad \{1,5\}$$

46. $n = 85, m = 22, s = 13, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\quad \{1,3\},\{2,6\} \\ R:&\quad \{34,60\},\{39,74\},\{37,68\},\{49,62\},\{45,50\},\{52,75\},\{15,26\},\{10,70\}, \\ &\quad \{17,80\},\{4,55\},\{30,40\},\{8,25\},\{13,58\},\{31,51\},\{5,20\},\{35,65\} \end{aligned}$$

47. $n = 87, m = 2, s = 11, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\quad \{57,74\},\{44,71\},\{14,69\} \\ R:&\quad \{7,22\},\{9,67\},\{11,24\},\{18,48\},\{29,79\},\{31,47\},\{36,62\},\{37,72\}, \\ &\quad \{49,85\},\{58,83\} \end{aligned}$$

48. $n = 88, m = 7, s = 5, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\quad \{9,67\},\{48,65\},\{23,30\},\{21,69\},\{79,84\},\{38,58\} \\ R:&\quad \{4,18\},\{5,16\},\{11,24\},\{12,22\},\{19,52\},\{20,86\},\{28,55\},\{32,50\}, \\ &\quad \{33,35\},\{40,78\},\{45,66\},\{51,80\},\{74,77\} \end{aligned}$$

49. $n = 89, m = 2, s = 11, M = 1$

$$P:\quad \{1,3\},\{5,15\},\{9,22\},\{19,65\}$$

50. $n = 93, m = 14, s = 12, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\quad \{35,80\},\{48,85\},\{23,66\} \\ R:&\quad \{3,77\},\{5,8\},\{18,26\},\{19,49\},\{30,81\},\{31,86\},\{39,70\},\{42,55\}, \\ &\quad \{46,50\},\{62,88\} \end{aligned}$$

51. $n = 95, m = 21, s = 7, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\ \{20,51\},\{39,63\},\{2,37\},\{81,94\},\{83,90\}\\ R:&\ \{3,9\},\{5,24\},\{6,38\},\{8,73\},\{10,67\},\{11,14\},\{13,29\},\{19,41\},\\ &\ \{25,76\},\{31,57\},\{47,62\},\{50,77\} \end{aligned}$$

52. $n = 99, m = 20, s = 8, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\ \{1,3\},\{2,17\},\{21,38\},\{34,41\}\\ R:&\ \{72,88\},\{6,30\},\{5,27\},\{7,83\},\{26,81\},\{35,44\},\{77,95\},\{22,33\},\\ &\ \{11,75\},\{15,36\},\{54,58\},\{9,63\},\{18,45\},\{71,90\},\{19,55\},\{25,91\},\\ &\ \{66,76\} \end{aligned}$$

53. $n = 103, m = 2, s = 51, M = 1$

$$P:\ \{1,3\}$$

54. $n = 104, m = 11, s = 6, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\ \{27,59\},\{12,56\},\{45,48\},\{31,50\},\{70,92\},\{2,47\}\\ R:&\ \{1,39\},\{6,35\},\{10,23\},\{11,13\},\{17,78\},\{19,93\},\{21,86\},\{26,83\},\\ &\ \{41,51\},\{65,91\},\{66,73\},\{75,102\},\{81,87\},\{82,97\},\{85,103\} \end{aligned}$$

55. $n = 106, m = 7, s = 13, M = 1$

$$P:\ \{1,3\},\{8,24\},\{82,103\},\{98,105\}$$

56. $n = 107, m = 3, s = 53, M = 1$

$$P:\ \{1,5\}$$

57. $n = 109, m = 2, s = 18, M = 1$

$$P:\ \{1,3\},\{50,106\},\{59,108\}$$

58. $n = 111, m = 7, s = 8, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\ \{2,95\},\{13,80\},\{4,86\},\{36,106\},\{15,70\},\{12,45\}\\ R:&\ \{10,18\},\{21,31\},\{32,77\},\{37,64\},\{44,81\},\{54,74\},\{59,97\} \end{aligned}$$

59. $n = 123, m = 5, s = 9, M = 1$

$$\begin{aligned} P:&\ \{76,113\},\{56,116\},\{26,114\},\{45,117\},\{2,6\},\{16,92\}\\ R:&\ \{5,121\},\{9,41\},\{25,75\},\{43,82\},\{48,89\},\{51,85\},\{67,79\} \end{aligned}$$

60. $n = 125, m = 2, s = 10, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{1,11\},\{10,67\},\{28,31\},\{29,111\},\{108,115\} \\ R: & \{14,48\},\{17,78\},\{24,100\},\{25,96\},\{34,59\},\{39,71\},\{47,119\}, \\ & \{50,77\},\{63,101\},\{75,92\},\{68,118\},\{94,113\} \end{array}$$

61. $n = 127, m = 9, s = 63, M = 1$

$$P: \quad \{1,3\}$$

62. $n = 131, m = 3, s = 65, M = 1$

$$P: \quad \{1,6\}$$

63. $n = 133, m = 11, s = 3, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{1,3\},\{17,30\},\{2,5\},\{89,124\},\{6,10\},\{7,8\},\{80,87\},\{24,69\}, \\ & \{56,95\},\{23,105\},\{28,45\},\{29,47\},\{46,98\},\{35,67\},\{58,128\}, \\ & \{40,59\},\{25,85\},\{16,36\},\{12,79\},\{19,50\},\{68,93\},\{15,31\} \end{array}$$

64. $n = 138, m = 19, s = 10, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: & \{1,3\},\{2,5\},\{4,12\},\{8,81\} \\ R: & \{37,78\},\{43,115\},\{77,131\},\{41,66\},\{47,124\},\{6,89\},\{13,59\}, \\ & \{34,87\},\{73,92\},\{18,48\},\{46,94\},\{31,91\},\{44,135\},\{70,121\}, \\ & \{83,84\},\{10,104\},\{65,88\},\{67,126\},\{35,53\},\{16,118\},\{22,28\}, \\ & \{23,127\},\{7,96\},\{17,52\},\{30,72\},\{113,130\},\{102,114\},\{109,133\} \end{array}$$

65. $n = 139, m = 4, s = 69, M = 1$

$$P: \quad \{1,3\}.$$

$\square$

3.2.3 长度$n \equiv 0 \pmod 4$的情况

引理 3.10: $A_4(4,5,[2,1,1]) = 1$，$A_4(8,5,[2,1,1]) \geq 18$。

证明. 对于$n = 4$，对应的1个码字为$\langle 0,1,2,3\rangle$。

对于$n = 8$，对应的18个码字为：

$$\begin{array}{llllll} \langle 3,7,5,2\rangle & \langle 2,5,1,7\rangle & \langle 1,3,6,7\rangle & \langle 2,3,4,1\rangle & \langle 0,5,4,2\rangle & \langle 6,7,2,1\rangle \\ \langle 0,6,1,4\rangle & \langle 5,6,7,3\rangle & \langle 3,4,0,5\rangle & \langle 0,3,2,6\rangle & \langle 4,5,6,1\rangle & \langle 4,7,1,3\rangle \\ \langle 0,7,6,5\rangle & \langle 4,6,3,2\rangle & \langle 2,7,0,4\rangle & \langle 0,1,5,3\rangle & \langle 1,4,2,0\rangle & \langle 2,6,5,0\rangle. \end{array}$$

$\square$

定理 3.3：对于所有的$t \geq 3$，均存在大小为$4t(2t-1)$的最优$(4t, 5, [2, 1, 1])_4$码。

证明. 对于每个$3 \leq t \leq 14$及$t \in \{16, 17, 19, 22, 23, 26\}$，由引理 3.6, 3.8 和3.9可知，均存在相应的最优$(4t, 5, [2, 1, 1])_4$码。

对于每个$u \in \{5, 6, 7, 9, 11\}$，存在一个组型为4^u的$[2, 1, 1]$-GDC(5)（见引理 3.6 ）。利用一个TD(4, 3)（见引理2.8），应用构造2.4可得到一个组型为12^u的$[2, 1, 1]$-GDC(5)。用最优$(12, 5, [2, 1, 1])_4$码（见引理3.8）填入上面GDC的组中，即可得到一个最优$(4t, 5, [2, 1, 1])_4$码，其中$t \in \{15, 18, 21, 27, 33\}$。

对于每个$u \in \{7, 8\}$，存在一个组型为4^u的$[2, 1, 1]$-GDC(5)（见引理 3.6 ）。利用一个TD(4, 4)（见引理2.8），应用构造2.4可得到一个组型为16^u的$[2, 1, 1]$-GDC(5)。用最优 $(16, 5, [2, 1, 1])_4$ 码（见引理3.6）填入上面GDC的组中，即可得到一个最优$(4t, 5, [2, 1, 1])_4$ 码，其中$t \in \{28, 32\}$。

对于$t = 31$的情况，取一个组型为3^8的4-RGDD（见引理 2.6），其中有7个平行类。在每个平行类外添加一个点，可得到一个组型为$3^8 7^1$的5-GDD。再应用构造2.3，对这个5-GDD的每个点赋权为4，并用长度为12和28的最优码填入组，可得到一个最优$(124, 5, [2, 1, 1])$码。这里所需的输入设计为一个组型为4^5的$[2, 1, 1]$-GDC(5)（见引理 3.6）。

对于每个$t \geq 34$及$t \in \{20, 24, 25, 29, 30\}$，取一个$(t+1, \{5, 6, 7, 8, 9\}, 1)$-PBD（见引理 2.2），删除其中一个点可得到一个组型为$4^i 5^j 6^k 7^l 8^m$的$\{5, 6, 7, 8, 9\}$-GDD，其中$4i + 5j + 6k + 7l + 8m = t$。应用构造 2.3，对这个GDD的每个点赋权为4。所需的输入设计为组型为4^t的$[2, 1, 1]$-GDC(5)，其中$t \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$（见引理 3.6）。这样得到一个组型为$16^i 20^j 24^k 28^l 32^m$，点数为$4t$的$[2, 1, 1]$-GDC(5)。利用最优$(n, 5, [2, 1, 1])_4$码填入这个GDC的组中，其中$n \in \{16, 20, 24, 28, 32\}$（见引理 3.6，3.8和3.9）。最终得到一个最优$(4t, 5, [2, 1, 1])_4$码，其中$t \geq 34$或者$t \in \{20, 24, 25, 29, 30\}$。 □

3.2.4 长度$n \equiv 1 \pmod 4$的情况

引理 3.11：$A_4(5, 5, [2, 1, 1]) = 2$，$A_4(9, 5, [2, 1, 1]) \geq 27$，$A_4(13, 5, [2, 1, 1]) \geq 72$。

证明. 对于$n = 5$，对应的2个码字为：$\langle 0, 1, 2, 3\rangle, \langle 2, 3, 0, 4\rangle$。

对于$n=9$，对应的27个码字为：

$$\begin{array}{lllllll}\langle 0,5,4,1\rangle & \langle 1,8,0,3\rangle & \langle 0,6,2,3\rangle & \langle 2,3,0,4\rangle & \langle 1,2,6,0\rangle & \langle 0,8,6,4\rangle & \langle 2,6,4,7\rangle \\ \langle 4,5,7,8\rangle & \langle 6,8,1,2\rangle & \langle 5,8,2,0\rangle & \langle 1,3,2,7\rangle & \langle 0,2,7,5\rangle & \langle 1,5,8,6\rangle & \langle 3,7,4,5\rangle \\ \langle 2,7,3,8\rangle & \langle 0,3,5,8\rangle & \langle 7,8,5,1\rangle & \langle 3,4,8,1\rangle & \langle 4,7,1,6\rangle & \langle 2,5,1,3\rangle & \langle 3,8,7,6\rangle \\ \langle 4,6,0,5\rangle & \langle 6,7,8,0\rangle & \langle 5,7,6,2\rangle & \langle 0,4,3,7\rangle & \langle 1,4,5,2\rangle & \langle 1,6,3,4\rangle. & \end{array}$$

对于$n=13$，对应的72个码字由下列所有基码字以2为步长半循环生成，其中元素a在自同构群作用下保持不变：

$$\begin{array}{llllll}\langle a,0,3,2\rangle & \langle a,9,2,7\rangle & \langle 0,11,a,8\rangle & \langle 0,7,2,a\rangle & \langle 0,5,4,7\rangle & \langle 0,3,5,11\rangle \\ \langle 0,4,11,1\rangle & \langle 0,9,6,3\rangle & \langle 0,10,8,4\rangle & \langle 1,7,5,2\rangle & \langle 1,3,4,6\rangle & \langle 0,1,9,5\rangle.\end{array}$$

$\square$

定理 3.4: 对于每个$t\geq 4$，均存在一个大小为$2t(4t+1)$的最优$(4t+1,5,[2,1,1])_4$码。

证明. 对于$4\leq t\leq 19$或者$t\in\{21,22,23,27,31,33\}$，由引理 3.8 和 3.9 可知存在一个最优 $(4t+1,5,[2,1,1])_4$ 码。

对于$t=26$的情况，取一个组型为3^7的$[2,1,1]$-GDC(5)（见引理 3.6 ）。利用一个TD$(4,5)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为15^7的$[2,1,1]$-GDC(5)。利用最优$(n,5,[2,1,1])_4$码填入这个GDC的组中，可得到一个最优 $(4t+1,5,[2,1,1])_4$ 码。

对于每个$u\in\{7,8\}$，存在一个组型为4^u的$[2,1,1]$-GDC(5)（见引理 3.6 ）。利用一个TD$(4,4)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为16^u的$[2,1,1]$-GDC(5)。在这个GDC上添加一个点，并用最优 $(17,5,[2,1,1])_4$ 码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个最优 $(4t+1,5,[2,1,1])_4$ 码，其中$t\in\{28,32\}$。

对于$t\geq 34$或者$t\in\{20,24,25,29,30\}$，取一个$(t+1,\{5,6,7,8,9\},1)$-PBD（见引理 2.2），删除其中一个点可得到一个组型为$4^i5^j6^k7^l8^m$的$\{5,6,7,8,9\}$-GDD，其中$4i+5j+6k+7l+8m=t$。应用构造 2.3，对这个5-GDD的每个点赋权为4。所需的输入设计为组型为4^t的$[2,1,1]$-GDC(5)，其中$t\in\{5,6,7,8,9\}$（见引理 3.6）。这样得到一个组型为$16^i20^j24^k28^l32^m$，点数为$4t$的$[2,1,1]$-GDC(5)。在这个GDC上添加一个点，并利用最优$(n,5,[2,1,1])_4$码填入这个GDC的组以及刚添加的点中，其中$n\in\{17,21,25,29,33\}$（见引理 3.8 和 3.9 ）。最终得到一个最优$(4t+1,5,[2,1,1])_4$码，其中$t\geq 34$或者$t\in\{20,24,25,29,30\}$。 $\square$

3.2.5 长度$n \equiv 2 \pmod 4$的情况

引理 3.12: $A_4(6,5,[2,1,1]) = 6$，$A_4(10,5,[2,1,1]) \geq 36$。

证明. 对于$n=6$，对应的6个码字为：

$$\langle 0,1,2,3\rangle \quad \langle 0,2,4,5\rangle \quad \langle 1,3,5,4\rangle \quad \langle 2,4,3,1\rangle \quad \langle 3,5,0,2\rangle \quad \langle 4,5,1,0\rangle.$$

对于$n=10$，对应的36个码字为：

$$\begin{array}{cccccc}
\langle 8,9,4,1\rangle & \langle 4,8,7,6\rangle & \langle 4,5,2,7\rangle & \langle 1,7,8,4\rangle & \langle 5,9,3,4\rangle & \langle 0,8,1,7\rangle \\
\langle 1,8,6,3\rangle & \langle 1,6,7,0\rangle & \langle 1,9,2,6\rangle & \langle 3,7,0,1\rangle & \langle 4,9,6,0\rangle & \langle 6,9,8,7\rangle \\
\langle 6,7,2,3\rangle & \langle 3,9,7,2\rangle & \langle 0,1,5,9\rangle & \langle 2,8,5,4\rangle & \langle 1,2,3,7\rangle & \langle 2,7,4,0\rangle \\
\langle 0,4,8,5\rangle & \langle 4,6,5,1\rangle & \langle 0,3,2,4\rangle & \langle 3,4,9,8\rangle & \langle 1,4,0,2\rangle & \langle 0,2,6,1\rangle \\
\langle 7,8,3,9\rangle & \langle 0,6,3,8\rangle & \langle 0,5,7,3\rangle & \langle 5,7,6,8\rangle & \langle 3,6,1,9\rangle & \langle 2,3,8,6\rangle \\
\langle 7,9,1,5\rangle & \langle 5,8,9,0\rangle & \langle 0,7,9,6\rangle & \langle 1,3,4,5\rangle & \langle 2,6,9,5\rangle & \langle 2,9,0,8\rangle.
\end{array}$$

□

定理 3.5: 对于每个$3 \leq t \leq 37$，均存在一个大小为$2t(4t+2)$的最优$(4t+2,5,[2,1,1])_4$码。

证明. 对于$3 \leq t \leq 34$并且$t \notin \{20,22,24,25,28,29,30,32\}$，由引理 3.6，3.8 和 3.9 可知存在一个大小为$2t(4t+2)$的最优$(4t+2,5,[2,1,1])_4$码。

对于$t \in \{20,24,28,32,36\}$，存在一个组型为4^u的$[2,1,1]$-GDC(5)，其中$u \in \{5,6,7,8,9\}$（见引理 3.6 ）。利用一个TD$(4,4)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为16^u的$[2,1,1]$-GDC(5)。在这个GDC上添加两个点，并用一个组型为2^9的$[2,1,1]$-GDC(5)填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个组型为2^{8u+1}的$[2,1,1]$-GDC(5)，长度分别为$82,98,114,130$ 及146。

对于$t \in \{22,37\}$，存在一个组型为6^5的$[2,1,1]$-GDC(5)（见引理 3.6 ）。令$t_1 = (4t+2)/30$，利用一个TD$(4,t_1)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为$(6t_1)^5$的$[2,1,1]$-GDC(5)。利用最优$(6t_1,5,[2,1,1])_4$码填入这个GDC的组中，得到一个长度为$4t+2$的最优编码。

对于$t \in \{25,30,35\}$，存在一个组型为4^u的$[2,1,1]$-GDC(5)，其中$u \in \{5,6,7\}$（见引理 3.6 ）。利用一个TD$(4,5)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为20^u的$[2,1,1]$-GDC(5)。在这个GDC上添加两个点，并用一个组型为2^{11}的$[2,1,1]$-GDC(5)填入这

个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个组型为2^{10u+1}的$[2,1,1]$-GDC(5)，长度分别为$102, 122$ 及142。

对于$t=29$，取一个TD$(6,5)$（见引理 2.8）。应用构造 2.3，对这个设计的前5组中的所有点以及最后一个组中的4个点赋权为4，对最后一个组中的其余点赋权为2。所需的输入设计为组型分别为4^6 以及$4^5 2^1$的$[2,1,1]$-GDC(5)（见引理 3.6 和 3.7 ）。这样得到一个组型为$20^5 18^1$的$[2,1,1]$-GDC(5)。利用长度分别为18和20的最优码填入这个GDC的组中，最终得到一个长度为118的最优码。 □

定理 3.6: *对于每个$t \geq 38$，均存在一个大小为$2t(4t+2)$的最优$(4t+2, 5, [2,1,1])_4$码。*

证明. 对于任何$r \geq 7$并且$r \notin \{10,14,15,18, 20,22,26,30,34,38,46,60\}$，由引理 2.8知，存在一个TD$(7,r)$。应用构造 2.3，对这个设计的前5组中的所有点、第6个组中的x个点和最后一个组中的y个点赋权为4，对最后一个组中的z个点赋权为2。剩下的全部点赋权为0。其中，要求$x \geq 4$，$4y+2z \geq 14$，并且z是奇数。所需的输入设计为组型分别为4^5，4^6，4^7，$4^5 2^1$ 以及$4^6 2^1$的$[2,1,1]$-GDC(5)（见引理 3.6 和 3.7 ）。这样得到一个组型为$(4r)^5(4x)^1(4y+2z)^1$的$[2,1,1]$-GDC(5)。利用长度为$4u$或者$4v+2$的最优码填入这个GDC的组中，其中$u \geq 4$，$3 \leq v \leq 37$，这样的码字由定理 3.3以及3.5保证存在。这样，最终得到一个最优$(20r+4x+4y+2z, 5, [2,1,1])_4$码。令$20r+4x+4y+2z=n$，则$n$可取到满足$n \equiv 2 \pmod 4$且$n \geq 4 \times 38 + 2 = 154$的任何值。 □

3.2.6 长度$n \equiv 3 \pmod 4$的情况

引理 3.13: $A_4(7,5,[2,1,1]) = 10$，$A_4(11,5,[2,1,1]) \geq 48$。

证明. 对于$n=7$，对应的10个码字为：

$$\begin{array}{llllll} \langle 0,1,2,3\rangle & \langle 0,2,4,5\rangle & \langle 0,3,5,6\rangle & \langle 0,4,6,1\rangle & \langle 1,4,3,5\rangle & \langle 1,6,4,2\rangle \\ \langle 2,3,1,4\rangle & \langle 2,6,3,0\rangle & \langle 4,5,2,6\rangle & \langle 5,6,1,3\rangle. & & \end{array}$$

对于$n=11$，对应的48个码字为：

$$\begin{array}{cccccc}
\langle 4,6,10,9\rangle & \langle 3,10,2,0\rangle & \langle 0,8,2,9\rangle & \langle 3,8,10,5\rangle & \langle 1,8,5,2\rangle & \langle 0,2,1,5\rangle \\
\langle 6,8,9,1\rangle & \langle 3,4,1,2\rangle & \langle 2,8,7,4\rangle & \langle 2,10,8,1\rangle & \langle 6,10,1,7\rangle & \langle 5,8,6,7\rangle \\
\langle 0,10,9,4\rangle & \langle 2,4,0,10\rangle & \langle 7,8,1,3\rangle & \langle 3,9,5,4\rangle & \langle 8,9,4,10\rangle & \langle 5,9,1,8\rangle \\
\langle 4,7,6,1\rangle & \langle 1,4,9,5\rangle & \langle 5,7,0,4\rangle & \langle 1,2,3,7\rangle & \langle 8,10,0,6\rangle & \langle 6,9,0,2\rangle \\
\langle 7,10,5,8\rangle & \langle 0,4,5,6\rangle & \langle 4,10,7,3\rangle & \langle 4,8,3,0\rangle & \langle 1,3,8,9\rangle & \langle 3,5,7,1\rangle \\
\langle 2,9,10,3\rangle & \langle 0,6,7,8\rangle & \langle 5,10,4,2\rangle & \langle 1,9,7,6\rangle & \langle 0,1,6,10\rangle & \langle 0,3,4,7\rangle \\
\langle 9,10,6,5\rangle & \langle 3,7,9,10\rangle & \langle 0,5,8,3\rangle & \langle 1,6,4,3\rangle & \langle 2,5,9,6\rangle & \langle 0,7,10,2\rangle \\
\langle 4,9,2,7\rangle & \langle 7,9,8,0\rangle & \langle 5,6,3,10\rangle & \langle 0,9,3,1\rangle & \langle 2,3,6,8\rangle & \langle 6,7,2,5\rangle.
\end{array}$$

□

定理 3.7: 对于每个$3\le t\le 37$，均存在一个大小为$(2t+1)(4t+3)$的最优$(4t+3,5,[2,1,1])_4$码。

证明. 对于$3\le t\le 34$并且$t\notin\{22,28,29,33\}$，由引理 3.8和 3.9 可知存在一个大小为$(2t+1)(4t+3)$的最优 $(4t+3,5,[2,1,1])_4$ 码。

对于$t=22$，存在一个组型为6^5的$[2,1,1]$-GDC(5)。利用一个TD$(4,3)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为18^5的$[2,1,1]$-GDC(5)。在这个GDC上添加一个点，并用最优 $(19,5,[2,1,1])_4$ 码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个最优码，长度为91。

对于$t\in\{28,29\}$，取一个TD(6,5)（见引理 2.8）。应用构造 2.3，对这个设计的前5组中的所有点以及最后一个组中的x个点赋权为4，对最后一个组中的y个点赋权为2。剩下的全部点赋权为0。所需的输入设计为组型分别为4^5，4^6以及$4^5 2^1$的$[2,1,1]$-GDC(5)（见引理 3.6 和 3.7 ）。这样得到一个组型为$20^5(4x+2y)^1$的$[2,1,1]$-GDC(5)。当$x=3,y=1$ 或者$x=4,y=1$时，$4x+2y$分别取14 或18。在这个GDC上添加一个点，并利用长度分别为15，19和21的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个最优码，长度分别是115和119。

对于$t=33$，存在一个组型为3^9的$[2,1,1]$-GDC(5)(见引理 3.6)。利用一个TD$(4,5)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为15^9的$[2,1,1]$-GDC(5)。利用最优 $(15,5,[2,1,1])_4$ 码填入这个GDC的组中，得到一个长度为135的最优编码。

对于$t=35$，取一个TD$(9,8)$（见引理 2.8）。应用构造 2.3，对这个设计的前8组中的所有点以及最后一个组中的7个点赋权为2。剩下的全部点赋权为0。所需的输入设计为组型分别为2^8以及2^9的$[2,1,1]$-GDC(5)（见引理 3.6 ）。这样得到一

个组型为$16^8 14^1$的$[2,1,1]$-GDC(5)。在这个GDC上添加一个点，并利用长度分别为15和17的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个最优码，长度是143。

对于$t=36$，存在一个组型为3^7的$[2,1,1]$-GDC(5)(见引理 3.6)。利用一个TD $(4,7)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为21^7的$[2,1,1]$-GDC(5)。利用最优 $(21,5,[2,1,1])_4$ 码填入这个GDC的组中，得到一个长度为147的最优编码。

对于$t=37$，存在一个组型为6^5的$[2,1,1]$-GDC(5)(见引理 3.6)。利用一个TD$(4,5)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为30^5的$[2,1,1]$-GDC(5)。在这个GDC上添加一个点，并用最优 $(31,5,[2,1,1])_4$ 码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个最优码，长度为151。 □

定理 3.8: *对于每个$t\geq 38$，均存在一个大小为$2t(4t+3)$的最优$(4t+3,5,[2,1,1])_4$码。*

证明. 对于任何$r\geq 7$并且$r\notin\{10,14,15,18,20,22,26,30,34,38,46,60\}$，由引理 2.8知，存在一个TD$(7,r)$。应用构造 2.3，对这个设计的前5组中的所有点、第6个组中的x个点和最后一个组中的y个点赋权为4，对最后一个组中的z个点赋权为2。剩下的全部点赋权为0。其中，要求$x\geq 4$，$4y+2z\geq 14$，并且z是奇数。所需的输入设计为组型分别为4^5，4^6，4^7，$4^5 2^1$ 以及$4^6 2^1$的$[2,1,1]$-GDC(5)（见引理 3.6 和 3.7 ）。这样得到一个组型为$(4r)^5(4x)^1(4y+2z)^1$的$[2,1,1]$-GDC(5)。在这个GDC上添加一个点，并用长度为$4u+1$或者$4v+3$的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中，其中$u\geq 4$，$3\leq v\leq 37$，这样的码字由定理 3.4以及3.7保证存在。这样，最终得到一个最优$(20r+4x+4y+2z+1,5,[2,1,1])_4$码。令$20r+4x+4y+2z+1=4t+3$，则$t$可取到满足$t\geq 38$的任何值。 □

3.3 确定$A_4(n,6,[2,1,1])$的值

3.3.1 一些阶数较小的$[2,1,1]$-GDC(6)和距离为6的最优常重复合码

首先通过计算机搜索得到一些较小的GDC和最优码。在搜索过程中，会有一些特殊的无穷点，如$x_i\in\{x\}\times\mathbb{Z}_u$，其下标将在群$\mathbb{Z}_n$的$u$阶子群中展开，这里$x\in\{a,b,c,d,e\}$。

引理 3.14: 存在一个组型为g^t，大小为$\frac{g^2t(t-1)}{6}$的$[2,1,1]$-GDC(6)，其中g和t满足:

1. $g=2, t\in\{10,13,16,19,22,25,28,34\}$;
2. $g=3, t\in\{5,7\}$;
3. $g=4, t\in\{4,7\}$;
4. $g=6, t\in\{4,5,6,7\}$;
5. $g\in\{7,10,13,22\}, t\in\{4\}$。

证明. 令$X_{\{g,t\}}=\mathbb{Z}_{gt}$，$\mathcal{G}_{\{g,t\}}=\{\{i,t+i,\ldots,(g-1)t+i\}:i\in\mathbb{Z}_t\}$，令$\mathcal{C}_{\{g,t\}}$分别是由下列基码字循环（或半循环）移位生成的。则$(X_{\{g,t\}},\mathcal{G}_{\{g,t\}},\mathcal{C}_{\{g,t\}})$ 是一个组型为g^t，大小为$\frac{g^2t(t-1)}{6}$的$[2,1,1]$-GDC(6)。

1. $g=2, t=10, n=20, m=1, s=1, M=1$

$$P:\langle 0,1,4,7\rangle \quad \langle 0,2,14,15\rangle \quad \langle 0,9,5,17\rangle$$

2. $g=2, t=13, n=26, m=3, s=3, M=1$

$$\begin{aligned} P&:\langle 0,1,5,22\rangle \\ R&:\langle 0,2,8,20\rangle \end{aligned}$$

3. $g=2, t=16, n=32, m=7, s=2, M=1$

$$\begin{aligned} P&:\langle 0,1,3,29\rangle \quad \langle 0,6,18,19\rangle \\ R&:\langle 0,8,17,23\rangle \end{aligned}$$

4. $g=2, t=19, n=38, m=7, s=3, M=1$

$$P:\langle 0,1,3,30\rangle \quad \langle 0,4,9,16\rangle$$

5. $g=2, t=22, n=44, m=3, s=2, M=1$

$$\begin{aligned} P&:\langle 0,1,5,8\rangle \quad \langle 0,2,39,36\rangle \\ R&:\langle 0,9,27,40\rangle \quad \langle 0,16,33,26\rangle \quad \langle 0,19,32,30\rangle \end{aligned}$$

6. $g = 2, t = 25, n = 50, m = 3, s = 5, M = 1$

$$\begin{array}{llll} P: \langle 0, 2, 19, 33\rangle & & \\ R: \langle 0, 14, 42, 22\rangle & \langle 0, 20, 5, 15\rangle & \langle 0, 24, 34, 40\rangle \end{array}$$

7. $g = 2, t = 28, n = 56, m = 3, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{lll} P: \langle 0, 1, 5, 8\rangle & \langle 0, 2, 51, 44\rangle & \langle 0, 25, 36, 48\rangle \\ R: \langle 0, 18, 45, 47\rangle & \langle 0, 22, 9, 39\rangle & \langle 0, 26, 10, 16\rangle \end{array}$$

8. $g = 2, t = 34, n = 68, m = 11, s = 3, M = 1$

$$\begin{array}{lllll} P: \langle 0, 1, 43, 63\rangle & \langle 0, 20, 46, 39\rangle & & & \\ R: \langle 0, 17, 10, 9\rangle & \langle 0, 44, 47, 25\rangle & \langle 0, 36, 59, 6\rangle & \langle 0, 31, 29, 4\rangle & \langle 0, 12, 45, 8\rangle \end{array}$$

9. $g = 3, t = 5, n = 15, m = 2, s = 2, M = 1$

$$P: \langle 0, 1, 4, 12\rangle$$

10. $g = 3, t = 7, n = 21, m = 2, s = 3, M = 1$

$$P: \langle 0, 1, 9, 13\rangle$$

11. $g = 4, t = 4, n = 16, m = 5, s = 2, M = 1$

$$P: \langle 0, 1, 7, 10\rangle$$

12. $g = 4, t = 7, n = 28, m = 3, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{ll} P: \langle 0, 1, 5, 17\rangle & \\ R: \langle 0, 2, 10, 11\rangle & \langle 0, 6, 19, 24\rangle \end{array}$$

13. $g = 6, t = 4, n = 24, m = 5, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{l} P: \langle 0, 1, 3, 22\rangle \\ R: \langle 0, 7, 13, 18\rangle \end{array}$$

14. $g = 6, t = 5, n = 30, m = 17, s = 2, M = 1$

$$P: \langle 0, 3, 1, 7\rangle \quad \langle 0, 6, 19, 22\rangle$$

15. $g=6, t=6, n=36, m=7, s=2, M=1$

$$\begin{array}{l} P:\langle 0,1,10,14\rangle \\ R:\langle 0,25,4,21\rangle \quad \langle 0,16,33,2\rangle \quad \langle 0,5,28,8\rangle \end{array}$$

16. $g=6, t=7, n=42, m=11, s=3, M=1$

$$P:\langle 0,3,4,34\rangle \quad \langle 0,12,29,32\rangle$$

17. $g=7, t=4, n=28, m=5, s=2, M=2$

$$\begin{array}{l} P:\langle 0,13,3,18\rangle \quad \langle 1,12,3,14\rangle \\ R:\langle 1,4,18,27\rangle \quad \langle 0,5,26,27\rangle \quad \langle 1,8,2,15\rangle \end{array}$$

18. $g=10, t=4, n=40, m=3, s=3, M=2$

$$\begin{array}{l} P:\langle 0,13,2,11\rangle \quad \langle 0,3,21,22\rangle \\ R:\langle 0,35,1,34\rangle \quad \langle 0,25,10,15\rangle \quad \langle 1,34,11,24\rangle \quad \langle 0,5,14,31\rangle \end{array}$$

19. $g=13, t=4, n=52, m=5, s=3, M=2$

$$\begin{array}{l} P:\langle 0,5,3,46\rangle \quad \langle 1,20,22,47\rangle \quad \langle 0,7,18,41\rangle \\ R:\langle 0,1,11,26\rangle \quad \langle 0,13,39,42\rangle \quad \langle 0,17,30,47\rangle \quad \langle 0,43,14,29\rangle \end{array}$$

20. $g=22, t=4, n=88, m=5, s=3, M=2$

$$\begin{array}{l} P:\langle 0,9,23,26\rangle \quad \langle 0,1,3,62\rangle \\ R:\langle 0,77,67,22\rangle \quad \langle 0,69,55,38\rangle \quad \langle 0,51,82,21\rangle \quad \langle 0,7,66,13\rangle \quad \langle 0,35,18,65\rangle. \end{array}$$

□

引理 3.15: 存在一个组型为$12^t u^1$，大小为$12t(2t+\frac{u}{3}-2)$ 的$[2,1,1]$-GDC(6)，其中t和u满足:

1. $u=9, t\in\{4,5,\ldots,15,17,18,19,23\}$;

2. $u=15, t\in\{7,8,\ldots,15\}$。

证明. 当$u=9$时，令$X_t=\mathbb{Z}_{12t}\cup(\{a,b,c\}\times\mathbb{Z}_3)$，$\mathcal{G}_t=\{\{i,t+i,2t+i,\ldots,11t+i\}: i\in\mathbb{Z}_t\}\cup\{\{a,b,c\}\times\mathbb{Z}_3\}$，令$\mathcal{C}_t$分别是由下列基码字循环移位生成的。当$u=15$时，令$X_t=\mathbb{Z}_{12t}\cup(\{a,b,c,d,e\}\times\mathbb{Z}_3)$，$\mathcal{G}_t=\{\{i,t+i,2t+i,\ldots,11t+i\}: i\in\mathbb{Z}_t\}\cup\{\{a,b,c,d,e\}\times\mathbb{Z}_3\}$，令$\mathcal{C}_t$分别是由下列基码字循环移位生成的。

1. $u = 9, t = 4, n = 48, m = 5, s = 2, M = 1$

$P : \langle 0, 3, 21, 30\rangle$
$R : \langle a_0, 0, 13, 35\rangle \quad \langle 5, 43, a_0, 36\rangle \quad \langle b_0, 0, 23, 25\rangle \quad \langle 23, 37, b_0, 18\rangle \quad \langle c_0, 0, 7, 5\rangle$
$\langle 25, 47, c_0, 36\rangle \quad \langle 0, 2, 1, 19\rangle$

2. $u = 9, t = 5, n = 60, m = 17, s = 3, M = 1$

$P : \langle 0, 2, 3, 6\rangle$
$R : \langle a_0, 0, 52, 53\rangle \quad \langle 17, 46, a_0, 0\rangle \quad \langle b_0, 0, 46, 59\rangle \quad \langle 4, 41, b_0, 0\rangle \quad \langle c_0, 0, 44, 7\rangle$
$\langle 5, 52, c_0, 33\rangle \quad \langle 0, 24, 12, 33\rangle \quad \langle 0, 21, 32, 18\rangle$

3. $u = 9, t = 6, n = 72, m = 19, s = 2, M = 1$

$P : \langle 0, 9, 50, 31\rangle \quad \langle 0, 7, 33, 10\rangle \quad \langle 0, 67, 34, 69\rangle$
$R : \langle a_0, 0, 20, 28\rangle \quad \langle 8, 61, a_0, 45\rangle \quad \langle b_0, 0, 32, 52\rangle \quad \langle 55, 59, b_0, 12\rangle \quad \langle c_0, 0, 35, 40\rangle$
$\langle 29, 37, c_0, 12\rangle \quad \langle 0, 1, 17, 44\rangle$

4. $u = 9, t = 7, n = 84, m = 5, s = 3, M = 1$

$P : \langle 0, 2, 20, 71\rangle \quad \langle 0, 8, 83, 66\rangle$
$R : \langle a_0, 0, 65, 73\rangle \quad \langle 16, 77, a_0, 78\rangle \quad \langle b_0, 0, 68, 25\rangle \quad \langle 7, 74, b_0, 54\rangle \quad \langle c_0, 0, 13, 53\rangle$
$\langle 25, 68, c_0, 30\rangle \quad \langle 0, 55, 31, 81\rangle \quad \langle 0, 12, 15, 48\rangle \quad \langle 0, 33, 37, 57\rangle$

5. $u = 9, t = 8, n = 96, m = 77, s = 4, M = 1$

$P : \langle 0, 13, 87, 46\rangle \quad \langle 0, 23, 62, 81\rangle$
$R : \langle a_0, 0, 1, 68\rangle \quad \langle 26, 31, a_0, 51\rangle \quad \langle b_0, 0, 95, 28\rangle \quad \langle 34, 41, b_0, 78\rangle$
$\langle c_0, 0, 59, 76\rangle \quad \langle 28, 47, c_0, 3\rangle \quad \langle 0, 66, 78, 84\rangle \quad \langle 0, 54, 60, 90\rangle$
$\langle 0, 35, 4, 31\rangle$

6. $u = 9, t = 9, n = 108, m = 7, s = 3, M = 1$

$P : \langle 0, 25, 39, 76\rangle \quad \langle 0, 24, 55, 77\rangle \quad \langle 0, 95, 105, 80\rangle \quad \langle 0, 30, 4, 8\rangle$
$R : \langle a_0, 0, 106, 59\rangle \quad \langle 82, 98, a_0, 9\rangle \quad \langle b_0, 0, 79, 74\rangle \quad \langle 23, 46, b_0, 72\rangle$
$\langle 22, 86, c_0, 18\rangle \quad \langle 0, 43, 89, 29\rangle \quad \langle c_0, 0, 50, 73\rangle$

7. $u = 9, t = 10, n = 120, m = 113, s = 3, M = 1$

$P : \langle 0, 82, 33, 86\rangle \quad \langle 0, 29, 117, 78\rangle \quad \langle 0, 77, 79, 73\rangle$
$R : \langle a_0, 0, 46, 32\rangle \quad \langle 37, 44, a_0, 78\rangle \quad \langle b_0, 0, 109, 74\rangle \quad \langle 34, 86, b_0, 99\rangle$
$\langle 38, 43, c_0, 54\rangle \quad \langle 0, 15, 99, 51\rangle \quad \langle 0, 114, 63, 12\rangle \quad \langle 0, 96, 42, 87\rangle$
$\langle 0, 75, 27, 3\rangle \quad \langle 0, 35, 23, 22\rangle \quad \langle c_0, 0, 8, 55\rangle \quad \langle 0, 81, 25, 56\rangle$

8. $u = 9, t = 11, n = 132, m = 5, s = 5, M = 1$

$P : \langle 0, 62, 90, 104\rangle \quad \langle 0, 16, 129, 81\rangle \quad \langle 0, 120, 19, 27\rangle$
$R : \langle a_0, 0, 125, 67\rangle \quad \langle 62, 112, a_0, 87\rangle \quad \langle b_0, 0, 7, 35\rangle \quad \langle 61, 71, b_0, 120\rangle$
$\langle 0, 14, 85, 43\rangle \quad \langle 0, 106, 83, 119\rangle \quad \langle 56, 58, c_0, 15\rangle \quad \langle c_0, 0, 97, 17\rangle$

9. $u = 9, t = 12, n = 144, m = 11, s = 3, M = 1$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle 0,62,77,49\rangle & \langle 0,44,118,5\rangle & \langle 0,27,37,136\rangle & \langle 0,16,67,35\rangle \\
R:\langle a_0,0,23,142\rangle & \langle 10,86,a_0,132\rangle & \langle b_0,0,88,50\rangle & \langle 5,25,b_0,108\rangle \\
\langle 16,47,c_0,24\rangle & \langle 0,114,95,104\rangle & \langle 0,90,79,61\rangle & \langle 0,63,141,138\rangle \\
\langle 0,102,69,143\rangle & \langle 0,28,34,98\rangle & \langle 0,18,57,89\rangle & \langle c_0,0,53,91\rangle \\
\langle 0,137,66,86\rangle & & &
\end{array}$$

10. $u = 9, t = 13, n = 156, m = 37, s = 5, M = 1$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle 0,50,29,125\rangle & \langle 0,154,100,54\rangle & \langle 0,148,49,155\rangle & \\
R:\langle 0,48,69,25\rangle & \langle 0,90,145,17\rangle & \langle 0,14,73,45\rangle & \langle 55,116,b_0,135\rangle \\
\langle 0,12,99,9\rangle & \langle 68,139,c_0,144\rangle & \langle 0,24,96,84\rangle & \langle 0,120,105,43\rangle \\
\langle a_0,0,118,11\rangle & \langle b_0,0,38,109\rangle & \langle c_0,0,115,107\rangle & \langle 136,140,a_0,111\rangle
\end{array}$$

11. $u = 9, t = 14, n = 168, m = 103, s = 5, M = 1$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle 0,25,64,19\rangle & \langle 0,46,29,90\rangle & \langle 0,38,61,125\rangle & \\
R:\langle b_0,0,76,2\rangle & \langle 0,60,48,72\rangle & \langle 52,59,a_0,111\rangle & \langle 22,113,b_0,30\rangle \\
\langle 35,154,c_0,138\rangle & \langle 0,93,136,102\rangle & \langle 0,45,150,65\rangle & \langle 0,24,124,104\rangle \\
\langle 0,69,96,132\rangle & \langle 0,147,120,145\rangle & \langle a_0,0,148,86\rangle & \langle 0,3,36,35\rangle \\
\langle c_0,0,41,4\rangle & \langle 0,51,133,11\rangle & &
\end{array}$$

12. $u = 9, t = 15, n = 180, m = 7, s = 4, M = 1$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle 0,153,96,12\rangle & \langle 0,161,3,177\rangle & \langle 0,109,116,14\rangle & \langle 0,6,82,38\rangle \\
\langle 0,41,142,5\rangle & & & \\
R:\langle a_0,0,68,13\rangle & \langle 4,71,a_0,162\rangle & \langle b_0,0,4,170\rangle & \langle 5,145,b_0,165\rangle \\
\langle 4,134,c_0,135\rangle & \langle 0,80,136,10\rangle & \langle 0,54,179,26\rangle & \langle 0,169,17,134\rangle \\
\langle 0,77,52,70\rangle & \langle c_0,0,79,119\rangle & \langle 0,18,2,115\rangle &
\end{array}$$

13. $u = 9, t = 17, n = 204, m = 41, s = 8, M = 1$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle 0,3,50,125\rangle & \langle 0,126,37,55\rangle & \langle 0,105,14,191\rangle & \\
R:\langle a_0,0,20,52\rangle & \langle 65,73,a_0,9\rangle & \langle b_0,0,164,4\rangle & \langle 41,169,b_0,141\rangle \\
\langle 38,82,c_0,66\rangle & \langle 0,108,56,104\rangle & \langle 0,80,112,172\rangle & \langle 0,168,184,192\rangle \\
\langle 0,48,132,88\rangle & \langle c_0,0,116,64\rangle & \langle 0,60,72,180\rangle &
\end{array}$$

14. $u = 9, t = 18, n = 216, m = 23, s = 4, M = 1$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle 0,89,25,38\rangle & \langle 0,118,61,78\rangle & \langle 0,172,185,84\rangle & \langle 0,163,88,140\rangle \\
\langle 0,86,48,109\rangle & \langle 0,29,105,203\rangle & & \\
R:\langle a_0,0,65,142\rangle & \langle 5,151,a_0,129\rangle & \langle 0,1,27,190\rangle & \langle 2,151,b_0,201\rangle \\
\langle 7,86,c_0,39\rangle & \langle b_0,0,167,37\rangle & \langle 0,153,147,92\rangle & \langle 0,45,60,195\rangle \\
\langle 0,99,192,96\rangle & \langle 0,207,177,64\rangle & \langle 0,81,31,183\rangle & \langle c_0,0,22,41\rangle \\
\langle 0,154,12,129\rangle & & &
\end{array}$$

15. $u = 9, t = 19, n = 228, m = 43, s = 7, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P: \langle 0,74,43,139\rangle & \langle 0,88,226,186\rangle & \langle 0,21,156,93\rangle & \langle 0,23,196,31\rangle \\
R: \langle 0,40,82,126\rangle & \langle 14,142,a_0,93\rangle & \langle b_0,0,67,149\rangle & \langle 29,112,b_0,201\rangle \\
\langle 28,74,c_0,189\rangle & \langle 0,104,210,50\rangle & \langle 0,63,51,12\rangle & \langle 0,27,168,87\rangle \\
\langle 0,70,131,71\rangle & \langle c_0,0,97,32\rangle & \langle a_0,0,203,157\rangle &
\end{array}
$$

16. $u = 9, t = 23, n = 276, m = 7, s = 7, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P: \langle 0,8,86,114\rangle & \langle 0,200,257,43\rangle & \langle 0,58,261,125\rangle & \langle 0,228,211,105\rangle \\
R: \langle 0,51,88,15\rangle & \langle 0,2,170,165\rangle & \langle b_0,0,109,83\rangle & \langle 13,161,b_0,240\rangle \\
\langle 11,187,c_0,216\rangle & \langle 16,134,a_0,204\rangle & \langle a_0,0,89,13\rangle & \langle 0,80,87,145\rangle \\
\langle 0,98,179,30\rangle & \langle 0,249,75,162\rangle & \langle 0,224,49,167\rangle & \langle 0,72,108,90\rangle \\
\langle 0,252,110,142\rangle & \langle 0,14,201,68\rangle & \langle 0,64,233,149\rangle & \langle 0,104,195,215\rangle \\
 & \langle c_0,0,251,181\rangle & \langle 0,55,126,210\rangle & \langle 0,214,147,1\rangle
\end{array}
$$

17. $u = 15, t = 7, n = 84, m = 11, s = 3, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P: \langle 0,39,36,3\rangle & \langle 0,18,52,83\rangle & & \\
R: \langle b_0,0,25,50\rangle & \langle 17,22,a_0,0\rangle & \langle a_0,0,16,8\rangle & \langle 0,40,71,2\rangle \\
\langle e_0,0,55,23\rangle & \langle c_0,0,37,32\rangle & \langle 49,59,c_0,78\rangle & \langle d_0,0,11,22\rangle \\
\langle 79,83,d_0,12\rangle & \langle 4,68,b_0,45\rangle & \langle 2,28,e_0,3\rangle &
\end{array}
$$

18. $u = 15, t = 8, n = 96, m = 5, s = 3, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P: \langle 0,6,59,93\rangle & \langle 0,1,11,38\rangle & & \\
R: \langle a_0,0,20,19\rangle & \langle 20,88,a_0,9\rangle & \langle b_0,0,34,41\rangle & \langle 0,18,31,75\rangle \\
\langle 13,95,b_0,78\rangle & \langle c_0,0,67,62\rangle & \langle 25,47,c_0,51\rangle & \langle 0,84,15,33\rangle \\
\langle e_0,0,70,29\rangle & \langle 0,60,3,69\rangle & \langle 17,64,e_0,60\rangle & \langle d_0,0,23,76\rangle \\
\langle 19,71,d_0,21\rangle & & &
\end{array}
$$

19. $u = 15, t = 9, n = 108, m = 5, s = 3, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P: \langle 0,58,39,42\rangle & \langle 0,83,41,105\rangle & \langle 0,79,94,57\rangle & \\
R: \langle a_0,0,26,43\rangle & \langle 58,62,a_0,78\rangle & \langle b_0,0,88,14\rangle & \langle 0,24,12,73\rangle \\
\langle 56,61,b_0,96\rangle & \langle c_0,0,59,7\rangle & \langle 34,35,c_0,102\rangle & \langle d_0,0,70,95\rangle \\
\langle 31,92,d_0,3\rangle & \langle e_0,0,101,76\rangle & \langle 22,86,e_0,33\rangle & \langle 0,100,48,52\rangle
\end{array}
$$

20. $u = 15, t = 10, n = 120, m = 43, s = 3, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P: \langle 0,68,61,39\rangle & \langle 0,104,58,102\rangle & \langle 0,107,14,23\rangle & \\
R: \langle a_0,0,55,11\rangle & \langle 67,110,a_0,102\rangle & \langle b_0,0,8,1\rangle & \langle 0,24,99,93\rangle \\
\langle 55,80,b_0,6\rangle & \langle c_0,0,98,85\rangle & \langle 0,63,72,105\rangle & \langle 0,114,48,15\rangle \\
\langle 64,95,d_0,102\rangle & \langle 0,33,45,51\rangle & \langle 50,55,e_0,36\rangle & \langle e_0,0,67,119\rangle \\
\langle 58,62,c_0,111\rangle & \langle d_0,0,65,97\rangle & \langle e_0,0,67,119\rangle &
\end{array}
$$

21. $u = 15, t = 11, n = 132, m = 5, s = 4, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P : \langle 0,102,82,61\rangle & \langle 0,7,16,124\rangle & \langle 0,12,3,50\rangle & \\
R : \langle d_0,0,74,109\rangle & \langle a_0,0,25,131\rangle & \langle b_0,0,1,128\rangle & \langle 0,6,119,19\rangle \\
\langle 34,44,b_0,6\rangle & \langle c_0,0,106,2\rangle & \langle 14,79,c_0,54\rangle & \langle 0,34,81,129\rangle \\
\langle 19,98,d_0,3\rangle & \langle 25,128,a_0,96\rangle & \langle 17,34,e_0,102\rangle & \langle 0,108,27,52\rangle \\
\langle e_0,0,127,5\rangle & & &
\end{array}
$$

22. $u = 15, t = 12, n = 144, m = 101, s = 3, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P : \langle 0,8,17,3\rangle & \langle 0,14,57,100\rangle & \langle 0,16,113,127\rangle & \\
R : \langle a_0,0,79,77\rangle & \langle 14,103,a_0,84\rangle & \langle e_0,0,47,52\rangle & \langle 0,61,135,67\rangle \\
\langle 20,73,b_0,21\rangle & \langle c_0,0,98,10\rangle & \langle 11,61,c_0,60\rangle & \langle b_0,0,106,95\rangle \\
\langle 11,70,d_0,132\rangle & \langle 0,42,124,63\rangle & \langle 11,13,e_0,120\rangle & \langle 0,54,87,119\rangle \\
\langle 0,93,66,27\rangle & \langle d_0,0,35,22\rangle & \langle 0,76,105,101\rangle & \langle 0,126,122,116\rangle \\
\langle 0,30,58,99\rangle & \langle 0,13,7,44\rangle & &
\end{array}
$$

23. $u = 15, t = 13, n = 156, m = 7, s = 6, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P : \langle 0,56,21,135\rangle & \langle 0,12,11,131\rangle & \langle 0,114,61,57\rangle & \\
R : \langle a_0,0,94,122\rangle & \langle 47,55,a_0,69\rangle & \langle b_0,0,154,62\rangle & \langle 0,68,142,70\rangle \\
\langle 59,91,b_0,69\rangle & \langle d_0,0,110,34\rangle & \langle 49,53,c_0,99\rangle & \langle c_0,0,38,82\rangle \\
\langle 64,104,d_0,6\rangle & \langle e_0,0,106,86\rangle & \langle 23,151,e_0,141\rangle &
\end{array}
$$

24. $u = 15, t = 14, n = 168, m = 101, s = 5, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P : \langle 0,39,37,34\rangle & \langle 0,19,120,123\rangle & \langle 0,54,13,58\rangle & \\
R : \langle a_0,0,77,22\rangle & \langle 20,28,a_0,60\rangle & \langle b_0,0,62,31\rangle & \langle e_0,0,38,124\rangle \\
\langle 29,94,b_0,45\rangle & \langle d_0,0,7,128\rangle & \langle c_0,0,44,49\rangle & \langle 0,122,45,11\rangle \\
\langle 22,98,d_0,153\rangle & \langle 20,55,c_0,162\rangle & \langle 23,139,e_0,159\rangle & \langle 0,12,117,155\rangle \\
\langle 0,147,81,111\rangle & \langle 0,60,69,2\rangle & \langle 0,73,1,66\rangle & \langle 0,27,63,17\rangle
\end{array}
$$

25. $u = 15, t = 15, n = 180, m = 37, s = 4, M = 1$

$$
\begin{array}{llll}
P : \langle 0,52,58,49\rangle & \langle 0,61,37,54\rangle & \langle 0,68,134,31\rangle & \langle 0,81,24,28\rangle \\
\langle 0,74,167,118\rangle & & & \\
R : \langle a_0,0,53,43\rangle & \langle 41,61,a_0,171\rangle & \langle b_0,0,17,85\rangle & \langle 0,25,3,111\rangle \\
\langle 59,64,b_0,24\rangle & \langle c_0,0,113,79\rangle & \langle 85,140,c_0,0\rangle & \langle 0,36,77,50\rangle \\
\langle d_0,0,151,122\rangle & \langle 58,173,d_0,93\rangle & \langle e_0,0,149,7\rangle & \langle 43,53,e_0,123\rangle \\
\langle 0,108,89,147\rangle. & & &
\end{array}
$$

□

引理 3.16: 存在一个型为$1^{12}2^1$，大小为28 的$[2,1,1]$-GDC(6)。

证明. 令$X=\mathbb{Z}_{14}$，$\mathcal{G}=\{\{0,1\}\}\cup\{\{i\}:i\in\mathbb{Z}_{14}\setminus\{0,1\}\}$。$\mathcal{C}$如下：

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 4,6,7,11\rangle & \langle 1,5,11,7\rangle & \langle 2,10,8,7\rangle & \langle 5,6,0,8\rangle & \langle 2,3,0,11\rangle \\
\langle 8,11,5,10\rangle & \langle 8,12,6,2\rangle & \langle 10,12,9,5\rangle & \langle 0,9,11,12\rangle & \langle 11,13,4,0\rangle \\
\langle 3,7,1,10\rangle & \langle 1,13,2,3\rangle & \langle 1,6,10,12\rangle & \langle 2,5,12,13\rangle & \langle 7,12,0,4\rangle \\
\langle 3,6,13,9\rangle & \langle 4,10,13,1\rangle & \langle 0,8,7,13\rangle & \langle 11,12,3,1\rangle & \langle 0,10,3,6\rangle \\
\langle 2,9,1,6\rangle & \langle 0,4,2,5\rangle & \langle 9,13,10,8\rangle & \langle 1,8,4,9\rangle & \langle 7,11,2,9\rangle \\
\langle 7,13,5,6\rangle & \langle 5,9,3,4\rangle & \langle 3,4,8,12\rangle. & &
\end{array}$$

□

引理 3.17: 存在一个型为1^t11^1，大小为$6u^2+20u$的$[2,1,1]$-GDC(6)，其中$t\in\{30,36,54,66,78\}$，而$6u=t$。

证明. 令$X_t=\mathbb{Z}_t\cup(\{a,b,c,d,e\}\times\mathbb{Z}_2)\cup\{f\}$，$\mathcal{G}_t=\{\{i\}:i\in\mathbb{Z}_t\}\cup\{\{a,b,c,d,e\}\times\mathbb{Z}_2\cup\{f\}\}$，令$\mathcal{C}_t$分别是由下列基码字或半循环移位生成的。

1. $t=30, n=30, m=1, s=1, M=3$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle a_0,24,7,2\rangle & \langle 1,21,a_0,0\rangle & \langle a_0,28,29,3\rangle & \langle 1,7,19,29\rangle \\
\langle 2,11,a_0,28\rangle & \langle b_0,15,13,10\rangle & \langle 1,20,b_0,15\rangle & \langle 2,8,0,20\rangle \\
\langle b_0,0,23,2\rangle & \langle 4,29,b_0,12\rangle & \langle c_0,6,5,27\rangle & \langle 0,24,12,16\rangle \\
\langle 3,29,c_0,14\rangle & \langle c_0,26,19,4\rangle & \langle 1,22,c_0,24\rangle & \langle 0,4,f,17\rangle \\
\langle d_0,2,29,4\rangle & \langle 1,11,d_0,18\rangle & \langle d_0,12,19,9\rangle & \langle f,11,0,10\rangle \\
\langle 3,22,d_0,8\rangle & \langle e_0,14,17,28\rangle & \langle 3,17,e_0,18\rangle & \langle 1,4,e_0,8\rangle \\
\langle e_0,6,9,7\rangle & & &
\end{array}$$

2. $t=36, n=36, m=1, s=1, M=3$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle a_0,24,13,14\rangle & \langle 1,3,a_0,6\rangle & \langle a_0,28,15,35\rangle & \langle 2,14,24,20\rangle \\
\langle 2,35,a_0,4\rangle & \langle b_0,12,19,16\rangle & \langle 1,2,b_0,27\rangle & \langle 0,16,28,1\rangle \\
\langle b_0,9,8,11\rangle & \langle 4,23,b_0,18\rangle & \langle c_0,30,5,27\rangle & \langle 2,28,32,16\rangle \\
\langle 1,4,c_0,0\rangle & \langle c_0,26,22,1\rangle & \langle 3,35,c_0,26\rangle & \langle 2,9,30,3\rangle \\
\langle d_0,0,15,10\rangle & \langle 1,17,d_0,30\rangle & \langle d_0,32,17,25\rangle & \langle 1,31,10,26\rangle \\
\langle 3,22,d_0,20\rangle & \langle e_0,23,2,6\rangle & \langle 1,14,e_0,23\rangle & \langle 0,24,8,6\rangle \\
\langle e_0,10,21,1\rangle & \langle 0,9,e_0,22\rangle & \langle f,0,31,5\rangle & \langle 1,29,f,9\rangle
\end{array}$$

3. $t=54, n=54, m=5, s=6, M=3$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle 0,1,2,3\rangle & & & \\
R:\langle a_0,30,19,4\rangle & \langle 1,23,a_0,38\rangle & \langle a_0,8,39,41\rangle & \langle 2,14,53,25\rangle \\
\langle 3,16,a_0,48\rangle & \langle b_0,24,33,47\rangle & \langle 1,52,b_0,12\rangle & \langle 1,35,7,53\rangle \\
\langle b_0,38,40,19\rangle & \langle 3,29,b_0,2\rangle & \langle c_0,18,22,25\rangle & \langle 0,24,35,44\rangle \\
\langle 1,47,c_0,50\rangle & \langle c_0,2,27,23\rangle & \langle 3,40,c_0,30\rangle & \langle 1,17,11,16\rangle \\
\langle d_0,42,29,37\rangle & \langle 1,5,d_0,21\rangle & \langle d_0,45,10,20\rangle & \langle 2,26,8,45\rangle \\
\langle 2,16,d_0,0\rangle & \langle e_0,0,52,38\rangle & \langle 1,46,e_0,27\rangle & \langle 1,14,6,43\rangle \\
\langle e_0,15,29,31\rangle & \langle 2,47,e_0,6\rangle & \langle f,31,24,5\rangle & \langle 1,22,40,49\rangle \\
\langle 0,32,f,22\rangle & \langle 0,42,36,6\rangle & \langle 1,31,20,13\rangle &
\end{array}$$

4. $t = 66, n = 66, m = 17, s = 4, M = 3$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle 0,1,2,3\rangle & \langle 0,5,6,10\rangle & & \\
R:\langle a_0,42,22,13\rangle & \langle 1,11,a_0,44\rangle & \langle a_0,26,17,39\rangle & \langle 0,20,31,65\rangle \\
\langle 3,64,a_0,36\rangle & \langle b_0,24,39,2\rangle & \langle 1,64,b_0,47\rangle & \langle 0,39,63,53\rangle \\
\langle b_0,59,58,1\rangle & \langle 2,21,b_0,0\rangle & \langle c_0,42,32,17\rangle & \langle 2,62,37,23\rangle \\
\langle 1,46,c_0,12\rangle & \langle c_0,51,49,34\rangle & \langle 2,5,c_0,57\rangle & \langle 0,23,11,35\rangle \\
\langle d_0,18,26,46\rangle & \langle 1,16,d_0,9\rangle & \langle d_0,63,29,13\rangle & \langle 1,25,62,32\rangle \\
\langle 2,53,d_0,18\rangle & \langle e_0,14,23,18\rangle & \langle 1,17,e_0,56\rangle & \langle 2,26,49,28\rangle \\
\langle e_0,63,1,4\rangle & \langle 0,22,e_0,57\rangle & \langle f,36,10,32\rangle & \langle 2,20,42,64\rangle \\
\langle 1,29,f,57\rangle & \langle 0,54,43,48\rangle & \langle 1,19,31,59\rangle & \langle 1,53,23,63\rangle \\
\langle 1,10,24,37\rangle & \langle 1,7,40,27\rangle & \langle 1,35,55,65\rangle &
\end{array}$$

5. $t = 78, n = 78, m = 11, s = 4, M = 3$

$$\begin{array}{cccc}
P:\langle 0,1,2,9\rangle & \langle 0,44,62,56\rangle & \langle 0,61,66,19\rangle & \\
R:\langle a_0,18,41,7\rangle & \langle 1,11,a_0,56\rangle & \langle a_0,44,28,3\rangle & \langle 1,4,10,19\rangle \\
\langle 3,10,a_0,6\rangle & \langle b_0,6,32,46\rangle & \langle 1,52,b_0,42\rangle & \langle 1,26,68,58\rangle \\
\langle b_0,75,31,29\rangle & \langle 2,23,b_0,21\rangle & \langle c_0,72,67,68\rangle & \langle 1,62,38,66\rangle \\
\langle 1,35,c_0,21\rangle & \langle c_0,3,16,41\rangle & \langle 2,16,c_0,72\rangle & \langle 0,25,69,27\rangle \\
\langle d_0,72,27,29\rangle & \langle 1,20,d_0,46\rangle & \langle d_0,28,13,20\rangle & \langle 2,11,67,10\rangle \\
\langle 3,53,d_0,66\rangle & \langle e_0,48,27,52\rangle & \langle 1,8,e_0,47\rangle & \langle 2,77,45,29\rangle \\
\langle e_0,29,2,49\rangle & \langle 3,58,e_0,18\rangle & \langle f,15,46,56\rangle & \langle 1,49,23,40\rangle \\
\langle 1,5,f,27\rangle & \langle 0,6,60,48\rangle & \langle 0,29,65,12\rangle & \langle 1,50,22,73\rangle \\
\langle 0,77,51,59\rangle & \langle 1,77,34,14\rangle & \langle 1,32,17,48\rangle & \langle 1,41,74,29\rangle \\
\langle 0,28,39,52\rangle. & & &
\end{array}$$

□

引理 3.18: $A_4(n,6,[2,1,1]) = U(n,6,[2,1,1])$对每个$n \in \{6,8,10,11,13,14,16,17,19,22,23,25,28,31,34,35,37,43,55,67,79,103\}$都成立。

证明. 对于引理中任意给定的n，令点集为$X = \mathbb{Z}_n$。则相应的编码分别由下列基码字循环移位生成的集合组成。

1. $n = 6, m = 1, s = 1, M = 2$

$$P:\langle 0,1,2,3\rangle$$

2. $n = 8, m = 1, s = 1, M = 1$

$$P:\langle 0,1,3,5\rangle$$

3. $n = 10, m = 1, s = 1, M = 2$

$$P : \langle 0,1,2,8\rangle \quad \langle 0,4,7,9\rangle \quad \langle 1,3,6,7\rangle$$

4. $n = 11, m = 3, s = 3, M = 11$

$$\begin{array}{l} P : \langle 1,2,3,4\rangle \quad \langle 1,5,6,7\rangle \quad \langle 2,6,5,10\rangle \\ R : \langle 2,8,9,7\rangle \quad \langle 0,10,4,5\rangle \quad \langle 4,8,1,0\rangle \quad \langle 3,5,0,8\rangle \quad \langle 8,10,6,3\rangle \\ \quad \langle 4,5,2,9\rangle \quad \langle 0,9,6,2\rangle \end{array}$$

5. $n = 13, m = 7, s = 2, M = 1$

$$P : \langle 0,1,4,10\rangle$$

6. $n = 14, m = 1, s = 1, M = 1$

$$P : \langle 0,2,3,9\rangle \quad \langle 0,6,5,10\rangle$$

7. $n = 16, m = 1, s = 1, M = 2$

$$P : \langle 0,1,2,3\rangle \quad \langle 0,4,9,15\rangle \quad \langle 0,6,13,14\rangle \quad \langle 1,5,10,12\rangle \quad \langle 1,11,9,14\rangle$$

8. $n = 17, M = 17$, 码字见表 3.1。

9. $n = 19, m = 5, s = 3, M = 1$

$$P : \langle 0,1,8,12\rangle$$

10. $n = 22, m = 3, s = 3, M = 2$

$$\begin{array}{l} P : \langle 0,13,1,10\rangle \\ R : \langle 1,17,13,21\rangle \quad \langle 1,4,2,15\rangle \quad \langle 0,16,12,21\rangle \quad \langle 1,8,0,12\rangle \end{array}$$

11. $n = 23, M = 23$, 码字见表 3.2.

12. $n = 25, m = 7, s = 2, M = 1$

$$P : \langle 0,1,3,23\rangle \quad \langle 0,8,20,13\rangle$$

13. $n = 28, m = 5, s = 5, M = 2$

$$\begin{array}{l} P : \langle 0, 1, 3, 6 \rangle \\ R : \langle 1, 5, 12, 17 \rangle \quad \langle 0, 24, 14, 17 \rangle \quad \langle 0, 16, 8, 23 \rangle \quad \langle 1, 9, 2, 15 \rangle \end{array}$$

14. $n = 31, m = 2, s = 5, M = 1$

$$P : \langle 0, 1, 6, 14 \rangle$$

15. $n = 34, m = 7, s = 5, M = 2$

$$\begin{array}{l} P : \langle 0, 3, 14, 23 \rangle \\ R : \langle 0, 32, 10, 24 \rangle \quad \langle 1, 3, 11, 20 \rangle \quad \langle 0, 16, 13, 20 \rangle \quad \langle 0, 27, 17, 28 \rangle \quad \langle 1, 19, 7, 22 \rangle \\ \quad \langle 1, 16, 15, 31 \rangle \end{array}$$

16. $n = 35, M = 35$, 码字见表 3.3.

17. $n = 37, m = 5, s = 6, M = 1$

$$P : \langle 0, 1, 11, 27 \rangle$$

18. $n = 43, m = 4, s = 7, M = 1$

$$P : \langle 0, 1, 7, 13 \rangle$$

19. $n = 55, m = 7, s = 2, M = 1$

$$\begin{array}{l} P : \langle 0, 9, 53, 6 \rangle \quad \langle 0, 54, 11, 15 \rangle \quad \langle 0, 4, 40, 25 \rangle \\ R : \langle 0, 31, 49, 45 \rangle \quad \langle 0, 20, 39, 23 \rangle \quad \langle 0, 17, 30, 43 \rangle \end{array}$$

20. $n = 67, m = 3, s = 11, M = 1$

$$P : \langle 0, 1, 13, 55 \rangle$$

21. $n = 79, m = 3, s = 13, M = 1$

$$P : \langle 0, 1, 24, 56 \rangle$$

22. $n = 103, m = 3, s = 17, M = 1$

$$P : \langle 0, 1, 7, 97 \rangle.$$

□

表 3.1　大小为42的最优$(17, 6, [2, 1, 1])_4$码的码字。

$\langle 6, 10, 8, 16\rangle$	$\langle 9, 15, 12, 16\rangle$	$\langle 2, 12, 1, 9\rangle$	$\langle 6, 14, 9, 13\rangle$	$\langle 11, 13, 10, 6\rangle$
$\langle 1, 6, 12, 11\rangle$	$\langle 5, 12, 0, 4\rangle$	$\langle 3, 11, 8, 9\rangle$	$\langle 5, 10, 9, 11\rangle$	$\langle 0, 1, 16, 2\rangle$
$\langle 6, 7, 15, 0\rangle$	$\langle 10, 15, 1, 4\rangle$	$\langle 11, 12, 16, 14\rangle$	$\langle 3, 16, 7, 6\rangle$	$\langle 8, 14, 4, 11\rangle$
$\langle 0, 8, 13, 5\rangle$	$\langle 1, 4, 8, 13\rangle$	$\langle 0, 9, 6, 10\rangle$	$\langle 4, 16, 10, 12\rangle$	$\langle 4, 9, 5, 3\rangle$
$\langle 4, 11, 15, 2\rangle$	$\langle 1, 9, 14, 7\rangle$	$\langle 2, 16, 11, 13\rangle$	$\langle 7, 13, 16, 4\rangle$	$\langle 7, 14, 3, 12\rangle$
$\langle 10, 14, 2, 0\rangle$	$\langle 2, 3, 4, 10\rangle$	$\langle 0, 4, 7, 14\rangle$	$\langle 2, 15, 14, 6\rangle$	$\langle 0, 15, 11, 3\rangle$
$\langle 1, 3, 15, 5\rangle$	$\langle 7, 8, 10, 2\rangle$	$\langle 3, 13, 12, 0\rangle$	$\langle 5, 13, 1, 14\rangle$	$\langle 10, 12, 7, 13\rangle$
$\langle 7, 11, 5, 1\rangle$	$\langle 5, 15, 8, 7\rangle$	$\langle 8, 16, 9, 1\rangle$	$\langle 5, 6, 3, 2\rangle$	$\langle 8, 12, 6, 3\rangle$
$\langle 14, 16, 5, 15\rangle$	$\langle 9, 13, 2, 8\rangle$			

表 3.2　大小为80的最优$(23, 6, [2, 1, 1])_4$码的码字。

$\langle 3, 10, 2, 15\rangle$	$\langle 14, 22, 3, 4\rangle$	$\langle 7, 8, 21, 9\rangle$	$\langle 20, 21, 5, 7\rangle$	$\langle 5, 14, 15, 1\rangle$
$\langle 8, 13, 1, 15\rangle$	$\langle 6, 21, 10, 14\rangle$	$\langle 4, 9, 18, 8\rangle$	$\langle 17, 21, 19, 8\rangle$	$\langle 8, 11, 20, 6\rangle$
$\langle 3, 18, 20, 22\rangle$	$\langle 3, 8, 12, 14\rangle$	$\langle 14, 16, 0, 11\rangle$	$\langle 15, 19, 13, 7\rangle$	$\langle 20, 22, 8, 13\rangle$
$\langle 12, 22, 16, 7\rangle$	$\langle 14, 19, 6, 18\rangle$	$\langle 5, 19, 11, 21\rangle$	$\langle 10, 20, 9, 11\rangle$	$\langle 7, 16, 18, 15\rangle$
$\langle 12, 14, 21, 20\rangle$	$\langle 1, 11, 16, 9\rangle$	$\langle 9, 19, 10, 2\rangle$	$\langle 4, 20, 14, 2\rangle$	$\langle 19, 22, 1, 17\rangle$
$\langle 0, 6, 11, 2\rangle$	$\langle 2, 14, 8, 7\rangle$	$\langle 6, 9, 13, 22\rangle$	$\langle 3, 19, 4, 0\rangle$	$\langle 1, 7, 22, 20\rangle$
$\langle 12, 18, 9, 13\rangle$	$\langle 2, 13, 19, 4\rangle$	$\langle 1, 15, 3, 6\rangle$	$\langle 8, 10, 4, 5\rangle$	$\langle 11, 13, 10, 12\rangle$
$\langle 2, 11, 5, 18\rangle$	$\langle 4, 11, 17, 3\rangle$	$\langle 2, 17, 22, 10\rangle$	$\langle 1, 4, 5, 19\rangle$	$\langle 15, 22, 5, 9\rangle$
$\langle 1, 10, 14, 13\rangle$	$\langle 16, 20, 17, 1\rangle$	$\langle 9, 17, 20, 5\rangle$	$\langle 12, 15, 11, 8\rangle$	$\langle 10, 22, 18, 6\rangle$
$\langle 7, 13, 0, 3\rangle$	$\langle 13, 16, 21, 6\rangle$	$\langle 0, 18, 19, 5\rangle$	$\langle 3, 17, 6, 16\rangle$	$\langle 13, 14, 17, 9\rangle$
$\langle 11, 22, 21, 0\rangle$	$\langle 2, 16, 9, 3\rangle$	$\langle 5, 12, 0, 4\rangle$	$\langle 15, 18, 21, 10\rangle$	$\langle 5, 13, 18, 20\rangle$
$\langle 1, 21, 18, 2\rangle$	$\langle 2, 12, 6, 1\rangle$	$\langle 6, 20, 15, 19\rangle$	$\langle 5, 7, 17, 2\rangle$	$\langle 0, 20, 3, 12\rangle$
$\langle 10, 12, 17, 19\rangle$	$\langle 8, 18, 2, 16\rangle$	$\langle 0, 10, 7, 21\rangle$	$\langle 4, 21, 22, 15\rangle$	$\langle 3, 9, 7, 1\rangle$
$\langle 0, 8, 17, 22\rangle$	$\langle 17, 18, 7, 11\rangle$	$\langle 3, 21, 13, 11\rangle$	$\langle 0, 4, 16, 13\rangle$	$\langle 4, 7, 6, 10\rangle$
$\langle 5, 6, 8, 3\rangle$	$\langle 16, 19, 8, 12\rangle$	$\langle 15, 17, 4, 14\rangle$	$\langle 7, 11, 14, 19\rangle$	$\langle 5, 16, 10, 22\rangle$
$\langle 2, 15, 20, 0\rangle$	$\langle 9, 21, 12, 16\rangle$	$\langle 6, 18, 1, 4\rangle$	$\langle 0, 9, 14, 15\rangle$	$\langle 1, 17, 12, 0\rangle$

表 3.3　大小为192的最优$(35,6,[2,1,1])_4$码的码字

$\langle 1,3,20,30\rangle$	$\langle 16,34,33,17\rangle$	$\langle 4,31,16,6\rangle$	$\langle 13,19,4,20\rangle$	$\langle 10,21,2,25\rangle$
$\langle 24,33,8,3\rangle$	$\langle 9,10,6,30\rangle$	$\langle 8,10,15,24\rangle$	$\langle 4,23,17,33\rangle$	$\langle 8,31,20,25\rangle$
$\langle 4,10,7,14\rangle$	$\langle 32,33,18,4\rangle$	$\langle 14,27,4,23\rangle$	$\langle 20,33,30,16\rangle$	$\langle 23,29,16,7\rangle$
$\langle 13,23,30,1\rangle$	$\langle 4,12,15,32\rangle$	$\langle 20,27,24,26\rangle$	$\langle 3,9,12,31\rangle$	$\langle 2,24,17,27\rangle$
$\langle 10,20,18,19\rangle$	$\langle 1,22,19,27\rangle$	$\langle 27,29,0,2\rangle$	$\langle 14,22,13,17\rangle$	$\langle 17,21,30,19\rangle$
$\langle 0,31,26,30\rangle$	$\langle 3,25,7,32\rangle$	$\langle 2,20,14,1\rangle$	$\langle 5,8,26,29\rangle$	$\langle 25,33,10,0\rangle$
$\langle 17,33,27,22\rangle$	$\langle 20,25,13,6\rangle$	$\langle 4,11,2,9\rangle$	$\langle 5,23,32,9\rangle$	$\langle 16,18,19,24\rangle$
$\langle 21,22,26,15\rangle$	$\langle 19,28,17,32\rangle$	$\langle 31,33,19,23\rangle$	$\langle 0,32,19,21\rangle$	$\langle 20,21,7,29\rangle$
$\langle 9,24,1,20\rangle$	$\langle 6,11,22,10\rangle$	$\langle 18,30,15,21\rangle$	$\langle 3,6,24,5\rangle$	$\langle 8,22,33,30\rangle$
$\langle 1,8,6,14\rangle$	$\langle 6,28,14,9\rangle$	$\langle 21,34,18,6\rangle$	$\langle 26,30,9,17\rangle$	$\langle 6,29,19,26\rangle$
$\langle 7,32,2,20\rangle$	$\langle 13,27,9,12\rangle$	$\langle 5,7,6,28\rangle$	$\langle 12,22,5,18\rangle$	$\langle 4,20,5,8\rangle$
$\langle 15,20,9,28\rangle$	$\langle 19,30,1,2\rangle$	$\langle 2,3,21,33\rangle$	$\langle 2,31,28,15\rangle$	$\langle 5,31,27,14\rangle$
$\langle 28,33,12,21\rangle$	$\langle 32,34,23,15\rangle$	$\langle 8,21,9,32\rangle$	$\langle 2,12,26,19\rangle$	$\langle 4,34,22,25\rangle$
$\langle 5,24,10,12\rangle$	$\langle 1,26,21,18\rangle$	$\langle 29,32,1,8\rangle$	$\langle 15,23,3,6\rangle$	$\langle 11,34,24,8\rangle$
$\langle 10,31,32,34\rangle$	$\langle 5,15,1,22\rangle$	$\langle 5,18,34,2\rangle$	$\langle 9,14,15,19\rangle$	$\langle 8,27,11,19\rangle$
$\langle 6,13,33,15\rangle$	$\langle 28,30,0,22\rangle$	$\langle 7,15,17,10\rangle$	$\langle 5,21,13,3\rangle$	$\langle 19,23,27,18\rangle$
$\langle 18,28,23,29\rangle$	$\langle 20,22,31,32\rangle$	$\langle 0,7,29,24\rangle$	$\langle 0,10,11,28\rangle$	$\langle 30,34,10,20\rangle$
$\langle 15,25,21,4\rangle$	$\langle 1,10,5,13\rangle$	$\langle 9,18,4,26\rangle$	$\langle 18,27,31,33\rangle$	$\langle 13,24,7,16\rangle$
$\langle 7,11,12,23\rangle$	$\langle 23,26,14,22\rangle$	$\langle 11,28,3,27\rangle$	$\langle 12,21,14,11\rangle$	$\langle 26,33,5,6\rangle$
$\langle 21,23,24,31\rangle$	$\langle 11,18,1,25\rangle$	$\langle 10,17,23,26\rangle$	$\langle 0,1,25,12\rangle$	$\langle 14,34,31,28\rangle$
$\langle 10,12,33,27\rangle$	$\langle 19,26,10,31\rangle$	$\langle 25,28,5,31\rangle$	$\langle 2,6,4,34\rangle$	$\langle 6,27,1,17\rangle$
$\langle 5,17,25,16\rangle$	$\langle 10,22,3,29\rangle$	$\langle 0,15,16,27\rangle$	$\langle 1,28,4,7\rangle$	$\langle 1,16,15,23\rangle$
$\langle 3,4,28,19\rangle$	$\langle 24,32,26,11\rangle$	$\langle 19,24,6,0\rangle$	$\langle 7,8,34,4\rangle$	$\langle 9,32,28,13\rangle$
$\langle 2,13,11,32\rangle$	$\langle 0,9,22,23\rangle$	$\langle 13,34,0,5\rangle$	$\langle 6,16,8,21\rangle$	$\langle 11,15,13,30\rangle$
$\langle 19,25,16,14\rangle$	$\langle 6,18,0,32\rangle$	$\langle 22,24,28,34\rangle$	$\langle 25,27,30,34\rangle$	$\langle 12,17,24,13\rangle$
$\langle 7,16,27,25\rangle$	$\langle 1,31,11,24\rangle$	$\langle 2,22,7,0\rangle$	$\langle 17,32,6,3\rangle$	$\langle 7,30,3,13\rangle$
$\langle 2,9,16,5\rangle$	$\langle 17,29,4,15\rangle$	$\langle 13,18,10,22\rangle$	$\langle 3,8,23,16\rangle$	$\langle 11,16,29,20\rangle$
$\langle 16,32,12,10\rangle$	$\langle 9,29,21,34\rangle$	$\langle 13,29,25,28\rangle$	$\langle 15,24,31,29\rangle$	$\langle 13,31,17,21\rangle$
$\langle 5,30,4,11\rangle$	$\langle 11,17,31,0\rangle$	$\langle 9,25,17,8\rangle$	$\langle 27,32,22,5\rangle$	$\langle 11,19,21,5\rangle$
$\langle 4,21,1,0\rangle$	$\langle 16,22,9,4\rangle$	$\langle 20,23,11,34\rangle$	$\langle 2,25,29,18\rangle$	$\langle 4,24,30,18\rangle$
$\langle 21,27,28,16\rangle$	$\langle 0,5,33,20\rangle$	$\langle 14,29,20,10\rangle$	$\langle 3,27,10,15\rangle$	$\langle 14,16,5,30\rangle$
$\langle 7,19,22,33\rangle$	$\langle 7,14,1,26\rangle$	$\langle 29,31,22,12\rangle$	$\langle 26,34,7,27\rangle$	$\langle 19,34,9,3\rangle$
$\langle 12,30,16,8\rangle$	$\langle 16,28,13,2\rangle$	$\langle 8,17,2,28\rangle$	$\langle 6,12,31,7\rangle$	$\langle 6,30,25,23\rangle$
$\langle 29,30,24,33\rangle$	$\langle 17,18,20,7\rangle$	$\langle 14,18,3,8\rangle$	$\langle 4,26,29,13\rangle$	$\langle 26,28,8,20\rangle$
$\langle 12,34,29,1\rangle$	$\langle 15,33,34,14\rangle$	$\langle 3,29,18,11\rangle$	$\langle 1,17,34,9\rangle$	$\langle 2,23,10,8\rangle$
$\langle 1,33,2,29\rangle$	$\langle 0,14,2,6\rangle$	$\langle 0,8,18,13\rangle$	$\langle 3,13,26,14\rangle$	$\langle 25,26,12,24\rangle$
$\langle 30,32,14,31\rangle$	$\langle 0,3,17,34\rangle$	$\langle 7,31,9,18\rangle$	$\langle 12,20,0,3\rangle$	$\langle 9,33,7,11\rangle$
$\langle 15,19,8,12\rangle$	$\langle 15,26,32,2\rangle$	$\langle 22,25,23,11\rangle$	$\langle 14,24,25,21\rangle$	$\langle 11,14,32,33\rangle$
$\langle 12,23,28,25\rangle$	$\langle 16,26,3,0\rangle$			

3.3.2 长度$n \equiv 0, 1 \pmod 6$的情况

引理 3.19：$A_4(7, 6, [2, 1, 1]) = 4$。

证明. 所需的4个码字如下：

$$\langle 0,1,2,3\rangle \quad \langle 0,4,5,6\rangle \quad \langle 2,3,4,5\rangle \quad \langle 5,6,1,2\rangle.$$

□

引理 3.20：对于任何正整数t，如果$A_4(6t+1, 6, [2, 1, 1]) = U(6t+1, 6, [2, 1, 1])$，则$A_4(6t, 6, [2, 1, 1]) = U(6t, 6, [2, 1, 1])$。

证明. 在一个最优$(6t+1, 6, [2, 1, 1])_4$码中，每个位置都有$2t+2t = 4t$非零元素。对于某个位置x，删除所有该位置非零的$4t$个码字，再将剩下码字中的x位置（已经全部为0）删除。这样得到的码字集构成一个$(6t, 6, [2, 1, 1])_4$码，且大小为$U(6t+1, 6, [2, 1, 1]) - 4t = 6t^2 - 3t = U(6t, 6, [2, 1, 1])$。 □

引理 3.21：对于每个$t \geq 4$，均存在一个组型为12^t的$[2, 1, 1]$-GDC(6)。

证明. 当$t \equiv 0$ 或$1 \pmod 4$ 且$t \geq 4$时，由引理 2.4知，总存在一个$(3t+1, \{4\}, 1)$-PBD。从点集中删除一点可得到一个组型为3^t的$\{4\}$-GDD。当$t \equiv 2$ 或$3 \pmod 4$ 且$t \geq 7$时，由引理 2.4知，总存在一个$(3t+1, \{4, 7^\star\}, 1)$-PBD。从点集中删除一个不属于大小为7的区组的点，可得到一个组型为3^t的$\{4, 7^\star\}$-GDD。因此，当$t \geq 4$ 并且$t \neq 6$时，总存在组型为3^t的$\{4, 7\}$-GDD。

当$t \geq 4$ 并且$t \neq 6$时，应用构造 2.3，对一个组型为3^t的$\{4, 7\}$-GDD中的所有点赋权为4。所需的输入设计是组型分别为4^4 以及4^7的$[2, 1, 1]$-GDC(6)（见引理 3.14）。这样得到一个组型为12^t的$[2, 1, 1]$-GDC(6)。

当$t = 6$时，取一个组型为4^6的$\{5\}$-GDD（见[99]），应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为3。所需的输入设计是组型为3^5的$[2, 1, 1]$-GDC(6)（见引理 3.14）。这样得到一个组型为12^6的$[2, 1, 1]$-GDC(6)。 □

定理 3.9：对于每个$t \geq 1$，均存在一个大小为$24t^2+2t$的最优$(12t+1, 6, [2, 1, 1])_4$码。

证明. 对于$t \in \{1,2,3\}$，由引理 3.18 可知存在一个大小为$24t^2+2t$的最优 $(12t+1,6,[2,1,1])_4$ 码。

对于$t \geq 4$，在一个组型为12^t的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.21）上添加一个点。用用最优 $(13,6,[2,1,1])_4$ 码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个最优$(12t+1,6,[2,1,1])_4$码，大小为$24t^2+2t$。 □

定理 3.10: *对于每个$1 \leq t \leq 16$，均存在一个大小为$(12t+7)(2t+1)$的最优$(12t+7,6,[2,1,1])_4$码。*

证明. 对于$t \in \{1,2,3,4,5,6,8\}$，由引理 3.18 可知存在一个大小为$(12t+7)(2t+1)$的最优 $(12t+7,6,[2,1,1])_4$ 码。

对于其余的九个t，我们首先分别构造组型如下的九个GDC：18^5，$24^4 18^1$，$24^4 30^1$，$30^4 18^1$，30^5，$30^5 12^1$，$30^5 24^1$，$24^7 18^1$ 以及$24^7 30^1$。具体构造方法为：

1. $t=7$时，取一个组型为3^5的4-GDD（见引理 2.5）。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可得一个组型为18^5的$[2,1,1]$-GDC(6)。

2. $t=9$时，取一个TD$(5,4)$（见引理 2.8）。删除一个点可得一个组型为 $4^4 3^1$ 的$\{4,5\}$- GDD。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可得一个组型为$24^4 18^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。

3. $t=10$时，取一个TD$(5,5)$（见引理 2.8）。删除同一个区组中的四个点可得一个组型为$4^4 5^1$的$\{4,5\}$-GDD。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可得一个组型为$24^4 30^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。

4. $t=11$时，取一个TD$(5,5)$（见引理 2.8）。删除同一个组中的两个点可得一个组型为$5^4 3^1$的$\{4,5\}$-GDD。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可得一个组型为$30^4 18^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。

5. $t=12$时，取一个TD$(5,5)$（见引理 2.8）。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可得一个组型为30^5的$[2,1,1]$-GDC(6)。

6. $t=13$时，取一个TD$(6,5)$（见引理 2.8）。删除同一个组中的三个点可得一个

组型为$5^5 2^1$的$\{4,5\}$-GDD。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可得一个组型为$30^5 12^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。

7. $t=14$时，取一个TD(6,5)（见引理 2.8）。删除一个点可得一个组型为$5^5 4^1$的$\{4,5\}$- GDD。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可得一个组型为$30^5 24^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。

8. $t \in \{15,16\}$时，取一个组型为4^7的4-RGDD（见引理 2.6）。在这个4-RGDD中共有8个平行类，在其中u个平行类上添加一个点，并让这些点构成一个新的组。当$t=15$时，$u=3$，当$t=16$时，$u=5$。这样得到一个组型为$4^7 u^1$的$\{4,5\}$-GDD。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可分别得到一个组型为$24^7 18^1$或$24^7 30^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。

以上构造中所需的输入设计是组型分别为6^4以及6^5的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14 ）。在上述这些GDC上添加一个点，并利用长度分别为13，19，25以及31的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个长度为$12t+7$的最优码，其中$t \in \{7,9,10,11,12,13,14,15,16\}$。 □

定理 3.11: *对于每个$t \geq 17$，均存在一个大小为$(12t+7)(2t+1)$的最优$(12t+7,6,[2,1,1])_4$码。*

证明. 对于$t \neq 24$，取一个TD$(6,2t)$（见引理 2.8）。应用构造 2.3，对这个设计的前4组中的所有点，第5组中的$2x$个点以及最后一个组中的y个点赋权为6。剩下的全部点赋权为0。所需的输入设计是组型分别为6^4，6^5以及6^6的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14 ）。这样得到一个组型为$(12t)^4(12x)^1(6y)^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。其中要求$y \geq 3$。在这个GDC上添加一个点，并利用长度分别为$12t+1$和$12u+7$的最优码（见定理 3.9 和 3.10 ）填入这个GDC的组以及刚添加的点中。其中$t \geq 1$，$1 \leq u \leq 16$。最终得到一个最优$(48t+12x+6y+1,6,[2,1,1])_4$码，这里$48t+12x+6y+1$可取得除$295 = 12 \times 24 + 7$的任何大于$12 \times 17 + 7 = 211$的值。

对于$t=24$，取一个TD$(7,8)$（见引理 2.8）。应用构造 2.3，对这个设计的前5组中的所有点，第6组中的6个点以及最后一个组中的3个点赋权为6。剩下的全部点赋权为0。所需的输入设计是组型分别为6^5，6^6以及6^7的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14

)。这样得到一个组型为$48^5 36^1 18^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。在这个GDC上添加一个点，并利用长度分别为19，37以及49的最优码（见定理 3.9 和 3.10 ）填入这个GDC的组以及刚添加的点中。其中$t \geq 1$，$1 \leq u \leq 16$。最终得到一个最优$(295, 6, [2,1,1])_4$码。 □

定理 3.12：对于每个$t \geq 1$，均存在一个大小为$6t^2 - 3t$的最优$(6t, 6, [2,1,1])_4$码。

证明. 由引理 3.20和定理 3.9–3.12，以及最优$(6, 6, [2,1,1])_4$码的存在性（见引理 3.18）可得结论。 □

3.3.3 长度$n \equiv 2 \pmod 6$的情况

引理 3.22：每个组型为2^{3t+1}的$[2,1,1]$-GDC(6)都是一个大小为$6t^2 + 2t$的最优$(6t + 2, 6, [2,1,1])_4$码。

证明. 组型为2^{3t+1}的$[2,1,1]$-GDC(6)的码字个数为$6t^2 + 2t$，恰好等于一个$(6t + 2, 6, [2,1,1])_4$码的上界。 □

定理 3.13：对于每个$t \in \{1, 2, \ldots, 11\} \cup \{14, 17, 18, 22\}$，均存在一个大小为$6t^2 + 2t$的最优$(6t + 2, 6, [2,1,1])_4$码。

证明. 对于$t \in \{1, 2\}$, 由引理 3.18 可知存在一个大小为$6t^2 + 2t$的最优 $(6t + 2, 6, [2,1,1])_4$ 码。

对于$t \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$，由引理 3.14 可知存在一个组型为$2^{3t+1}$的$[2,1,1]$-GDC(6)。

对于$t \in \{10, 14, 18, 22\}$，存在一个组型为$12^{t/2}$的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.21）。在这个GDC上添加两个点，并用组型为$1^{12}2^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.16）填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个大小为$6t^2 + 2t$的最优$(6t + 2, 6, [2,1,1])_4$码。

对于$t = 13$，取一个大小为10的最优$(10, 6, [2,1,1])_4$码（见引理 3.18）。这个编码可视为一个组型为1^{10}的$[2,1,1]$-GDC(6)。利用一个TD(4, 8)，应用构造 2.4 可得到一个组型为8^{10}的$[2,1,1]$-GDC(6)。利用最优$(8, 6, [2,1,1])_4$码填入这个GDC的组中，得到一个长度为80的最优编码。

对于$t = 17$，取一个组型为2^{13}的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理3.14）。利用一个TD$(4,4)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为8^{13}的$[2,1,1]$-GDC(6)。利用最优$(8,6,[2,1,1])_4$码填入这个GDC的组中，得到一个长度为104的最优编码。 □

定理 3.14: 对于每个$t \geq 23$ 或$t \in \{12,15,16,19,20,21\}$，均存在一个大小为$6t^2 + 2t$的最优$(6t+2,6,[2,1,1])_4$码。

证明. 对于每个$t \geq 23$ 或$t \in \{12,15,16,19,20,21\}$，取一个$(t+1,\{4,5,6\},1)$-PBD（见引理 2.1），删除其中一个点可得到一个组型为$3^i4^j5^k$的$\{4,5,6\}$-GDD，其中$3i + 4j + 5k = t$。应用构造 2.3，对这个GDD的每个点赋权为6。所需的输入设计为组型为6^t的$[2,1,1]$-GDC(6)，其中$t \in \{4,5,6\}$（见引理 3.14）。这样得到一个组型为$18^i24^j30^k$，点数为$6t$的$[2,1,1]$-GDC(6)。在这个GDC上添加两个点，并用组型分别为2^{10}，2^{13} 以及 2^{16} 的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14）填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个组型为2^{3t+1}的$[2,1,1]$-GDC(6)，其中$t \geq 23$或$t \in \{12,15,16,19,20,21\}$。由引理 3.22，这个GDC就是一个大小为$6t^2 + 2t$的最优$(6t+2,6,[2,1,1])_4$码。 □

3.3.4 长度$n \equiv 3,4 \pmod 6$的情况

引理 3.23: $A_4(4,6,[2,1,1]) = 1$。

证明. 所需的1个码字为$\langle 0,1,2,3\rangle$。 □

引理 3.24: 对于任何正整数t，如果$A_4(6t+4,6,[2,1,1]) = U(6t+4,6,[2,1,1])$，则$A_4(6t+3,6,[2,1,1]) = U(6t+3,6,[2,1,1])$。

证明. 在一个最优$(6t+4,6,[2,1,1])_4$码中，每个位置都$2t+1+2t+1 = 4t+2$非零元素。对于某个位置x，删除所有该位置非零的$4t+2$个码字，再将剩下码字中的x位置（已经全部为0）删除。这样得到的码字集构成一个$(6t+3,6,[2,1,1])_4$码，且大小为$U(6t+4,6,[2,1,1]) - 4t - 2 = 6t^2 + 3t = U(6t+3,6,[2,1,1])$。 □

引理 3.25: 对于每个$t \geq 4$，均存在一个组型为12^t9^1的$[2,1,1]$-GDC(6)。

证明. 对于$t \in \{4,5,\ldots,15\} \cup \{17,18,19,23\}$，由引理 3.15知，总存在一个组型为$12^t9^1$的$[2,1,1]$-GDC$(6)$。

当$t \in \{16,21,22,26,27,28,31,32,33\}$时，首先分别构造组型如下的九个GDC：$48^4$，$48^460^1$，$48^472^1$，$48^572^1$，$60^484^1$，$84^4$，$48^684^1$，$84^448^1$ 和84^460^1。具体构造方法为：

1. $t = 16$时，取一个TD$(4,8)$（见引理 2.8)。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可得一个组型为48^4的$[2,1,1]$-GDC(6)。

2. $t = 21$时，取一个TD$(5,5)$（见引理 2.8)。删除同一个区组中的四个点可得一个组型为4^45^1的$\{4,5\}$-GDD。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为12, 可得一个组型为48^460^1的$[2,1,1]$-GDC(6)。

3. $t \in \{22,26\}$时，取一个组型为12^u18^1的4-GDD（见引理 2.5)。当$t = 22$时，$u = 4$；当$u = 26$时，$u = 5$。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为4, 可得到一个组型为48^u72^1的$[2,1,1]$-GDC(6)。

4. $t = 27$时，取一个组型为15^421^1的4-GDD（见引理 2.5)。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为4, 可得一个组型为60^484^1的$[2,1,1]$-GDC(6)。

5. $t = 28$时，取一个TD$(4,14)$（见引理 2.8)。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可得一个组型为84^4的$[2,1,1]$-GDC(6)。

6. $t = 31$时，取一个组型为4^67^1的4-GDD（见引理 2.5)。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为12, 可得一个组型为48^684^1的$[2,1,1]$-GDC(6)。

7. $t \in \{32,33\}$时，取一个TD$(5,14)$（见引理 2.8)。删除同一个组中的u个点可得一个组型为$14^4(14-u)^1$的$\{4,5\}$-GDD。当$t = 32$时，$u = 6$；当$u = 33$时，$u = 4$。应用构造 2.3，对这个设计中的所有点赋权为6, 可分别得到一个组型为$84^4(84-6u)^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。

以上构造中所需的输入设计是组型分别为4^4，6^4，12^4以及12^5的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14)。在上述这些GDC上添加九个点，并用组型分别为12^49^1，12^59^1，

$12^6 9^1$和$12^7 9^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.15）填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个组型为$12^t 9^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。

对于每个$t \geq 34$ 或$t \in \{20, 24, 25, 29, 30\}$，取一个$(t+1, \{5,6,7,8,9\}, 1)$-PBD（见引理 2.2），删除其中一个点可得到一个组型为$4^i 5^j 6^k 7^l 8^m$的$\{5,6,7,8,9\}$-GDD，其中$4i+5j+6k+7l+8m=t$。应用构造 2.3，对这个GDD的每个点赋权为12。所需的输入设计为组型为12^t的$[2,1,1]$-GDC(6)，其中$t \in \{5,6,7,8,9\}$（见引理 3.21）。这样得到一个组型为$48^i 60^j 72^k 84^l 96^m$，点数为$12t$的$[2,1,1]$-GDC(6)。在这个GDC上添加九个点，并用组型分别为$12^5 9^1$，$12^6 9^1$，$12^7 9^1$，$12^8 9^1$以及$12^9 9^1$ 的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.15）填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个组型为$12^t 9^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。 □

定理 3.15: *对于每个$t \geq 0$，均存在一个大小为$(4t+3)(6t+5)$的最优$(12t+10, 6, [2,1,1])_4$码。*

证明. 对于$t \in \{0,1,2\}$，由引理 3.18 可知存在一个大小为$(4t+3)(6t+5)$的最优$(12t+10, 6, [2,1,1])_4$码。

对于$t=3$，存在一个组型为3^5的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14）。利用一个TD(4,3)，应用构造 2.4 可得到一个组型为9^5的$[2,1,1]$-GDC(6)。在这个GDC上添加一个点，并利用长度为10的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个长度为46的最优码。

对于$t \geq 4$，存在一个组型为$12^t 9^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.25）。在这个GDC上添加一个点，并利用长度分别为10以及13的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个大小为$(4t+3)(6t+5)$的最优$(12t+10, 6, [2,1,1])_4$码。

□

定理 3.16: *对于每个$0 \leq t \leq 15$，均存在一个大小为$(4t+5)(6t+8)$的最优$(12t+16, 6, [2,1,1])_4$码。*

证明. 对于$t \in \{0,1\}$，由引理 3.18 可知存在一个大小为$(4t+5)(6t+8)$的最优$(12t+16, 6, [2,1,1])_4$码。

对于$t=2$，存在一个组型为10^4的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14）。用长度为10的最优码填入这个GDC的组中。最终得到一个长度为40的最优码。

对于$t=3$，存在一个组型为13^4的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14）。用长度为13的最优码填入这个GDC的组中。最终得到一个长度为52的最优码。

对于$t=4$，存在一个组型为3^7的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14）。利用一个TD$(4,3)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为9^7的$[2,1,1]$-GDC(6)。在这个GDC上添加一个点，并利用长度为10的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个长度为64的最优码。

对于$t=5$，存在一个组型为3^5的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14）。利用一个TD$(4,5)$，应用构造 2.4 可得到一个组型为15^5的$[2,1,1]$-GDC(6)。在这个GDC上添加一个点，并利用长度为16的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个长度为76的最优码。

对于$t=6$，存在一个组型为22^4的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14）。用长度为22的最优码填入这个GDC的组中。最终得到一个长度为88的最优码。

对于$t\in\{7,8,\ldots,15\}$，存在一个组型为12^t15^1的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.15）。在这个GDC上添加一个点，并利用长度分别为13以及16的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个大小为$(4t+5)(6t+8)$的最优$(12t+16,6,[2,1,1])_4$码。 □

定理 3.17: 对于每个$t\geq 16$，均存在一个大小为$(4t+5)(6t+8)$的最优$(12t+16,6,[2,1,1])_4$码。

证明. 对于$t\geq 16$，取一个TD$(6,2r)$（见引理 2.8），其中$r\geq 4$并且$r\notin\{5,7,9,11\}$。应用构造 2.3，对这个设计的前4组中的所有点，第5组中的$2x$个点以及最后一个组中的y个点赋权为6。剩下的全部点赋权为0。其中要求$x=0$或者$x\geq 4$，要求$1\leq y\leq 31$并且y是奇数。所需的输入设计是组型分别为6^4，6^5以及6^6的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14 ）。这样得到一个组型为$(12r)^4(12x)^1(6y)^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。在这个GDC上添加九个点，并利用组型分别为12^u9^1的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.25 ）填入这个GDC的组以及刚添加的点中。其中$u\geq 4$。这样得到一个组型为$12^{4r+x}(6y+9)^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。在这个GDC上添加一个点，并利用长度分

别为13以及$6y+10$的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个最优$(48r+12x+6y+10, 6, [2,1,1])_4$码，其中$48r+12x+6y+10$可取遍所有$12t+16$且$t \geq 16$的值。 □

定理 3.18: 对于每个$t \geq 1$，均存在一个大小为$6t^2+3t$的最优$(6t+3, 6, [2,1,1])_4$码。

证明. 由引理 3.24和定理 3.15–3.17 可得结论。 □

3.3.5 长度$n \equiv 5 \pmod 6$的情况

引理 3.26: $A_4(5, 6, [2,1,1]) = 1$。

证明. 所需的1个码字为$\langle 0,1,2,3 \rangle$。 □

定理 3.19: 对于每个$t \geq 0$，均存在一个大小为$24t^2+40t+16$的最优$(12t+11, 6, [2,1,1])_4$码。

证明. 对于$t \in \{0,1,2\}$，由引理 3.18 可知存在一个大小为$24t^2+40t+16$的最优$(12t+11, 6, [2,1,1])_4$码。

对于$t=3$，存在一个组型为$1^{36}11^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.17）。利用最优$(11, 6, [2,1,1])_4$码填入这个GDC的组中，得到一个最优$(47, 6, [2,1,1])_4$码。

对于$t \geq 4$，存在一个组型为12^t9^1的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.25）。在这个GDC上添加两个点，并分别利用组型为$1^{12}2^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)和最优$(11, 6, [2,1,1])_4$码（见引理 3.16 和 3.18）填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个大小为$24t^2+40t+16$的最优$(12t+11, 6, [2,1,1])_4$码。 □

定理 3.20: 对于每个$t \geq 0$，均存在一个大小为$24t^2+64t+42$的最优$(12t+17, 6, [2,1,1])_4$码。

证明. 对于$t=0$，由引理 3.18 可知存在一个大小为42的最优$(17, 6, [2,1,1])_4$码。

对于$t=1$，存在一个组型为7^4的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14）。在这个GDC上添加一个点，并利用长度为8的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个长度为29的最优码。

对于$t \in \{2,4,5,6\}$，存在一个组型为$1^{12t+6}11^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.17）。利用长度为11的最优码填入这个GDC的组中。最终得到一个最优 $(12t+17,6,[2,1,1])_4$码。

对于$t=3$，存在一个组型为13^4的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14）。在这个GDC上添加一个点，并利用长度为14的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个长度为53的最优码。

对于$t \in \{7,8,\ldots,15\}$，存在一个组型为12^t15^1的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.15）。在这个GDC上添加两个点，并分别利用组型为$1^{12}2^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)以及最优$(17,6,[2,1,1])_4$码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个最优$(12t+17,6,[2,1,1])_4$码。

对于$t \geq 16$，取一个TD$(6,2r)$（见引理 2.8），其中$r \geq 4$并且$r \notin \{5,7,9,11\}$。应用构造 2.3，对这个设计的前4组中的所有点，第5组中的$2x$个点以及最后一个组中的y个点赋权为6。剩下的全部点赋权为0。其中要求$x=0$或者$x \geq 4$，要求$1 \leq y \leq 31$并且y是奇数。所需的输入设计是组型分别为6^4，6^5以及6^6的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.14 ）。这样得到一个组型为$(12r)^4(12x)^1(6y)^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。在这个GDC上添加九个点，并利用组型分别为12^u9^1的$[2,1,1]$-GDC(6)（见引理 3.25 ）填入这个GDC的组以及刚添加的点中。其中$u \geq 4$。这样得到一个组型为$12^{4r+x}(6y+9)^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)。在这个GDC上添加两个点，并分别利用组型为$1^{12}2^1$的$[2,1,1]$-GDC(6)以及长度为$6y+11$的最优码（见定理 3.16）填入这个GDC的组以及刚添加的点中。最终得到一个最优$(48r+12x+6y+11,6,[2,1,1])_4$码，其中$48r+12x+6y+11$可取遍所有$12t+17$且$t \geq 16$的值。 □

3.4 总结

在这一章中，重量为4、极小距离为5或6的四元最优常重复合码的码字个数被基本确定。最终得到的结论如下：

定理 3.21：对于任意的$n \geq 4$，

$$A_4(n,5,[2,1,1]) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 4 \\ 2, & \text{如果} n = 5 \\ 6, & \text{如果} n = 6 \\ 10, & \text{如果} n = 7 \\ n\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, & \text{如果} n \geq 12 \text{ 并且} n \neq 13. \end{cases}$$

$$A_4(8,5,[2,1,1]) \geq 18,$$

$$A_4(9,5,[2,1,1]) \geq 27,$$

$$A_4(10,5,[2,1,1]) \geq 36,$$

$$A_4(11,5,[2,1,1]) \geq 48,$$

$$A_4(13,5,[2,1,1]) \geq 72.$$

定理 3.22：对于任意的$n \geq 4$，

$$A_4(n,6,[2,1,1]) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 4,5 \\ 4, & \text{如果} n = 7 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor, & \text{如果} n \geq 6 \text{ 并且} n \neq 7. \end{cases}$$

4 距离为6、复合构型为$[2,2]$的三元常重复合码

在这一章中，将主要通过可分组编码和斜Room frame的方法，研究距离为6、复合构型为[2,2]的最优三元常重复合码的构造问题。除了一类码长和其他类中少数的几个值外，这个问题得到了较好的解决。此前这类三元常重复合码的结果是较少的。

4.1 准备工作

4.1.1 码字上界和DGDD

由第 3 章中的引理 3.2 和引理 3.1 可以得到：

推论 4.1:

$$A_3(n,6,[2,2]) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor$$

记$U(n,6,[2,2]) = \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor$。

除了第 3 章中介绍的组合设计外，这一章中还需要用到一类特殊的GDD。

一个双重可分组设计（DGDD）是一个四元组$(X,\mathcal{H},\mathcal{G},\mathcal{B})$，其中$X$是点集，$\mathcal{H}$和$\mathcal{G}$都是$X$的划分（其中的元素分别称为洞和组），而$\mathcal{B}$是一些$X$的子集（称为区组）的集合，使得：

(i) 对于每一个区组$B \in \mathcal{B}$和每一个洞$H \in \mathcal{H}, |B \cap H| \leq 1$；

(ii) 对于X中任何两个不在同一个洞中的点组成的点对要么出现在某个组中，要么在某个区组中恰好出现一次。

一个组型为$(g_1,h_1^v)^{u_1}(g_2,h_2^v)^{u_2}\dots(g_s,h_s^v)^{u_s}$的$K$-DGDD是一个双重可分组设计，且其中每个区组大小的值都在集合K中，并有u_i个大小为g_i且和v个洞交于h_i个点的组。一个组型为g^u的改进的可分组设计（K-MGDD）是一个组型为$(g,1^g)^u$的K-DGDD。

4.1.2 斜Room frame构造

从一个型为t^u的斜Room frame，可以得到一个组型为$(6t)^u$的4-GDD（见[88]）。区组集$\mathcal{B}$包含所有$\{(a,j),(b,j),(c,1+j),(r,4+j)\}$这样的区组，其中$j\in\mathbb{Z}_6$，而$\{a,b\}$出现在Room frame中的第$r$行、第$c$列。

引理 4.1 ([100,101]): 一个型为t^u的斜Room frame存在的必要条件，$u\geq 4$且$t(u-1)$是偶数，同样是充分的，除了当$(t,u)\in\{(1,5),(2,4)\}$的情况，和下列一些可能的例外:

(i) $u=4$ 且$t\equiv 2 \pmod 4$，

(ii) $u=5$ 且$t\in\{17,19,23,29,31\}$。

引理 4.2: 如果存在一个型为t^u的斜Room frame，则存在一个组型为$(6t)^u$的$[2,2]$-GDC(6)。

证明. 令F是一个型为t^u的斜Room frame。在组集合$\{\{(i+k,j):0\leq i\leq t-1,j\in\mathbb{Z}_6\}:k=0,t,\ldots,t(u-1)\}$上构造一个组型为$(6t)^u$的$[2,2]$-GDC$(6)$。编码包含所有$\langle(a,j),(b,j),(c,1+j),(r,4+j)\rangle$和$\langle(c,4+j),(r,1+j),(x,j),(y,j)\rangle$这样的码字，其中$j\in\mathbb{Z}_6$，而$\{a,b\}$出现在Room frame中的第$r$行、第$c$列。 □

结合引理 4.1 和 4.2 ，可得到下面的结果。

定理 4.1: 如果$u\geq 4$且$t(u-1)$是偶数，则存在一个组型为$(6t)^u$、大小为$6t^2u(u-1)$的$[2,2]$-GDC(6)，除了当$(t,u)\in\{(1,5),(2,4)\}$的情况，以及下列一些可能的例外:

(i) $u=4$ 且$t\equiv 2 \pmod 4$,

(ii) $u=5$ 且$t\in\{17,19,23,29,31\}$.

4.2 长度$n \equiv 0,1,2,5 \pmod 6$的情况

4.2.1 一些$[2,2]$-GDC(6)

引理 4.3: *存在一个组型为2^{10}的$[2,2]$-GDC(6)。*

证明. 令$X=\mathbb{Z}_{20}$，$\mathcal{G}=\{\{i,i+10\}:0\le i\le 9\}$。则$(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$是一个组型为$2^{10}$的$[2,2]$-GDC(6)，其中$\mathcal{C}$是由下列码字在$\mathbb{Z}_{20}$中循环生成：$\langle 0,5,3,7\rangle,\langle 0,4,1,13\rangle,\langle 0,8,14,19\rangle$。 □

引理 4.4: *对于每个$5\le t\le 11$均存在一个组型为6^t，大小为$6t(t-1)$的$[2,2]$-GDC(6)。*

证明. 对于$t\in\{5,8\}$，令$X=\mathbb{Z}_{6t}$，$\mathcal{G}_t=\{\{i,i+t,i+2t,i+3t,i+4t,i+5t\}:0\le i\le t-1\}$。则$(X_t,\mathcal{G}_t,\mathcal{C}_t)$是一个组型为$6^t$的$[2,2]$-GDC(6)，其中$\mathcal{C}_t$是由下列码字在$\mathbb{Z}_{6t}$中$+1 \pmod{6t}$生成：

$t=5$: $\langle 0,24,1,13\rangle$ $\langle 0,9,8,11\rangle$ $\langle 0,3,17,26\rangle$ $\langle 0,12,4,28\rangle$

$t=8$: $\langle 0,18,13,3\rangle$ $\langle 0,28,21,25\rangle$ $\langle 0,10,22,36\rangle$ $\langle 0,46,27,9\rangle$ $\langle 0,14,31,37\rangle$ $\langle 0,6,5,7\rangle$ $\langle 0,4,19,39\rangle$

对于$t=6$，令$X_6=\mathbb{Z}_{12}\times I_3$，$\mathcal{G}_6=\{\{(i,0),(i+6,0),(i,1),(i+6,1),(i,2),(i+6,2),\}:0\le i\le 5\}$。则$(X_6,\mathcal{G}_6,\mathcal{C}_6)$ 是一个组型为6^6、大小为180的$[2,2]$-GDC(6)，其中$\mathcal{C}_6$是由下列码字在$\mathbb{Z}_{12}\times I_3$中$(+1 \pmod{12},-)$生成：

$$
\begin{array}{lll}
\langle(0,0)(2,0)(7,2)(4,2)\rangle & \langle(0,1)(9,1)(10,0)(5,0)\rangle & \langle(0,1)(3,0)(4,2)(2,2)\rangle \\
\langle(0,1)(11,0)(8,2)(7,2)\rangle & \langle(0,2)(2,2)(4,1)(7,0)\rangle & \langle(0,1)(7,0)(10,2)(5,2)\rangle \\
\langle(0,2)(9,1)(5,1)(8,2)\rangle & \langle(0,2)(9,2)(1,0)(11,0)\rangle & \langle(0,1)(9,2)(1,2)(4,1)\rangle \\
\langle(0,1)(9,0)(11,1)(1,1)\rangle & \langle(0,0)(5,0)(8,0)(9,0)\rangle & \langle(0,0)(11,0)(7,1)(10,1)\rangle \\
\langle(0,2)(5,2)(8,0)(1,1)\rangle & \langle(0,2)(11,2)(10,1)(9,0)\rangle & \langle(0,1)(2,1)(4,0)(7,1)\rangle
\end{array}
$$

对于每个$t\in\{7,9,11\}$，所需的GDC可以由定理 4.1 得到。对于$t=10$，应用构造 2.4 ，利用一个组型为2^{10}的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.3 ）和一个TD$(4,3)$（见引理 2.8 ）可以得到一个组型为6^{10}的$[2,2]$-GDC(6)。 □

令$P=[9,19]\cup[21,23]\cup[26,28]\cup[31,33]$。

引理 4.5: 对于每个$t \geq 9$且$t \notin P$，存在一个组型为$24^i 30^j 36^k 42^l 48^m$的$[2,2]$-GDC(6)。其中i，j，k，l，m是整数，且$4i+5j+6k+7l+8m=t$。

证明. 对于每个$t \geq 9$且$t \notin P$，取一个$(t+1, \{5,6,7,8,9\}, 1)$-PBD（见引理 2.2 ），删除其中一个点可得到一个组型为$4^i 5^j 6^k 7^l 8^m$的$\{5,6,7,8,9\}$-GDD，其中$4i+5j+6k+7l+8m=t$。应用构造 2.3，对这个GDD的每个点赋权为6。所需的输入设计为组型为6^u的$[2,2]$-GDC(6)，其中$u \in \{5,6,7,8,9\}$（见引理 4.4）。这样得到一个组型为$24^i 30^j 36^k 42^l 48^m$的$[2,2]$-GDC(6)。 □

引理 4.6: 下列$[2,2]$-GDC(6)存在:

i) 组型为18^u且大小为$54u(u-1)$，其中$u \in \{4,5,6,7,9,11\}$;

ii) 组型为24^u且大小为$96u(u-1)$，其中$u \in \{4,7,8\}$;

iii) 组型为$24^u 36^1$且大小为$96u(u+2)$，其中$u \in \{4,5\}$;

iv) 组型为$18^8 42^1$且大小为5040;

v) 组型为$30^4 18^1$且大小为2520;

vi) 组型为$24^4 18^1$且大小为1728。

证明. 对于i)，组型为18^4的$[2,2]$-GDC(6)在引理 4.23 中直接构造得到。对于每个$t \in \{5,6,7,9,11\}$，取一个组型为6^t的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.4 ），应用构造 2.4，利用一个TD(4,3)（见引理 2.8 ）可以得到一个组型为18^t的$[2,2]$-GDC(6)。

对于ii)，所需的GDC可以从定理 4.1 得到。

对于iii)，应用构造 2.3 ，对一个组型为$6^u 9^1$的4-GDDs（见[102]定理1.6）的所有点赋权为4。所需的输入设计为组型为4^4的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.23 ）。

对于iv)，取一个组型为3^8的4-RGDD（见引理 2.6），其中有7个平行类。在每个平行类外面添加一个点，可得到一个组型为$3^8 7^1$的5-GDD。应用构造 2.3 ，对这个GDD的所有点赋权为6，可以得到一个组型为$18^8 42^1$的$[2,2]$-GDC(6)。所需的输入设计为组型为6^5的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.4 ）。

对于v)，取一个TD$(5,5)$（见引理 2.8）。应用构造 2.3，对这个设计的前4组中的所有点以及最后一个组中的1个点赋权为6，对其余的点赋权为3。所需的输入设计为组型分别为6^5 以及$6^4 3^1$的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.4 和 4.24 ）。这样得到一个组型为$30^4 18^1$的$[2,2]$-GDC(6)。

对于vi)，取一个TD$(5,4)$（见引理 2.8）。应用构造 2.3，对这个设计的前4组中的所有点以及最后一个组中的2个点赋权为6，对其余的点赋权为3。所需的输入设计为组型分别为6^5 以及$6^4 3^1$的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.4 和 4.24 ）。这样得到一个组型为$24^4 18^1$的$[2,2]$-GDC(6)。 □

4.2.2 $n \equiv 1 \pmod 6$

引理 4.7: $A_3(7,6,[2,2]) = 3$，$A_3(13,6,[2,2]) \geq 21$。

证明. 对于$n = 7$，$A_3(7,6,[2,2]) \leq 3$可以从[46] 中关于$(7,6,4)_3$码的结果得到。在$\mathbb{Z}_7$上构造一个所需的编码，码字为$\langle 0,1,2,3\rangle$ $\langle 0,4,5,6\rangle$ $\langle 2,5,1,4\rangle$。

对于$n = 13$，21个所需的码字如下：

$\langle 4,11,2,9\rangle$	$\langle 11,7,1,6\rangle$	$\langle 2,5,0,7\rangle$	$\langle 9,12,11,7\rangle$	$\langle 1,4,7,10\rangle$	$\langle 10,5,8,4\rangle$
$\langle 0,1,2,3\rangle$	$\langle 0,12,10,5\rangle$	$\langle 1,6,9,12\rangle$	$\langle 0,6,4,11\rangle$	$\langle 8,6,3,7\rangle$	$\langle 10,7,12,2\rangle$
$\langle 8,4,0,12\rangle$	$\langle 2,12,6,8\rangle$	$\langle 0,7,8,9\rangle$	$\langle 5,11,3,12\rangle$	$\langle 3,12,1,4\rangle$	$\langle 1,8,11,5\rangle$
$\langle 9,3,5,6\rangle$	$\langle 2,3,10,11\rangle$	$\langle 9,10,0,1\rangle$			

□

引理 4.8: 对于每个$t \in [3,11] \cup \{13,14,17\}$，$A_3(6t+1,6,[2,2]) = U(6t+1,6,[2,2])$。

证明. 对于每个$t \in [3,11] \cup \{13,14,17\}$ 且$t \neq 4$，令$X_t = \mathbb{Z}_{6t+1}$。则$(X_t, \mathcal{C}_t)$是所需的最优$(6t+1,6,[2,2])_3$码，其中$\mathcal{C}_t$由表 4.1 中的码字在$\mathbb{Z}_{6t+1}$中$+1 \pmod{6t+1}$生成。

对于$t = 4$，令$X_4 = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$。则$(X_4, \mathcal{C}_4)$是所需的最优$(25,6,[2,2])_3$码，其中$\mathcal{C}_4$由表 4.1 中的码字在$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$中$(+1 \pmod 5, +1 \pmod 5)$生成。 □

引理 4.9: 对于每个$t \geq 12$ 且$t \notin \{13,14,17\}$，$A_3(6t+1,6,[2,2]) = U(6t+1,6,[2,2])$。

证明. 对所有$t \geq 12$ 且$t \notin P$，取引理 4.5 中组型为$24^i 30^j 36^k 42^l 48^m$的$[2,2]$-GDC(6)，其中$4i + 5j + 6k + 7l + 8m = t$。在这个GDC上添加一个点，并用长度分别为25，

表 4.1　引理 4.8 中码字长度较小的最优$(6t+1,6,[2,2])_3$码的基码字

t	码字
3	$\langle 0,1,4,16\rangle$ $\langle 0,7,9,17\rangle$ $\langle 0,8,13,14\rangle$
4	$\langle (0,3),(2,0),(3,0),(4,3)\rangle$ $\langle (0,2),(2,3),(2,1),(0,4)\rangle$ $\langle (0,2),(1,0),(1,4),(0,3)\rangle$ $\langle (0,0),(1,1),(2,0),(4,1)\rangle$
5	$\langle 0,3,11,23\rangle$ $\langle 0,7,2,5\rangle$ $\langle 0,6,15,22\rangle$ $\langle 0,14,4,10\rangle$ $\langle 0,12,13,30\rangle$
6	$\langle 0,23,27,35\rangle$ $\langle 0,8,11,17\rangle$ $\langle 0,5,25,1\rangle$ $\langle 0,6,22,36\rangle$ $\langle 0,18,2,7\rangle$ $\langle 0,13,10,28\rangle$
7	$\langle 0,35,26,23\rangle$ $\langle 0,16,33,37\rangle$ $\langle 0,29,22,38\rangle$ $\langle 0,3,10,18\rangle$ $\langle 0,30,11,12\rangle$ $\langle 0,1,6,20\rangle$ $\langle 0,4,2,32\rangle$
8	$\langle 0,36,40,45\rangle$ $\langle 0,28,14,47\rangle$ $\langle 0,42,10,32\rangle$ $\langle 0,33,25,18\rangle$ $\langle 0,44,15,26\rangle$ $\langle 0,11,48,12\rangle$ $\langle 0,43,23,2\rangle$ $\langle 0,22,3,46\rangle$
9	$\langle 0,8,1,21\rangle$ $\langle 0,43,19,42\rangle$ $\langle 0,32,34,39\rangle$ $\langle 0,20,30,45\rangle$ $\langle 0,28,9,26\rangle$ $\langle 0,17,41,14\rangle$ $\langle 0,15,6,18\rangle$ $\langle 0,5,16,49\rangle$ $\langle 0,22,4,51\rangle$
10	$\langle 0,27,36,41\rangle$ $\langle 0,11,21,39\rangle$ $\langle 0,3,22,26\rangle$ $\langle 0,1,47,53\rangle$ $\langle 0,5,35,37\rangle$ $\langle 0,17,24,25\rangle$ $\langle 0,2,15,42\rangle$ $\langle 0,4,33,16\rangle$ $\langle 0,6,51,54\rangle$ $\langle 0,18,38,49\rangle$
11	$\langle 0,20,33,44\rangle$ $\langle 0,1,32,41\rangle$ $\langle 0,10,49,53\rangle$ $\langle 0,30,48,51\rangle$ $\langle 0,3,28,65\rangle$ $\langle 0,7,26,36\rangle$ $\langle 0,11,16,17\rangle$ $\langle 0,8,23,35\rangle$ $\langle 0,9,54,61\rangle$ $\langle 0,4,42,50\rangle$ $\langle 0,12,14,34\rangle$
13	$\langle 0,11,54,56\rangle$ $\langle 0,5,49,60\rangle$ $\langle 0,18,35,64\rangle$ $\langle 0,63,66,76\rangle$ $\langle 0,29,65,71\rangle$ $\langle 0,10,24,33\rangle$ $\langle 0,20,51,67\rangle$ $\langle 0,7,15,19\rangle$ $\langle 0,1,22,40\rangle$ $\langle 0,9,57,62\rangle$ $\langle 0,4,34,41\rangle$ $\langle 0,2,27,28\rangle$ $\langle 0,6,38,58\rangle$
14	$\langle 0,9,41,53\rangle$ $\langle 0,1,50,83\rangle$ $\langle 0,45,47,63\rangle$ $\langle 0,46,61,70\rangle$ $\langle 0,4,25,59\rangle$ $\langle 0,17,27,28\rangle$ $\langle 0,52,57,65\rangle$ $\langle 0,8,56,75\rangle$ $\langle 0,16,74,80\rangle$ $\langle 0,19,22,62\rangle$ $\langle 0,6,29,36\rangle$ $\langle 0,7,38,42\rangle$ $\langle 0,12,26,72\rangle$ $\langle 0,34,54,71\rangle$
17	$\langle 0,20,62,63\rangle$ $\langle 0,10,58,88\rangle$ $\langle 0,3,59,95\rangle$ $\langle 0,17,24,50\rangle$ $\langle 0,1,76,97\rangle$ $\langle 0,12,46,66\rangle$ $\langle 0,26,39,41\rangle$ $\langle 0,14,69,79\rangle$ $\langle 0,2,6,18\rangle$ $\langle 0,36,64,81\rangle$ $\langle 0,74,85,99\rangle$ $\langle 0,5,40,49\rangle$ $\langle 0,19,87,90\rangle$ $\langle 0,9,47,70\rangle$ $\langle 0,21,53,72\rangle$ $\langle 0,30,52,57\rangle$ $\langle 0,23,31,60\rangle$

31，37，43和49的最优码填入这个GDC的组以及刚添加的点中。这样可得到所需的编码。

对于$t \in \{12,15,16,18,19,21,22,23,26,27,28,31,32,33\}$，取引理 4.6 中构造的$[2,2]$-GDC(6)。在这些GDC上添加一个点，并用小长度的最优码填入这些GDC的组以及刚添加的点中。这样可得到所需的编码。 □

定理 4.2：对于每个$t \geq 3$，$A_3(6t+1,6,[2,2]) = U(6t+1,6,[2,2])$；$A_3(7,6,[2,2]) = 3$；$A_3(13,6,[2,2]) \geq 21$。

4.2.3 $n \equiv 0 \pmod 6$

定理 4.3：对于每个$t \geq 1$，$A_3(6t,6,[2,2]) = U(6t,6,[2,2])$。

证明. 对于$t \in \{1,2\}$，令$X_t = \mathbb{Z}_{6t}$。则$\mathcal{C}_t$是由下列码字在$\mathbb{Z}_{6t}$中$+2 \pmod{6t}$生成的。

$t=1$: $\langle 0,1,2,3\rangle$

$t=2$: $\langle 0,2,8,5\rangle$ $\langle 0,9,7,11\rangle$ $\langle 1,5,0,10\rangle$

对于每个$t \geq 3$，从定理 4.2 取一个最优$(6t+1,6,[2,2])_3$码中。对于某个位置x，删除所有该位置非零的码字，再将剩下码字中的x位置（已经全部为0）删除。这样得到的码字集构成一个最优$(6t,6,[2,2])_3$码。 □

4.2.4 $n \equiv 2 \pmod 6$

引理 4.10：$A_3(8,6,[2,2]) = 5$，$A_3(14,6,[2,2]) \geq 27$。

证明. 对于$n=8$，$A_3(8,6,[2,2]) \leq 5$可以从[46]中关于$(8,6,4)_3$码的结果得到。在$\mathbb{Z}_8$上构造一个所需的编码，码字为$\langle 0,1,2,3\rangle$ $\langle 0,4,5,6\rangle$ $\langle 1,5,4,7\rangle$ $\langle 2,3,6,7\rangle$ $\langle 6,7,0,1\rangle$。

对于$n=14$，所需的码字为：

$\langle 0,2,5,9\rangle$	$\langle 5,9,6,10\rangle$	$\langle 6,10,3,4\rangle$	$\langle 0,7,11,12\rangle$	$\langle 7,9,2,4\rangle$	$\langle 5,7,1,13\rangle$
$\langle 8,13,0,2\rangle$	$\langle 8,10,9,11\rangle$	$\langle 0,4,1,8\rangle$	$\langle 2,11,6,8\rangle$	$\langle 9,11,0,3\rangle$	$\langle 9,12,8,13\rangle$
$\langle 1,8,3,5\rangle$	$\langle 1,10,0,7\rangle$	$\langle 6,13,7,9\rangle$	$\langle 1,13,4,11\rangle$	$\langle 3,4,9,12\rangle$	$\langle 2,12,3,7\rangle$
$\langle 3,5,2,11\rangle$	$\langle 10,13,5,12\rangle$	$\langle 5,12,0,4\rangle$	$\langle 4,11,5,7\rangle$	$\langle 1,6,2,12\rangle$	$\langle 11,12,1,10\rangle$
$\langle 3,7,8,10\rangle$	$\langle 0,3,6,13\rangle$	$\langle 2,4,10,13\rangle$			

□

容易看出，如果存在一个组型为2^{3t+1}，大小为$2t(3t+1)$的$[2,2]$-GDC(6)，则存在一个最优$(6t+2,6,[2,2])_3$码。因此在这一节中将主要构造组型为2^{3t+1}，大小为$2t(3t+1)$的$[2,2]$-GDC(6)。

引理 4.11: *对于每个$3\leq t\leq 11$ 或$t\in\{14,17\}$，都存在一个组型为2^{3t+1}，大小为$2t(3t+1)$ 的$[2,2]$-GDC(6)。*

证明. 对于$t=3$，相应的编码已在引理 4.3 中构造。

对于每个$4\leq t\leq 11$ 或者$t\in\{14,17\}$，令$X_t=\mathbb{Z}_{6t+2}$，且$\mathcal{G}_t=\{\{i,i+3t+1\}:0\leq i\leq 3t\}$。则$(X_t,\mathcal{G}_t,\mathcal{C}_t)$是一个组型为$2^{3t+1}$且大小为$2t(3t+1)$的$[2,2]$-GDC(6)。其中当$t\neq 5$，$\mathcal{C}_t$可以由表 4.2 中的码字在$\mathbb{Z}_{6t+2}$中$+1 \pmod{6t+2}$生成。而$\mathcal{C}_5$可以由表 4.2 中的码字在$\mathbb{Z}_{32}$中$+2 \pmod{32}$生成。 □

引理 4.12: *对于每个$t\geq 12$ 且$t\notin\{14,17\}$，都存在一个组型为2^{3t+1}且大小为$2t(3t+1)$的$[2,2]$-GDC(6)。*

证明. 对于$t\geq 12$ 且$t\notin P$，取引理 4.5 中组型为$24^i30^j36^k42^l48^m$的$[2,2]$-GDC(6)，其中$4i+5j+6k+7l+8m=t$。在这个GDC上添加两个点，并用组型分别为2^u的$[2,2]$-GDC(6)填入这个GDC的组以及刚添加的点中，其中$u\in\{13,16,19,22,25\}$。这样可得到所需的编码。

对于每个$t\in\{12,15,16,18,19,21,22,23,26,27,28,31,32,33\}$，取引理 4.6 中构造的$[2,2]$-GDC(6)。在这些GDC上添加两个点，并用组型分别为2^u的$[2,2]$-GDC(6)填入这个GDC的组以及刚添加的点中，其中$u\in\{10,13,16,19,22\}$。这样可得到所需的编码。

对于$t=13$，取一个TD(4,5)（见引理 2.8 ）。应用构造 2.3，对这个设计所有点赋权为4。所需的输入设计为组型为4^4的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.23 ）。这样得到一个组型为20^4的$[2,2]$-GDC(6)。用组型为2^{10}的$[2,2]$-GDC(6)填入这个GDC的组中。这样可得到所需的编码。 □

定理 4.4: *对于每个$t\geq 3$，$A_3(6t+2,6,[2,2])=U(6t+2,6,[2,2])$；$A_3(8,6,[2,2])=5$；$A_3(14,6,[2,2])\geq 27$。*

表 4.2　引理 4.11 中组型为2^{3t+1}的[2, 2]-GDC(6)的基码字

t	码字
4	$\langle 0,4,3,11\rangle$ $\langle 0,5,6,15\rangle$ $\langle 0,9,2,23\rangle$ $\langle 0,8,20,24\rangle$
5	$\langle 0,28,9,29\rangle$ $\langle 1,7,2,12\rangle$ $\langle 0,15,24,7\rangle$ $\langle 0,10,30,12\rangle$ $\langle 0,18,23,21\rangle$ $\langle 1,14,22,9\rangle$ $\langle 1,21,4,8\rangle$ $\langle 0,26,25,11\rangle$ $\langle 1,15,11,5\rangle$ $\langle 1,3,0,26\rangle$
6	$\langle 0,7,20,5\rangle$ $\langle 0,21,11,27\rangle$ $\langle 0,23,14,35\rangle$ $\langle 0,30,24,25\rangle$ $\langle 0,22,18,26\rangle$ $\langle 0,1,3,10\rangle$
7	$\langle 0,5,21,33\rangle$ $\langle 0,32,34,42\rangle$ $\langle 0,14,23,29\rangle$ $\langle 0,6,7,25\rangle$ $\langle 0,36,40,35\rangle$ $\langle 0,20,17,3\rangle$ $\langle 0,18,11,31\rangle$
8	$\langle 0,40,29,34\rangle$ $\langle 0,30,2,11\rangle$ $\langle 0,37,3,33\rangle$ $\langle 0,45,12,27\rangle$ $\langle 0,35,21,8\rangle$ $\langle 0,49,18,42\rangle$ $\langle 0,9,7,6\rangle$ $\langle 0,24,28,38\rangle$
9	$\langle 0,39,33,45\rangle$ $\langle 0,12,48,53\rangle$ $\langle 0,22,35,9\rangle$ $\langle 0,5,3,37\rangle$ $\langle 0,29,31,47\rangle$ $\langle 0,4,25,42\rangle$ $\langle 0,1,11,15\rangle$ $\langle 0,16,23,24\rangle$ $\langle 0,26,19,46\rangle$
10	$\langle 0,9,38,57\rangle$ $\langle 0,22,30,33\rangle$ $\langle 0,15,39,5\rangle$ $\langle 0,20,12,21\rangle$ $\langle 0,58,23,45\rangle$ $\langle 0,3,2,17\rangle$ $\langle 0,25,35,41\rangle$ $\langle 0,19,51,55\rangle$ $\langle 0,6,13,50\rangle$ $\langle 0,28,46,26\rangle$
11	$\langle 0,55,33,19\rangle$ $\langle 0,37,65,49\rangle$ $\langle 0,52,8,63\rangle$ $\langle 0,67,60,2\rangle$ $\langle 0,10,4,35\rangle$ $\langle 0,59,66,48\rangle$ $\langle 0,17,44,53\rangle$ $\langle 0,50,22,21\rangle$ $\langle 0,23,38,64\rangle$ $\langle 0,26,5,56\rangle$ $\langle 0,14,20,43\rangle$
14	$\langle 0,1,20,31\rangle$ $\langle 0,7,47,68\rangle$ $\langle 0,11,15,78\rangle$ $\langle 0,14,71,80\rangle$ $\langle 0,23,82,83\rangle$ $\langle 0,5,29,41\rangle$ $\langle 0,10,38,55\rangle$ $\langle 0,2,46,56\rangle$ $\langle 0,9,35,42\rangle$ $\langle 0,12,18,70\rangle$ $\langle 0,17,25,39\rangle$ $\langle 0,34,37,50\rangle$ $\langle 0,13,62,64\rangle$ $\langle 0,21,48,53\rangle$
17	$\langle 0,1,81,86\rangle$ $\langle 0,4,37,58\rangle$ $\langle 0,8,65,74\rangle$ $\langle 0,12,59,76\rangle$ $\langle 0,22,71,72\rangle$ $\langle 0,51,78,90\rangle$ $\langle 0,3,19,29\rangle$ $\langle 0,7,75,77\rangle$ $\langle 0,48,84,91\rangle$ $\langle 0,2,40,62\rangle$ $\langle 0,5,11,46\rangle$ $\langle 0,9,32,88\rangle$ $\langle 0,17,30,61\rangle$ $\langle 0,31,45,98\rangle$ $\langle 0,69,89,93\rangle$ $\langle 0,10,25,28\rangle$ $\langle 0,21,55,63\rangle$

4.2.5 $n \equiv 5 \pmod 6$

引理 4.13: $A_3(5,6,[2,2])=1$，$A_3(11,6,[2,2])=15$，$A_3(17,6,[2,2])\geq 40$。

证明. 第一个等式是显然的。$A_3(11,6,[2,2])\leq 15$可以从[46] 中关于$(11,6,4)_4$码的结果得到。一个大小为15的最优$(11,6,[2,2])_3$码已在[46] 中给出。

一个大小为40的$(17,5,4)_3$码构造于$\mathbb{Z}_{16}\cup\{\infty\}$上，由以下基码字$+4 \pmod{16}$生成。

$$\begin{array}{lllll}
\langle 0,3,9,5\rangle & \langle 1,6,\infty,12\rangle & \langle 1,5,8,14\rangle & \langle 0,11,12,10\rangle & \langle 0,6,7,4\rangle \\
\langle 3,10,15,6\rangle & \langle 1,2,15,9\rangle & \langle 0,\infty,13,15\rangle & \langle 2,4,5,6\rangle & \langle 3,13,7,12\rangle
\end{array}$$

□

引理 4.14: 对于每个$3\leq t\leq 8$，都存在一个组型为$2^{3t}5^1$、大小为$2t(3t+4)$的$[2,2]$-GDC(6)。

证明. 令$X_t=\mathbb{Z}_{6t+5}$，且$\mathcal{G}_t=\{\{i,i+3t\}:0\leq i\leq 3t-1\}\cup\{\{6t,6t+1,6t+2,6t+3,6t+4\}\}$。则$(X_t,\mathcal{G}_t,\mathcal{C}_t)$是一个组型为$2^{3t}5^1$的$[2,2]$-GDC(6)。其中$\mathcal{C}_3$是由表 4.3 中的码字在$\mathbb{Z}_{18}$中由群$G=\langle(0\ 3\ 6\ \cdots\ 15)(1\ 4\ 7\ \cdots\ 16)(2\ 5\ 8\ \cdots\ 17)(18\ 19\ 20)\ (21\ 22)\rangle$作用生成的。对于$t>3$，$\mathcal{C}_t$是由表 4.3 中的码字在$\mathbb{Z}_{6t}$中由群$G=\langle(0\ \ 3\ \ 6\ \ \cdots\ \ 6t-3)(1\ \ 4\ \ 7\ \ \cdots\ \ 6t-2)(2\ \ 5\ \ 8\ \ \cdots\ \ 6t-1)(6t)(6t+1)(6t+2)(6t+3)(6t+4)\rangle$ 作用生成的。 □

引理 4.15: 对于每个$t\geq 12$且$t\notin\{13,14,17\}$，都存在一个组型为$2^{3t}5^1$且大小为$2t(3t+4)$的$[2,2]$-GDC(6)。

证明. 对于$t\geq 12$ 且$t\notin P$，取引理 4.5 中组型为$24^i30^j36^k42^l48^m$的$[2,2]$-GDC(6)，其中$4i+5j+6k+7l+8m=t$。在这个GDC上添加五个点，并用组型分别为$2^{3s}5^1$的$[2,2]$-GDC(6)填入这个GDC的组以及刚添加的点中，其中$s\in\{4,5,6,7,8\}$。这样可得到所需的编码。

对于每个$t\in\{12,15,16,18,19,21,22,23,26,27,28,31,32,33\}$，取引理 4.6 中构造的$[2,2]$-GDC(6)。在这些GDC上添加五个点，并用组型分别为$2^{3s}5^1$的$[2,2]$-

表 4.3 引理 4.14 中组型为$2^{3t}5^1$的[2, 2]-GDC(6)的基码字

t	码字
3	$\langle 1,5,3,22\rangle$ $\langle 0,21,7,11\rangle$ $\langle 0,22,1,17\rangle$ $\langle 1,20,2,15\rangle$ $\langle 0,12,15,19\rangle$ $\langle 0,20,4,14\rangle$ $\langle 2,8,5,19\rangle$ $\langle 1,11,0,12\rangle$ $\langle 2,18,1,6\rangle$ $\langle 2,4,12,22\rangle$ $\langle 1,13,16,19\rangle$ $\langle 0,5,10,16\rangle$ $\langle 0,13,2,8\rangle$
4	$\langle 2,25,18,22\rangle$ $\langle 1,23,20,2\rangle$ $\langle 0,22,25,5\rangle$ $\langle 0,19,23,26\rangle$ $\langle 2,0,10,28\rangle$ $\langle 2,27,16,21\rangle$ $\langle 0,14,13,24\rangle$ $\langle 1,28,0,14\rangle$ $\langle 2,26,15,7\rangle$ $\langle 1,9,17,27\rangle$ $\langle 2,8,19,17\rangle$ $\langle 1,19,10,12\rangle$ $\langle 0,4,1,7\rangle$ $\langle 0,18,11,9\rangle$ $\langle 1,24,11,15\rangle$ $\langle 2,6,9,3\rangle$
5	$\langle 2,18,21,9\rangle$ $\langle 0,19,2,33\rangle$ $\langle 2,26,0,4\rangle$ $\langle 1,6,31,11\rangle$ $\langle 1,15,34,8\rangle$ $\langle 2,32,19,24\rangle$ $\langle 2,31,15,16\rangle$ $\langle 2,33,25,27\rangle$ $\langle 0,13,11,32\rangle$ $\langle 1,27,24,4\rangle$ $\langle 0,10,26,30\rangle$ $\langle 0,1,9,22\rangle$ $\langle 1,19,23,28\rangle$ $\langle 2,34,22,3\rangle$ $\langle 0,12,20,6\rangle$ $\langle 2,20,29,23\rangle$ $\langle 1,3,2,20\rangle$ $\langle 2,30,28,12\rangle$ $\langle 1,26,7,25\rangle$
6	$\langle 2,23,4,28\rangle$ $\langle 0,28,23,37\rangle$ $\langle 2,26,22,0\rangle$ $\langle 2,37,24,13\rangle$ $\langle 1,0,4,30\rangle$ $\langle 0,22,36,20\rangle$ $\langle 0,19,34,21\rangle$ $\langle 1,24,20,38\rangle$ $\langle 2,38,15,31\rangle$ $\langle 0,31,27,2\rangle$ $\langle 0,11,15,12\rangle$ $\langle 1,21,39,26\rangle$ $\langle 1,10,2,23\rangle$ $\langle 2,36,33,25\rangle$ $\langle 1,12,11,5\rangle$ $\langle 2,40,16,21\rangle$ $\langle 2,8,35,11\rangle$ $\langle 2,39,9,10\rangle$ $\langle 0,8,24,7\rangle$ $\langle 1,25,31,22\rangle$ $\langle 0,3,17,9\rangle$ $\langle 0,10,26,40\rangle$
7	$\langle 2,15,38,0\rangle$ $\langle 0,24,28,22\rangle$ $\langle 2,29,35,19\rangle$ $\langle 2,36,9,41\rangle$ $\langle 2,33,11,26\rangle$ $\langle 1,16,13,4\rangle$ $\langle 1,10,21,32\rangle$ $\langle 2,4,21,39\rangle$ $\langle 0,38,1,41\rangle$ $\langle 2,18,31,43\rangle$ $\langle 1,29,5,30\rangle$ $\langle 2,30,42,22\rangle$ $\langle 1,7,20,8\rangle$ $\langle 2,12,45,1\rangle$ $\langle 0,30,7,25\rangle$ $\langle 1,46,38,24\rangle$ $\langle 2,32,13,40\rangle$ $\langle 0,36,33,3\rangle$ $\langle 1,45,0,26\rangle$ $\langle 1,42,6,35\rangle$ $\langle 1,43,11,3\rangle$ $\langle 2,27,46,37\rangle$ $\langle 0,44,16,2\rangle$ $\langle 1,17,39,44\rangle$ $\langle 1,25,9,15\rangle$
8	$\langle 0,45,18,30\rangle$ $\langle 2,50,42,25\rangle$ $\langle 2,52,40,27\rangle$ $\langle 1,3,45,7\rangle$ $\langle 0,1,15,16\rangle$ $\langle 1,4,34,22\rangle$ $\langle 2,8,19,39\rangle$ $\langle 0,19,47,41\rangle$ $\langle 2,32,34,12\rangle$ $\langle 0,43,32,27\rangle$ $\langle 2,29,36,28\rangle$ $\langle 0,22,48,17\rangle$ $\langle 0,7,34,20\rangle$ $\langle 2,5,38,17\rangle$ $\langle 0,5,9,6\rangle$ $\langle 1,9,51,32\rangle$ $\langle 2,48,0,43\rangle$ $\langle 0,36,44,14\rangle$ $\langle 2,41,22,15\rangle$ $\langle 1,21,10,12\rangle$ $\langle 2,51,21,46\rangle$ $\langle 16,39,26,50\rangle$ $\langle 16,4,23,20\rangle$ $\langle 16,2,10,7\rangle$ $\langle 2,49,18,37\rangle$ $\langle 0,13,38,49\rangle$ $\langle 3,13,5,14\rangle$ $\langle 0,31,29,52\rangle$

GDC(6)填入这个GDC的组以及刚添加的点中，其中$s \in \{3,4,5,6,7\}$。这样可得到所需的编码。 □

引理 4.16：对于每个$t \geq 3$且$t \notin \{9,10,11\}$，$A_3(6t+5,6,[2,2]) \geq U(6t+5,3)-1$；对于$t=14$，$A_3(6t+5,6,[2,2]) \geq U(6t+5,3)-2$。

证明. 对于$t \notin \{9,10,11,13,14,17\}$，取一个组型为$2^{3t}5^1$的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.14 和 4.15 ），并用一个最优$(5,5,[2,2])_3$码填入大小为5的组中，即得到所需的编码。

对于$t \in \{13,14,17\}$，分别取组型为$18^4 6^1$，$18^4 12^1$或$24^4 6^1$的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.26 ）。在这些GDC上添加五个点，并用组型分别为$2^9 5^1$ 和$2^{12}5^1$ 的$[2,2]$-GDC(6)填入这个GDC中大小为18或24的组以及刚添加的点中，再用长度为11和17的编码（见引理 4.13 ）填入其余的组中。这样可得到所需的编码。 □

定理 4.5：对于$t \geq 3$ 且$t \notin \{9,10,11,14\}$，$A_3(6t+5,6,[2,2]) \geq U(6t+5,6,[2,2])-1$；$A_3(5,6,[2,2])=1$；$A_3(11,6,[2,2])=15$；对于$t \in \{2,14\}$，$A_3(6t+5,6,[2,2]) \geq U(6t+5,6,[2,2])-2$。

4.3 长度$n \equiv 3,4 \pmod 6$的情况

4.3.1 $n \equiv 4 \pmod 6$

引理 4.17：对于$t=1$或$4 \leq t \leq 9$，$A_3(6t+4,6,[2,2])=U(6t+4,6,[2,2])$。

证明. 令$X_t = \mathbb{Z}_{6t+4}$。则$(X_t,\mathcal{C}_t)$是所需的最优$(6t+4,6,[2,2])_3$码，其中$\mathcal{C}_t$是由表 4.4 中的码字在$\mathbb{Z}_{6t+4}$中$+2 \pmod{6t+4}$生成的。 □

引理 4.18：对于$t \geq 142$，$A(6t+4,6,[2,2])=U(6t+4,6,[2,2])$。

证明. 取一个TD$(8,k)$（见引理 2.8）。应用构造 2.3，对这个设计的前6组中的所有点以及第7个组中的x个点赋权为6，对最后一个组中的3个点赋权为3。其余的点都赋权为0。要求$x=0$或者$3 \leq x \leq k$。所需的输入设计为组型分别为6^6，6^7，$6^6 3^1$ 以及$6^7 3^1$的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.4 和 4.24 ）。这样得到一个组

表 4.4　引理 4.17 中最优$(6t+4, 6, [2, 2])_3$码的基码字

t	码字
1	$\langle 0,3,9,7\rangle$ $\langle 0,4,2,5\rangle$ $\langle 1,3,2,6\rangle$
4	$\langle 0,15,21,24\rangle$ $\langle 0,6,9,11\rangle$ $\langle 1,22,26,21\rangle$ $\langle 1,3,11,15\rangle$ $\langle 0,1,18,19\rangle$ $\langle 1,6,23,16\rangle$ $\langle 1,5,24,12\rangle$ $\langle 1,4,17,2\rangle$ $\langle 0,12,14,20\rangle$
5	$\langle 0,11,17,21\rangle$ $\langle 1,19,10,18\rangle$ $\langle 1,9,12,23\rangle$ $\langle 1,33,30,20\rangle$ $\langle 0,7,14,20\rangle$ $\langle 0,24,23,15\rangle$ $\langle 0,8,1,3\rangle$ $\langle 0,19,31,13\rangle$ $\langle 1,31,2,21\rangle$ $\langle 0,28,12,16\rangle$ $\langle 0,4,2,9\rangle$
6	$\langle 0,19,10,12\rangle$ $\langle 1,2,13,31\rangle$ $\langle 1,26,0,3\rangle$ $\langle 0,25,5,8\rangle$ $\langle 0,4,32,13\rangle$ $\langle 0,6,22,7\rangle$ $\langle 1,19,11,17\rangle$ $\langle 0,3,27,31\rangle$ $\langle 1,5,18,12\rangle$ $\langle 1,20,6,10\rangle$ $\langle 0,2,20,35\rangle$ $\langle 1,4,27,28\rangle$ $\langle 1,7,15,36\rangle$
7	$\langle 1,35,40,24\rangle$ $\langle 1,31,0,29\rangle$ $\langle 1,9,10,12\rangle$ $\langle 0,16,43,21\rangle$ $\langle 0,22,17,7\rangle$ $\langle 0,32,9,25\rangle$ $\langle 1,33,14,20\rangle$ $\langle 0,2,13,1\rangle$ $\langle 1,18,7,21\rangle$ $\langle 1,43,26,38\rangle$ $\langle 1,23,3,41\rangle$ $\langle 0,34,26,8\rangle$ $\langle 0,18,37,33\rangle$ $\langle 0,40,4,36\rangle$ $\langle 1,11,8,32\rangle$
8	$\langle 0,50,3,11\rangle$ $\langle 0,49,38,21\rangle$ $\langle 1,33,37,43\rangle$ $\langle 1,18,40,38\rangle$ $\langle 1,9,30,2\rangle$ $\langle 1,12,13,27\rangle$ $\langle 1,24,32,49\rangle$ $\langle 0,4,18,47\rangle$ $\langle 0,6,36,40\rangle$ $\langle 0,17,12,39\rangle$ $\langle 1,39,3,14\rangle$ $\langle 1,20,51,19\rangle$ $\langle 1,34,41,44\rangle$ $\langle 1,7,35,16\rangle$ $\langle 0,45,42,23\rangle$ $\langle 0,24,16,9\rangle$ $\langle 0,27,26,32\rangle$
9	$\langle 1,31,49,55\rangle$ $\langle 0,1,17,39\rangle$ $\langle 1,14,41,46\rangle$ $\langle 1,18,36,11\rangle$ $\langle 0,31,52,15\rangle$ $\langle 1,6,35,4\rangle$ $\langle 0,21,4,28\rangle$ $\langle 0,5,37,9\rangle$ $\langle 0,10,13,22\rangle$ $\langle 1,26,51,52\rangle$ $\langle 1,2,40,45\rangle$ $\langle 1,10,24,16\rangle$ $\langle 1,23,21,34\rangle$ $\langle 0,16,23,35\rangle$ $\langle 1,48,20,30\rangle$ $\langle 0,8,54,55\rangle$ $\langle 1,47,15,32\rangle$ $\langle 1,7,56,9\rangle$ $\langle 0,34,20,36\rangle$

型为$(6k)^6(6x)^1 9^1$的$[2,2]$-GDC(6)。在这个GDC上添加一个点，用定理 4.2 中长度为$6k+1$或$6x+1$的最优码填入前7个组以及刚添加的点中，用最优$(10,6,[2,2])_3$码填入大小为9的组以及刚添加的点中。这样得到一个长度为$n=36k+6x+10=6(6k+x+1)+4$的最优码。对任意的$t\geq 142$，取$k\geq 23$，可以得到一个长度为$n=6t+4$的最优码，其中$t=6k+x+1$。 □

引理 4.19: 对于$t=43$或者$46\leq t\leq 141$且$t\neq 51$，$A(6t+4,6,[2,2])=U(6t+4,6,[2,2])$。

证明. 取一个TD(m,k)（见引理 2.8）。其中$k\in\{7,8,9,13\}$，$8\leq m\leq 12$且$m\leq k+1$。应用构造 2.3，对这个设计的前6组中的所有点和第$6+i$个组中的x_i个点赋权为6，对最后一个组中的3个点赋权为3，其中$1\leq i\leq m-7$。其余的点都赋权为0。要求$x_i=0$ 或者$3\leq x_i\leq k$。所需的输入设计为组型分别为6^s以及6^s3^1的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.4 和 4.24 ），其中$6\leq s\leq 11$。这样得到一个组型为$(6k)^6x_1^1x_2^1\dots x_{m-7}^1 9^1$的$[2,2]$-GDC(6)。在这个GDC上添加一个点，用定理 4.2 中长度为$6k+1$或$6x_i+1$的最优码填入前$m-1$个组以及刚添加的点中，用最优$(10,6,[2,2])_3$码填入大小为9的组以及刚添加的点中。这样得到一个长度为$n=36k+6\sum_{i=1}^{m-7}x_i+10=6(6k+\sum_{i=1}^{m-7}x_i+1)+4$的最优码。

令$t=6k+\sum_{i=1}^{m-7}x_i+1$。取$k=7$，$m=8$，可以得到$t\in\{43\}\cup[46,50]$。取$k=8$，$m=9$，可以得到$t\in[52,65]$。取$k=9$，$m=10$，可以得到$t\in[66,82]$。取$k=13$，$m=12$，可以得到$t\in[83,141]$。 □

引理 4.20: 对于$t\in\{24\}\cup[32,34]\cup[36,44]$，$A(6t+4,6,[2,2])=U(6t+4,6,[2,2])$。

证明. 取一个TD$(5,k)$（见引理 2.8）。其中$k\in\{5,7,8,9\}$。应用构造 2.3，对这个设计的前4组中的所有点和最后一个组中的x个点赋权为6，对最后一个组中的另外y个点赋权为3。要求$x+y=k$。所需的输入设计为组型分别为6^5以及$6^4 3^1$的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.4 和 4.24 ）。这样得到一个组型为$(6k)^4(6x+3y)^1$的$[2,2]$-GDC(6)。在这个GDC上添加一个点，用定理 4.2 中长度为$6k+1$的最优码填入前4个组以及刚添加的点中，用最优$(6x+3y+1,6,[2,2])_3$码填入大小为$6x+3y$的组以及刚添加的点中。这样得到一个长度为$n=24k+6x+3y+1=6(4k+x+\frac{y-1}{2})+4$的最优码。

表 4.5　引理 4.20中的参数

t	(k,x,y)	s	t	(k,x,y)	s	t	(k,x,y)	s
24	$(5,4,1)$	28	32	$(7,2,5)$	28	33	$(7,4,3)$	34
34	$(7,6,1)$	40	36	$(8,1,7)$	28	37	$(8,3,5)$	34
38	$(8,5,3)$	40	39	$(8,7,1)$	46	40	$(9,0,9)$	28
41	$(9,2,7)$	34	42	$(9,4,5)$	40	43	$(9,6,3)$	46
44	$(9,8,1)$	52						

令$t=4k+x+\frac{y-1}{2}$。对于每个所需的t，参数(k,x,y)以及$s=6x+3y+1$均在表 4.5 中给出。□

引理 4.21：对于$t\in\{10,11,13,16,17,18,19,21,22,25,26,28,31,45,51\}$，$A(6t+4,6,[2,2])=U(6t+4,6,[2,2])$。

证明. 对于$t=11$，取一个组型为10^7的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.23 ）。用最优$(10,6,[2,2])_3$码填入这个GDC的组中，即可得到所需的编码。

对于$t=17$，取一个组型为$24^4 9^1$的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.26 ）。在这个GDC上添加一个点，用最优$(25,6,[2,2])_3$码或最优$(10,6,[2,2])_3$码填入这个GDC的组以及刚添加的点中，即可得到所需的编码。

对于每个$t\in\{10,13,16,18,19,21,22,25,26,28,31,45,51\}$，取一个组型为 $g^u m^1$ 的 $[2,2]$- GDC (6) 。应用构造 2.4 ，利用一个TD$(4,w)$（见引理 2.8 ），再在所得GDC外添加a个点，并用长度在集合S中的最优码填入GDC的组以及刚添加的点中，即可得到所需的编码。所需的参数n,g,u,m,w,a和S见表 4.6 。□

引理 4.22：对于$t\in\{29,35\}$，$A(6t+4,6,[2,2])=U(6t+4,6,[2,2])$。

证明. 对于$t=29$，取一个组型为6^7的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.4 ）。应用构造 2.3 ，对每个点赋权为4，将组型为4^4的4-MGDD作为输入设计，得到一个组型为$(24,6^4)^7$的$[2,2]$-DGDC(6)。在这个DGDC外添加9个点，并用组型为$6^7 9^1$的$[2,2]$-DGDC(6)填入原DGDC的组以及刚添加的点中，可得到一个组型为$24^7 9^1$的$[2,2]$-GDC(6)。再在这个GDC外添加一个点，用长度分别为25和10的最优码填入GDC的组以及刚添加的点中。这样可得到所需的编码。

表 4.6　引理 4.21中的参数

t	n	$g^u m^1 \times w$	来源	a	S
10	64	$3^7 \times 3$	引理 4.23	1	10
13	82	$6^4 3^1 \times 3$	引理 4.24	1	19, 10
16	100	$3^{11} \times 3$	引理 4.23	1	10
18	112	$4^4 \times 7$	引理 4.23	0	28
19	118	$3^{13} \times 3$	引理 4.23	1	10
21	130	$2^{13} \times 5$	引理 4.11	0	10
22	136	$6^7 3^1 \times 3$	引理 4.24	1	19, 10
25	154	$6^7 9^1 \times 3$	引理 4.25	1	19, 28
26	160	$4^4 \times 10$	引理 4.23	0	40
28	172	$6^8 9^1 \times 3$	引理 4.25	1	19, 28
31	190	$3^7 \times 9$	引理 4.23	1	28
45	274	$3^7 \times 13$	引理 4.23	1	40
51	310	$1^{31} \times 10$	引理 4.8	0	10

对于$t = 35$，取一个组型为6^7的$[2,2]$-GDC(6)（见引理 4.4 ），并删掉最后一个组中所有的点。应用构造 2.3 ，对每个点赋权为5，将组型为5^4的4-MGDD以及组型为5^3的可分3-MGDD作为输入设计，得到一个满足常重码性质的$\{3,4\}$-DGDD，其中长度为3的区组可被划分到24个平行类中。在每个平行类外添加一个点，这样共添加了24个点，得到一个组型为$(30,6^5)^7 24^1$的DGDC。在这个DGDC外添加9个点，并用组型为$6^7 9^1$的$[2,2]$-DGDC(6)填入原DGDC的组以及刚添加的点中，可得到一个组型为$30^6 33^1$的$[2,2]$-GDC(6)。再在这个GDC外添加一个点，用长度分别为31和34的最优码填入GDC的组以及刚添加的点中。这样可得到所需的编码。 □

结合上面的引理，可以得到下面的结果：

定理 4.6: 对于每个$t \geq 1$且$t \notin \{2,3,12,14,15,20,23,27,30\}$，$A_3(6t+4,6,[2,2]) = U(6t+4,6,[2,2])$。

4.3.2　$n \equiv 3 \pmod 6$

定理 4.7: 对于每个$t \geq 1$，$A_3(6t+3,6,[2,2]) = U(6t+3,3)$。

证明. 对于$t \geq 1$且$t \notin \{2,3,12,14,15,20,23,27,30\}$，从定理 4.6 中的一个最优$(6t+4,6,[2,2])_3$码中删掉一个位置和所有该位置非零的码字，这样可得到所需的编码。

对于每个$t \in \{2, 14, 20\}$，令$X_t = \mathbb{Z}_{6t+3}$。则$(X_t, \mathcal{C}_t)$是所需的最优 $(6t{+}3, 6, [2, 2])_3$码，其中$\mathcal{C}_t$是由下列码字在$\mathbb{Z}_{6t+3}$中$+1 \pmod{6t+3}$生成的。

$t = 2$: $\langle 0, 3, 4, 14\rangle$ $\langle 0, 5, 7, 13\rangle$

$t = 14$:

$$\begin{array}{lllll}
\langle 0,24,47,61\rangle & \langle 0,1,80,8\rangle & \langle 0,41,16,36\rangle & \langle 0,22,25,53\rangle & \langle 0,39,52,50\rangle \\
\langle 0,14,49,5\rangle & \langle 0,58,68,27\rangle & \langle 0,85,69,40\rangle & \langle 0,57,51,75\rangle & \langle 0,70,74,9\rangle \\
\langle 0,43,33,32\rangle & \langle 0,28,83,66\rangle & \langle 0,20,54,84\rangle & \langle 0,72,6,45\rangle &
\end{array}$$

$t = 20$:

$$\begin{array}{lllll}
\langle 0,16,46,63\rangle & \langle 0,92,85,7\rangle & \langle 0,34,122,9\rangle & \langle 0,10,43,74\rangle & \langle 0,5,109,82\rangle \\
\langle 0,6,21,79\rangle & \langle 0,24,22,94\rangle & \langle 0,23,37,55\rangle & \langle 0,13,42,62\rangle & \langle 0,17,2,8\rangle \\
\langle 0,56,81,68\rangle & \langle 0,20,95,39\rangle & \langle 0,45,93,97\rangle & \langle 0,4,57,80\rangle & \langle 0,18,54,59\rangle \\
\langle 0,11,102,3\rangle & \langle 0,72,35,69\rangle & \langle 0,58,1,84\rangle & \langle 0,27,71,87\rangle & \langle 0,83,50,61\rangle
\end{array}$$

对于$t = 3$，一个组型为3^7的[2, 2]-GDC(6)（见引理 4.23 ）即为所需的编码。

对于每个$t \in \{12, 15, 27, 30\}$，分别取一个组型为18^4，18^5，18^9或18^{10}的[2, 2]-GDC(6)（见引理 4.23 和4.1）。在这些GDC外添加3个点，并用组型为3^7的[2, 2]-GDC(6)填入GDC的组以及刚添加的点中。这样得到组型分别为3^{25}，3^{31}，3^{55}或3^{61}的[2, 2]-GDC(6)。不难验证这些GDC即为所需的编码。

对于$t = 23$，取一个TD(5, 5)（见引理 2.8）。应用构造 2.3，对这个设计的前4组中的所有点以及最后一个组中的2个点赋权为6，对最后一个组中的3个点赋权为3。所需的输入设计为组型分别为6^4，6^5，$6^4 3^1$的[2, 2]-GDC(6)（见引理 4.4 和 4.24 ）。这样得到一个组型为$30^4 21^1$的[2, 2]-GDC(6)。用长度为21或30的最优码填入这个GDC的组中。这样可得到所需的编码。 □

4.4 总结

在这一章中，除了一个类和其余类中个别的值外，几乎完全确定了复合构型为[2, 2]，极小距离为6的最优三元常重复合码的码字个数。将主要的结果总结为如下定理：

定理 4.8：对于任何整数$n \geq 4$，令$Q1 = \{7, 8, 13, 14, 16, 22, 76, 88, 94, 124, 142, 166, 184\}$，$Q2 = \{17, 59, 65, 71, 89\}$，

$$A_3(n, 6, [2, 2]) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 4, 5 \\ 3, & \text{如果} n = 7 \\ 5, & \text{如果} n = 8 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor, & \text{如果} n \geq 6\text{，} n \not\equiv 5 \pmod 6\text{，且} n \notin Q1. \end{cases}$$

如果$n \geq 11, n \equiv 5 \pmod 6$ 且$n \notin Q2$,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor - 1 \leq A_3(n, 6, [2, 2]) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor.$$

4.5 部分GDC的直接构造

引理 4.23：存在组型分别为3^7，3^{11}，3^{13}，4^4，10^7，18^4的$[2, 2]$-GDC(6)。

证明. 对于组型为g^u的$[2, 2]$-GDC(6)，令$X = \mathbb{Z}_{gu}$ 且$\mathcal{G} = \{\{i, i+u, i+2u, \ldots, i+(g-1)u\} : 0 \leq i \leq u-1\}$。则$(X, \mathcal{G}, \mathcal{C})$是一个组型为$g^u$的$[2, 2]$-GDC(6)，其中$\mathcal{C}$由下列码字在$\mathbb{Z}_{gu}$中按照给定的自同构群生成。

3^7: $+1 \pmod{21}$ $\langle 7, 3, 18, 13\rangle$ $\langle 4, 3, 12, 16\rangle$ $\langle 0, 5, 2, 3\rangle$

3^{11}: $+1 \pmod{33}$ $\langle 13, 27, 15, 25\rangle$ $\langle 25, 15, 0, 7\rangle$ $\langle 2, 15, 18, 32\rangle$ $\langle 10, 5, 1, 14\rangle$ $\langle 0, 7, 1, 6\rangle$

3^{13}: $+1 \pmod{39}$ $\langle 20, 2, 25, 10\rangle$ $\langle 21, 6, 23, 17\rangle$ $\langle 6, 12, 5, 26\rangle$ $\langle 30, 3, 28, 19\rangle$ $\langle 21, 24, 31, 4\rangle$ $\langle 0, 9, 1, 4\rangle$

4^4: $+8 \pmod{16}$

$\langle 1, 7, 2, 4\rangle$	$\langle 3, 13, 0, 6\rangle$	$\langle 6, 12, 5, 7\rangle$	$\langle 2, 4, 5, 11\rangle$	$\langle 2, 8, 3, 9\rangle$	$\langle 3, 5, 2, 12\rangle$
$\langle 8, 14, 1, 7\rangle$	$\langle 15, 5, 4, 6\rangle$	$\langle 9, 7, 8, 6\rangle$	$\langle 3, 9, 4, 14\rangle$	$\langle 9, 11, 0, 2\rangle$	$\langle 13, 15, 2, 8\rangle$
$\langle 4, 6, 1, 3\rangle$	$\langle 4, 10, 7, 9\rangle$	$\langle 0, 14, 3, 5\rangle$	$\langle 8, 10, 5, 15\rangle$		

10^7: $+1 \pmod{70}$

$\langle 0, 17, 27, 58\rangle$	$\langle 0, 61, 24, 46\rangle$	$\langle 0, 25, 6, 68\rangle$	$\langle 0, 3, 2, 40\rangle$	$\langle 0, 11, 26, 29\rangle$
$\langle 0, 48, 1, 60\rangle$	$\langle 0, 31, 50, 5\rangle$	$\langle 0, 32, 16, 52\rangle$	$\langle 0, 34, 47, 64\rangle$	$\langle 0, 62, 57, 66\rangle$

18^4: $+2 \pmod{72}$

$\langle 1,3,8,22\rangle$ $\langle 0,34,1,15\rangle$ $\langle 0,26,11,13\rangle$ $\langle 1,35,32,58\rangle$
$\langle 0,2,21,71\rangle$
$\langle 0,7,18,25\rangle$ $\langle 0,30,23,61\rangle$ $\langle 1,11,62,40\rangle$ $\langle 0,9,54,63\rangle$ $\langle 0,10,5,47\rangle$
$\langle 0,22,49,55\rangle$ $\langle 1,27,26,28\rangle$ $\langle 0,6,51,41\rangle$ $\langle 1,23,60,18\rangle$ $\langle 1,31,34,44\rangle$
$\langle 0,14,43,17\rangle$ $\langle 1,7,16,54\rangle$ $\langle 1,15,50,56\rangle$

□

引理 4.24: *存在组型为6^t3^1的$[2,2]$-GDC(6)，其中$t\in\{4\}$或者$6\le t\le 11$。*

证明. 令$X_t=\mathbb{Z}_{6t+3}$且$\mathcal{G}_t=\{\{i,i+t,i+2t,\dots,i+5t\}:0\le i\le t-1\}\cup\{\{6t,6t+1,6t+2\}\}$。则$(X_t,\mathcal{G}_t,\mathcal{C}_t)$是一个组型为$6^t3^1$的$[2,2]$-GDC(6)，其中$\mathcal{C}_4$由下列码字在$\mathbb{Z}_{27}$中按照自同构群$G=\langle(0\ 2\ 4\ \cdots\ 22)(1\ 3\ 5\ \cdots\ 23)(24\ 25\ 26)\rangle$生成，而对于$6\le t\le 11$的$\mathcal{C}_t$则是由下列码字在$\mathbb{Z}_{6t+3}$中按照自同构群$G=\langle(0\ 1\ 2\ \cdots\ 6t-1)(6t\ \ 6t+1\ \ 6t+2)\rangle$生成。

$t=4$:

$\langle 1,25,8,6\rangle$ $\langle 1,3,18,0\rangle$ $\langle 0,10,24,23\rangle$ $\langle 1,7,10,20\rangle$ $\langle 0,22,7,1\rangle$
$\langle 0,6,21,11\rangle$ $\langle 1,11,12,26\rangle$ $\langle 0,26,19,17\rangle$

$t=6$:

$\langle 0,34,27,5\rangle$ $\langle 0,28,3,13\rangle$ $\langle 0,10,19,35\rangle$ $\langle 0,20,17,15\rangle$ $\langle 0,37,32,4\rangle$
$\langle 0,14,1,38\rangle$

$t=7$:

$\langle 0,8,12,38\rangle$ $\langle 0,26,25,44\rangle$ $\langle 0,43,20,22\rangle$ $\langle 0,6,23,33\rangle$ $\langle 0,40,1,9\rangle$
$\langle 0,10,15,39\rangle$ $\langle 0,18,31,37\rangle$

$t=8$:

$\langle 0,10,12,46\rangle$ $\langle 0,4,21,31\rangle$ $\langle 0,26,41,45\rangle$ $\langle 0,28,5,23\rangle$ $\langle 0,48,11,37\rangle$
$\langle 0,42,1,29\rangle$ $\langle 0,14,13,49\rangle$ $\langle 0,18,3,9\rangle$

$t=9$:

$\langle 0,52,5,21\rangle$ $\langle 0,54,49,53\rangle$ $\langle 0,38,3,51\rangle$ $\langle 0,34,12,22\rangle$ $\langle 0,4,28,30\rangle$
$\langle 0,6,17,37\rangle$ $\langle 0,14,1,47\rangle$ $\langle 0,44,15,29\rangle$ $\langle 0,8,43,55\rangle$

$t=10$:

$\langle 0,12,36,37\rangle$ $\langle 0,54,45,57\rangle$ $\langle 0,8,29,35\rangle$ $\langle 0,4,9,17\rangle$ $\langle 0,34,23,61\rangle$
$\langle 0,22,53,55\rangle$ $\langle 0,28,7,11\rangle$ $\langle 0,58,16,42\rangle$ $\langle 0,62,19,41\rangle$ $\langle 0,1,15,47\rangle$

$t = 11$:

$$\begin{array}{lllll}\langle 0,10,1,13\rangle & \langle 0,67,7,17\rangle & \langle 0,12,30,38\rangle & \langle 0,64,25,46\rangle & \langle 0,4,23,39\rangle \\ \langle 0,34,5,65\rangle & \langle 0,16,36,40\rangle & \langle 0,21,49,63\rangle & \langle 0,6,15,47\rangle & \langle 0,8,59,61\rangle \\ \langle 0,14,43,68\rangle & & & & \end{array}$$

□

引理 4.25: *存在组型为*6^t9^1*的*$[2,2]$-GDC(6)*，其中*$t \in \{6,7,8\}$*。*

证明. 令$X_t = \mathbb{Z}_{6t+9}$ 且$\mathcal{G}_t = \{\{i, i+t, i+2t, \ldots, i+5t\} : 0 \le i \le t-1\} \cup \{\{6t, 6t+1, 6t+2, \ldots, 6t+8\}\}$。则$(X_t, \mathcal{G}_t, \mathcal{C}_t)$是一个组型为$6^t9^1$的$[2,2]$-GDC(6)，其中$\mathcal{C}_t$则是由下列码字在$\mathbb{Z}_{6t+9}$中按照自同构群$G = \langle (0\ 1\ 2\ \cdots\ 6t{-}1)(6t\ 6t{+}1\ 6t{+}2\ 6t{+}3\ 6t{+}4\ 6t{+}5)(6t+6\ \ 6t+7\ \ 6t+8)\rangle$生成。

$t = 6$:

$$\begin{array}{lllll}\langle 0,22,13,29\rangle & \langle 0,34,21,38\rangle & \langle 0,16,19,37\rangle & \langle 0,36,5,15\rangle & \langle 0,43,17,31\rangle \\ \langle 0,41,33,25\rangle & \langle 0,8,4,44\rangle & \langle 0,10,9,11\rangle & & \end{array}$$

$t = 7$:

$$\begin{array}{lllll}\langle 0,36,34,10\rangle & \langle 0,45,8,39\rangle & \langle 0,23,25,49\rangle & \langle 0,44,3,22\rangle & \langle 0,29,33,42\rangle \\ \langle 0,48,38,1\rangle & \langle 0,24,41,12\rangle & \langle 0,11,20,26\rangle & \langle 0,5,46,32\rangle & \end{array}$$

$t = 8$:

$$\begin{array}{lllll}\langle 0,10,3,15\rangle & \langle 0,14,54,37\rangle & \langle 0,49,27,29\rangle & \langle 0,36,31,1\rangle & \langle 0,46,42,4\rangle \\ \langle 0,22,51,33\rangle & \langle 0,56,47,19\rangle & \langle 0,18,9,35\rangle & \langle 0,48,7,21\rangle & \langle 0,20,52,45\rangle \end{array}$$

□

引理 4.26: *存在组型分别为*18^46^1，18^412^1，24^46^1，24^49^1*的*$[2,2]$-GDC(6)*。*

证明. 对于组型为g^um^1的$[2,2]$-GDC(6)，令$X = \mathbb{Z}_{gu+m}$ 且$\mathcal{G} = \{\{0, u, 2u, \ldots, (g-1)u\} + i : 0 \le i \le u-1\} \cup \{\{gu, gu+1, gu+2, \ldots, gu+m-1\}\}$。则$(X, \mathcal{G}, \mathcal{C})$是所需的$[2,2]$-GDC(6)，其中$\mathcal{C}$由下列码字在$\mathbb{Z}_{gu+m}$中按照给定的自同构群生成。$18^46^1$: $G = \langle (0\ 1\ 2\ \cdots\ 71)(72\ 73\ 74\ 75\ 76\ 77)\rangle$.

$$\begin{array}{lllll}\langle 0,30,1,7\rangle & \langle 0,50,53,76\rangle & \langle 0,54,21,59\rangle & \langle 0,72,29,51\rangle & \langle 0,2,13,71\rangle \\ \langle 0,66,17,35\rangle & \langle 0,58,31,33\rangle & \langle 0,77,37,63\rangle & \langle 0,26,9,19\rangle & \langle 0,10,25,67\rangle \\ \langle 0,34,61,73\rangle & & & & \end{array}$$

$18^4 12^1$: $G = \langle (0\ \ 1\ \ 2\ \ \cdots\ \ 71)(72\ \ 73\ \ 74\ \ 75\ \ 76\ \ 77)\,(78\ \ 79\ \ 80\ \ 81\ \ 82\ \ 83)\rangle$.

$$\begin{array}{lllll}
\langle 0,46,7,72\rangle & \langle 0,77,57,71\rangle & \langle 0,34,63,79\rangle & \langle 0,22,49,78\rangle & \langle 0,14,1,31\rangle \\
\langle 0,18,23,61\rangle & \langle 0,42,39,45\rangle & \langle 0,82,21,67\rangle & \langle 0,83,9,11\rangle & \langle 0,70,51,73\rangle \\
\langle 0,10,47,65\rangle & \langle 0,76,15,25\rangle & \langle 0,6,19,41\rangle & &
\end{array}$$

$24^4 6^1$: $G = \langle (0\ \ 1\ \ 2\ \ \cdots\ \ 95)(96\ \ 97\ \ 98\ \ 99\ \ 100\ \ 101)\rangle$.

$$\begin{array}{lllll}
\langle 0,86,25,75\rangle & \langle 0,62,5,19\rangle & \langle 0,42,23,29\rangle & \langle 0,82,81,97\rangle & \langle 0,38,11,89\rangle \\
\langle 0,26,3,98\rangle & \langle 0,18,27,49\rangle & \langle 0,100,57,67\rangle & \langle 0,74,37,71\rangle & \langle 0,2,15,45\rangle \\
\langle 0,30,21,47\rangle & \langle 0,101,63,65\rangle & \langle 0,46,41,79\rangle & \langle 0,6,7,61\rangle &
\end{array}$$

$24^4 9^1$: $G = \langle (0\ \ 1\ \ 2\ \ \cdots\ \ 95)(96\ \ 97\ \ 98)(99\ \ 100\ \ 101)\,(103\ \ 104\ \ 102)\rangle$.

$$\begin{array}{lllll}
\langle 0,82,15,73\rangle & \langle 0,38,3,49\rangle & \langle 0,46,47,98\rangle & \langle 0,102,35,37\rangle & \langle 0,18,45,31\rangle \\
\langle 0,6,39,69\rangle & \langle 0,30,51,9\rangle & \langle 0,22,17,104\rangle & \langle 0,96,43,77\rangle & \langle 0,10,81,7\rangle \\
\langle 0,26,19,25\rangle & \langle 0,34,23,101\rangle & \langle 0,99,53,79\rangle & \langle 0,2,57,67\rangle & \langle 0,54,41,59\rangle
\end{array}$$

$\square$

5 超单Room方的存在性问题

在第 3 章中，一些最优$(n,5,[2,1,1])_4$码可以由一个带有超单性质的n阶Room方得到。而超单Room方的存在性问题本身也是一个值得研究的问题。在这一章中，除了两个极小的阶数不能确定，这个问题得到了较好的解决。

5.1 介绍

T. G.Room 在1955年发表了一篇文章[85]，在其中他证明了3阶和5阶Room方不存在，并构造了一个7阶Room方，后来人们把这种方阵就称为Room方。而实际上，这种方阵的历史更加久远。早在1850年， Kirkman 就给出了一个7阶Room方，并将其用来解决了著名的“15女生问题”。在后来的时间里，数学家们尝试了用代数、图论以及组合等方法来研究高阶Room方的存在性。在一个257阶的Room方被证明存在后[86]，v阶Room方的存在性问题最终得到了完全解决。v阶Room方存在的充要条件为：v是正奇数且$v \neq 3$，$v \neq 5$。在[87] 中， Mullin 和 Wallis 给出了非3阶、5阶的正奇数阶Room方存在的一个简化证明。

定理 5.1 ([87])：一个v阶Room方存在当且仅当v是奇数且$v \neq 3$，$v \neq 5$。

Room方与很多组合结构都有联系。例如，带有特殊性质的Room方曾被用来构造4-GDD[88]。Room frame，可视为Room方的一种推广，曾被用来构造n阶几乎完全可分的有向k圈系[89] 和 4-frame[90]。

在这一章中，除了阶数为15和17的超单Room方的存在性未知，将证明所有阶数大于17的超单Room方均存在。

5.2 与常重复合码的联系

类似于超单Room方的定义，同样可定义超单编码。如果一个编码中的任何两个码字的支撑集相交不超过两个元素，则称这个编码是超单的。

引理 5.1：一个大小为$n(n-1)/2$的最优超单$(n,5,[2,1,1])_4$码等价于一个SSRS(n)。

证明. 在第 3 章的定理 3.1中，已证明从一个SSRS(n)可以得到一个大小为$n(n-1)/2$的最优$(n,5,[2,1,1])_4$码。由超单Room方的定义可以推出所得编码也是超单的。在下面将证明从一个大小为$n(n-1)/2$的最优超单$(n,5,[2,1,1])_4$码可以得到一个SSRS(n)。

设一个最优超单$(n,5,[2,1,1])_4$码的符号集为S。取一个空的$n\times n$阵列R。对于最优超单$(n,5,[2,1,1])_4$码中的每个码字$\langle i,j,r,c\rangle$，将元素对$\{i,j\}$填入R中的第r行、第c列的位置(r,c)。这样，R中将有$n(n-1)/2$个位置非空，且这些非空位置包含一个无序对。由于任何两个码字的距离都不小于5，因此S中的元素在每行及每列至多出现一次，并且每两个元素的无序对在R中也至多出现一次。而由于在R中恰好有$n(n-1)/2$个非空的位置，这样S中的每个元素恰好在每行及每列出现一次，并且每两个元素的无序对也在R中恰好出现一次。这样就证明了R是一个n阶Room方。而由编码的超单性的定义可以推出R也是超单的。因此，R是一个SSRS(n)。 □

以下面这个SSRS(n)存在性的必要条件来结束本节的内容。

引理 5.2: *如果一个SSRS(n)存在，则$n\geq 15$。*

证明. 假设存在一个SSRS(n)，R，其中某一个非空的位置(r,c)中含有元素x_1 和x_2。由Room方的定义，对于某些待定的$x_3,x_4,\ldots,x_{12}$值，R中的下列位置一定是非空的：

1. 位置(r,x_3) 包含元素c 和x_4；
2. 位置(c,x_5) 包含元素r 和x_6；
3. 位置(x_7,r) 包含元素c 和x_8；
4. 位置(x_9,c) 包含元素r 和x_{10}；
5. 位置(x_{11},x_{12}) 包含元素r 和c。

连同位置(r,c)，这里一共有6个不同的位置。由SSRS的超单性质知，所有的x_i，$1\leq i\leq 12$，都不相同，并且都不等于r或者c。因此在这个SSRS的符号集合中，至少有14个不同的元素，这意味着$n\geq 14$。而n是奇数是Room方存在的必要条件，因此$n\geq 15$。 □

5.3 准备工作

大部分所需组合结构的定义都可在第 2 章中找到，这里就不再重复定义。

下面将给出一些后文中将用到的构造方法。

构造 5.1 ([103])：假设存在一个$\{S_1,...,S_n\}$-Room frame，并且对于每个$1 \leq i \leq n$，$|S_i|+1$阶Room方均存在。则一个$1+\sum_{i=1}^{n}|S_i|$阶Room方存在。

构造 5.2 ([103])：假设$(X,\mathcal{G},\mathcal{B})$是一个GDD，且$w$时一个赋权函数。对于每个$x \in X$，令$S_x$是一个大小为$w(x)$的集合。假设这些$S_x$是相互不交的，且对于任意的子集$T \subset S$，定义$S_T = \cup_{x\in T} S_x$。对于任意的区组$A \in \mathcal{B}$，设$F_A$是一个$\{S_x : x \in A\}$-Room frame。令$F$是一个涵盖所有上述$F_A$的阵列。则$F$是一个$\{S_G : G \in \mathcal{G}\}$-Room frame。

构造 5.3：假设存在一个$\{S_1,...,S_n\}$-Room frame，且一个TD$(4,m)$存在，则存在一个$\{mS_1,...,mS_n\}$-Room frame。

在所有上述构造中，如果所有输入设计中的Room frame和Room方都是超单的，则得到的Room frame及Room方也是超单的。

5.4 SSRS的存在性

5.4.1 直接构造

下面将给出由计算机搜索得到的小阶数的SSRF。具体的构造方式和第 3 章中码字的构造方式类似。在下文中将用向量$< i,j,r,c >$来表示第r行、第c列中包含元素i和j。

引理 5.3：对于每一个$t \in \{7,8,9\}$，均存在一个型为4^t的SSRF。

证明. 对于每个$t \in \{7,8,9\}$，令$X_t = \mathbb{Z}_{4t}$，且$\mathcal{S}_t = \{\{i,t+i,2t+i,3t+i\} : i \in \mathbb{Z}_t\}$，则通过下列向量循环生成可得到一个型为$4^t$的SSRF，其中$\mathcal{S}_t$是洞。

1. $t = 7$

$$\begin{array}{ccccc} \langle 0,2,19,3\rangle & \langle 0,9,1,6\rangle & \langle 0,1,25,24\rangle & \langle 0,3,5,18\rangle & \langle 0,6,22,19\rangle \\ \langle 0,10,9,20\rangle & \langle 0,12,23,17\rangle & \langle 0,8,12,2\rangle & \langle 0,5,13,9\rangle & \langle 0,11,26,27\rangle \\ \langle 0,4,10,12\rangle & \langle 0,13,3,11\rangle & & & \end{array}$$

2. $t = 8$

$$\begin{array}{ccccc} \langle 0,12,1,2\rangle & \langle 0,4,3,30\rangle & \langle 0,1,18,5\rangle & \langle 0,3,5,20\rangle & \langle 0,2,22,15\rangle \\ \langle 0,5,14,12\rangle & \langle 0,13,11,14\rangle & \langle 0,14,26,25\rangle & \langle 0,10,23,9\rangle & \langle 0,11,7,29\rangle \\ \langle 0,7,4,10\rangle & \langle 0,15,10,6\rangle & \langle 0,9,15,28\rangle & \langle 0,6,25,27\rangle & \end{array}$$

3. $t = 9$

$$\begin{array}{ccccc} \langle 0,14,34,17\rangle & \langle 0,3,15,2\rangle & \langle 0,2,23,7\rangle & \langle 0,11,19,21\rangle & \langle 0,7,31,26\rangle \\ \langle 0,10,26,6\rangle & \langle 0,8,33,22\rangle & \langle 0,1,4,25\rangle & \langle 0,12,22,23\rangle & \langle 0,5,6,20\rangle \\ \langle 0,15,17,16\rangle & \langle 0,13,5,8\rangle & \langle 0,6,35,4\rangle & \langle 0,17,13,30\rangle & \langle 0,4,11,33\rangle \\ \langle 0,16,30,28\rangle & & & & \end{array}$$

□

引理 5.4: 对于每一个$t \in \{5,6,7,8,9\}$，均存在一个型为8^t的SSRF。

证明. 对于每个$t \in \{5,6,7,8,9\}$，令$X_t = \mathbb{Z}_{8t}$，且$\mathcal{S}_t = \{\{i, t+i, \ldots, 7t+i\} : i \in \mathbb{Z}_t\}$，则通过下列向量循环生成可得到一个型为$8^t$的SSRF，其中$\mathcal{S}_t$是洞。

1. $t = 5$

$$\begin{array}{ccccc} \langle 0,8,29,6\rangle & \langle 0,6,14,37\rangle & \langle 0,12,31,4\rangle & \langle 0,14,12,3\rangle & \langle 0,7,24,8\rangle \\ \langle 0,4,37,18\rangle & \langle 0,16,27,9\rangle & \langle 0,17,26,24\rangle & \langle 0,1,3,22\rangle & \langle 0,11,39,28\rangle \\ \langle 0,2,6,13\rangle & \langle 0,3,16,19\rangle & \langle 0,13,7,39\rangle & \langle 0,19,1,2\rangle & \langle 0,9,32,36\rangle \\ \langle 0,18,36,12\rangle & & & & \end{array}$$

2. $t = 6$

$$\begin{array}{ccccc} \langle 0,7,33,28\rangle & \langle 0,8,28,1\rangle & \langle 0,21,5,16\rangle & \langle 0,2,1,40\rangle & \langle 0,11,2,7\rangle \\ \langle 0,14,29,33\rangle & \langle 0,5,13,39\rangle & \langle 0,1,44,46\rangle & \langle 0,17,4,20\rangle & \langle 0,20,9,37\rangle \\ \langle 0,22,25,26\rangle & \langle 0,10,41,25\rangle & \langle 0,3,19,5\rangle & \langle 0,15,7,14\rangle & \langle 0,4,21,13\rangle \\ \langle 0,13,10,35\rangle & \langle 0,23,34,31\rangle & \langle 0,9,23,32\rangle & \langle 0,16,38,27\rangle & \langle 0,19,46,29\rangle \end{array}$$

3. $t = 7$

$$\begin{array}{ccccc} \langle 0,15,48,46\rangle & \langle 0,22,37,34\rangle & \langle 0,8,13,18\rangle & \langle 0,12,2,8\rangle & \langle 0,10,55,19\rangle \\ \langle 0,18,54,15\rangle & \langle 0,20,39,22\rangle & \langle 0,3,23,47\rangle & \langle 0,1,12,4\rangle & \langle 0,19,51,11\rangle \\ \langle 0,23,50,24\rangle & \langle 0,17,18,6\rangle & \langle 0,6,16,39\rangle & \langle 0,2,6,40\rangle & \langle 0,16,38,29\rangle \\ \langle 0,11,52,37\rangle & \langle 0,13,44,43\rangle & \langle 0,9,26,36\rangle & \langle 0,5,30,55\rangle & \langle 0,25,34,23\rangle \\ \langle 0,4,47,20\rangle & \langle 0,24,8,41\rangle & \langle 0,26,29,51\rangle & \langle 0,27,24,32\rangle & \end{array}$$

4. $t = 8$

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 0,27,20,26\rangle & \langle 0,22,28,50\rangle & \langle 0,13,46,10\rangle & \langle 0,5,50,9\rangle & \langle 0,23,60,46\rangle \\
\langle 0,15,17,20\rangle & \langle 0,17,42,52\rangle & \langle 0,14,27,21\rangle & \langle 0,1,22,12\rangle & \langle 0,29,58,43\rangle \\
\langle 0,21,30,59\rangle & \langle 0,26,38,15\rangle & \langle 0,18,59,60\rangle & \langle 0,7,4,25\rangle & \langle 0,12,19,45\rangle \\
\langle 0,19,18,55\rangle & \langle 0,25,14,44\rangle & \langle 0,28,62,13\rangle & \langle 0,10,1,3\rangle & \langle 0,11,26,1\rangle \\
\langle 0,4,35,62\rangle & \langle 0,31,54,37\rangle & \langle 0,30,10,17\rangle & \langle 0,3,39,34\rangle & \langle 0,2,51,29\rangle \\
\langle 0,20,3,22\rangle & \langle 0,9,52,39\rangle & \langle 0,6,11,47\rangle & &
\end{array}$$

5. $t = 9$

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 0,3,34,23\rangle & \langle 0,17,42,66\rangle & \langle 0,29,50,4\rangle & \langle 0,33,52,67\rangle & \langle 0,25,22,15\rangle \\
\langle 0,2,17,57\rangle & \langle 0,21,32,24\rangle & \langle 0,12,56,1\rangle & \langle 0,5,33,64\rangle & \langle 0,32,46,65\rangle \\
\langle 0,26,2,70\rangle & \langle 0,10,67,41\rangle & \langle 0,22,8,10\rangle & \langle 0,19,70,35\rangle & \langle 0,34,71,48\rangle \\
\langle 0,35,3,42\rangle & \langle 0,24,12,53\rangle & \langle 0,4,59,30\rangle & \langle 0,14,30,25\rangle & \langle 0,23,62,19\rangle \\
\langle 0,11,4,32\rangle & \langle 0,28,24,40\rangle & \langle 0,30,1,8\rangle & \langle 0,20,49,37\rangle & \langle 0,15,38,71\rangle \\
\langle 0,7,20,58\rangle & \langle 0,16,26,13\rangle & \langle 0,13,5,52\rangle & \langle 0,31,66,2\rangle & \langle 0,8,61,46\rangle \\
\langle 0,6,47,28\rangle & \langle 0,1,7,6\rangle & & &
\end{array}$$

□

引理 5.5: *存在一个型为$4^8 2^1$的SSRF。*

证明. 令$X = \mathbb{Z}_{32} \cup \{a,b\}$，且$\mathcal{S} = \{\{i, 8+i, 16+i, 24+i\} : i \in \mathbb{Z}_8\} \cup \{\{a,b\}\}$，则通过下列向量以步长为2半循环生成可得到一个型为$4^8 2^1$的SSRF，其中$\mathcal{S}_t$是洞，点$\{a,b\}$保持不动。

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 1,27,14,18\rangle & \langle 0,15,20,18\rangle & \langle 0,12,13,14\rangle & \langle 0,5,a,12\rangle & \langle 0,1,23,28\rangle \\
\langle 0,7,14,5\rangle & \langle 1,13,19,23\rangle & \langle 1,11,15,12\rangle & \langle 0,10,9,4\rangle & \langle 0,23,11,17\rangle \\
\langle 0,28,25,27\rangle & \langle 0,14,4,1\rangle & \langle 0,27,7,10\rangle & \langle 0,2,5,15\rangle & \langle 1,15,18,21\rangle \\
\langle 0,17,27,21\rangle & \langle 0,31,b,20\rangle & \langle 0,26,12,29\rangle & \langle b,1,27,26\rangle & \langle 1,31,10,30\rangle \\
\langle 0,21,19,7\rangle & \langle 0,19,10,b\rangle & \langle 0,11,26,25\rangle & \langle 1,29,28,6\rangle & \langle 0,25,21,6\rangle \\
\langle 0,9,6,11\rangle & \langle 0,29,30,9\rangle & \langle a,1,22,29\rangle & \langle 0,13,15,a\rangle & \langle a,0,17,30\rangle \\
\langle 0,3,28,22\rangle & \langle b,0,2,23\rangle & & &
\end{array}$$

□

引理 5.6: *对于每一个$t \in \{6,7\}$，均存在一个型为$4^t 6^1$的SSRF。*

证明. 对于每个$t \in \{6,7\}$，令$X_t = \mathbb{Z}_{4t} \cup \{a,b,c,d,e,f\}$，且$\mathcal{S}_t = \{\{i, t+i, 2t+i, 3t+i\} : i \in \mathbb{Z}_t\} \cup \{\{a,b,c,d,e,f\}\}$，则通过下列向量循环生成可得到一个型为$4^t 6^1$的SSRF，其中$\mathcal{S}_t$是洞，点$\{a,b,c,d,e,f\}$保持不动。

1. $t=6$

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 0,10,20,19\rangle & \langle 0,22,7,21\rangle & \langle 0,21,14,f\rangle & \langle d,0,15,4\rangle & \langle 0,9,1,a\rangle \\
\langle 0,23,13,e\rangle & \langle 0,15,c,10\rangle & \langle a,0,2,17\rangle & \langle 0,5,d,7\rangle & \langle f,1,14,9\rangle \\
\langle 0,7,e,16\rangle & \langle 1,9,5,22\rangle & \langle 1,23,9,4\rangle & \langle c,1,2,0\rangle & \langle 0,8,11,22\rangle \\
\langle c,0,21,13\rangle & \langle 1,11,8,18\rangle & \langle 0,19,22,d\rangle & \langle 0,4,8,5\rangle & \langle f,0,23,20\rangle \\
\langle a,1,23,2\rangle & \langle 0,1,b,11\rangle & \langle 0,13,a,3\rangle & \langle d,1,12,5\rangle & \langle 0,11,16,c\rangle \\
\langle b,1,10,17\rangle & \langle 0,17,f,15\rangle & \langle e,0,19,2\rangle & \langle 0,3,5,b\rangle & \langle e,1,16,21\rangle \\
\langle 1,5,0,16\rangle & \langle b,0,17,8\rangle & & &
\end{array}$$

2. $t=7$

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 0,22,25,16\rangle & \langle 1,21,19,16\rangle & \langle d,1,17,25\rangle & \langle 0,27,d,18\rangle & \langle 0,26,18,13\rangle \\
\langle 0,23,c,20\rangle & \langle c,1,20,18\rangle & \langle 1,27,21,11\rangle & \langle 0,19,24,b\rangle & \langle 0,24,26,1\rangle \\
\langle 0,25,f,6\rangle & \langle e,1,3,19\rangle & \langle c,0,13,25\rangle & \langle 0,11,6,d\rangle & \langle 0,10,1,27\rangle \\
\langle f,0,5,10\rangle & \langle 1,23,7,6\rangle & \langle 0,15,16,f\rangle & \langle a,0,23,26\rangle & \langle f,1,0,9\rangle \\
\langle 0,9,b,8\rangle & \langle e,0,8,2\rangle & \langle 0,1,12,c\rangle & \langle a,1,18,17\rangle & \langle 1,19,4,23\rangle \\
\langle 0,5,15,a\rangle & \langle 1,5,9,3\rangle & \langle d,0,4,12\rangle & \langle 0,3,27,e\rangle & \langle 1,17,26,2\rangle \\
\langle 0,16,10,11\rangle & \langle 0,13,e,19\rangle & \langle b,1,16,4\rangle & \langle 0,8,17,4\rangle & \langle 0,17,a,9\rangle \\
\langle b,0,11,3\rangle & & & &
\end{array}$$

□

引理 5.7: 对于每一个$t\in\{5,6\}$，均存在一个型为8^t2^1的SSRF。

证明. 对于每个$t\in\{5,6\}$，令$X=\mathbb{Z}_{8t}\cup\{a,b\}$，且$\mathcal{S}_t=\{\{i,t+i,2t+i,\ldots,7t+i\}: i\in\mathbb{Z}_t\}\cup\{\{a,b\}\}$，则通过下列向量循环生成可得到一个型为$8^t2^1$的SSRF，其中$\mathcal{S}_t$是洞，点$\{a,b\}$保持不动。

1. $t=5$

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 0,29,26,38\rangle & \langle 1,3,2,5\rangle & \langle 1,7,19,25\rangle & \langle 0,13,4,12\rangle & \langle 1,5,29,12\rangle \\
\langle 0,32,38,34\rangle & \langle a,1,5,33\rangle & \langle 1,9,18,22\rangle & \langle 0,22,9,31\rangle & \langle 0,26,19,37\rangle \\
\langle 1,27,34,15\rangle & \langle 0,31,7,8\rangle & \langle 0,38,22,1\rangle & \langle 1,23,12,39\rangle & \langle 1,13,39,2\rangle \\
\langle 0,23,36,29\rangle & \langle 0,9,1,17\rangle & \langle 1,17,20,4\rangle & \langle 0,36,12,28\rangle & \langle 0,6,14,27\rangle \\
\langle 0,21,29,18\rangle & \langle 0,19,2,a\rangle & \langle 0,33,b,24\rangle & \langle 0,24,18,6\rangle & \langle 0,1,37,23\rangle \\
\langle a,0,32,14\rangle & \langle 0,28,11,4\rangle & \langle 0,27,21,13\rangle & \langle 1,38,15,24\rangle & \langle 0,7,28,19\rangle \\
\langle 0,17,39,36\rangle & \langle 0,37,3,b\rangle & \langle 0,39,a,33\rangle & \langle 0,11,13,7\rangle & \langle b,0,31,39\rangle \\
\langle b,1,28,34\rangle & & & &
\end{array}$$

2. $t=6$

$\langle a,0,13,33\rangle$	$\langle 0,41,31,4\rangle$	$\langle b,1,22,9\rangle$	$\langle 0,34,41,15\rangle$	$\langle a,1,34,14\rangle$
$\langle 0,7,16,41\rangle$	$\langle 0,46,26,9\rangle$	$\langle 0,25,4,a\rangle$	$\langle 1,23,20,33\rangle$	$\langle 0,37,35,3\rangle$
$\langle 0,27,47,34\rangle$	$\langle 0,39,1,38\rangle$	$\langle 0,40,2,5\rangle$	$\langle 0,22,44,23\rangle$	$\langle 0,19,5,39\rangle$
$\langle 1,36,15,16\rangle$	$\langle 0,10,39,47\rangle$	$\langle 0,9,b,25\rangle$	$\langle 0,35,19,44\rangle$	$\langle 1,39,2,18\rangle$
$\langle 0,31,33,35\rangle$	$\langle 0,47,14,21\rangle$	$\langle 0,1,8,45\rangle$	$\langle 1,47,42,38\rangle$	$\langle 1,41,6,46\rangle$
$\langle 0,29,32,22\rangle$	$\langle 0,3,40,31\rangle$	$\langle 0,15,37,17\rangle$	$\langle 0,5,34,43\rangle$	$\langle 0,43,a,26\rangle$
$\langle 0,11,46,b\rangle$	$\langle 0,44,17,16\rangle$	$\langle b,0,3,32\rangle$	$\langle 0,45,20,46\rangle$	$\langle 0,16,25,8\rangle$
$\langle 1,15,40,41\rangle$	$\langle 0,23,15,10\rangle$	$\langle 1,5,9,26\rangle$	$\langle 0,28,23,7\rangle$	$\langle 0,17,45,2\rangle$
$\langle 0,33,11,14\rangle$	$\langle 1,29,45,24\rangle$	$\langle 1,33,32,4\rangle$	$\langle 0,21,38,19\rangle$	

□

引理 5.8: 对于每一个$t\in\{4,5,6\}$，均存在一个型为8^t4^1的SSRF。

证明. 对于每个$t\in\{4,5,6\}$，令$X_t=\mathbb{Z}_{8t}\cup\{a,b,c,d\}$，且$\mathcal{S}_t=\{\{i,t+i,2t+i,\dots,7t+i\}:i\in\mathbb{Z}_t\}\cup\{\{a,b,c,d\}\}$，则通过下列向量循环生成可得到一个型为$8^t4^1$的SSRF，其中$\mathcal{S}_t$是洞，点$\{a,b,c,d\}$保持不动。

1. $t=4$

$\langle 0,31,d,17\rangle$	$\langle 0,15,a,30\rangle$	$\langle 0,21,10,27\rangle$	$\langle d,1,27,14\rangle$	$\langle 0,17,15,6\rangle$
$\langle 0,27,2,5\rangle$	$\langle 0,3,5,c\rangle$	$\langle 0,25,11,10\rangle$	$\langle 0,19,25,26\rangle$	$\langle 0,7,c,18\rangle$
$\langle 0,6,27,13\rangle$	$\langle a,1,28,3\rangle$	$\langle 0,5,22,31\rangle$	$\langle c,1,24,23\rangle$	$\langle 0,13,26,a\rangle$
$\langle 0,18,3,9\rangle$	$\langle 0,10,7,29\rangle$	$\langle 0,23,b,21\rangle$	$\langle d,0,14,25\rangle$	$\langle 0,9,19,2\rangle$
$\langle 1,11,12,30\rangle$	$\langle 1,3,6,4\rangle$	$\langle 0,30,31,1\rangle$	$\langle c,0,13,22\rangle$	$\langle 1,19,16,10\rangle$
$\langle 0,11,30,b\rangle$	$\langle a,0,9,14\rangle$	$\langle 0,1,23,d\rangle$	$\langle b,1,15,28\rangle$	$\langle 1,27,26,0\rangle$
$\langle 0,29,6,11\rangle$	$\langle b,0,18,15\rangle$			

2. $t=5$

$\langle 1,35,23,14\rangle$	$\langle 0,29,28,1\rangle$	$\langle 0,23,27,6\rangle$	$\langle 0,7,8,b\rangle$	$\langle 1,27,35,34\rangle$
$\langle 0,14,38,12\rangle$	$\langle 0,19,31,a\rangle$	$\langle 1,9,27,30\rangle$	$\langle 0,39,d,2\rangle$	$\langle c,0,29,16\rangle$
$\langle 0,31,22,13\rangle$	$\langle d,1,39,15\rangle$	$\langle 0,6,13,34\rangle$	$\langle 0,1,37,3\rangle$	$\langle b,1,15,19\rangle$
$\langle 0,21,23,32\rangle$	$\langle 0,12,4,31\rangle$	$\langle 0,27,16,d\rangle$	$\langle 0,3,9,11\rangle$	$\langle c,1,18,27\rangle$
$\langle 0,22,39,21\rangle$	$\langle 0,8,11,22\rangle$	$\langle d,0,12,18\rangle$	$\langle a,0,1,24\rangle$	$\langle 0,33,36,c\rangle$
$\langle 0,24,18,7\rangle$	$\langle 1,37,24,28\rangle$	$\langle 1,13,34,10\rangle$	$\langle 1,39,8,0\rangle$	$\langle 0,2,21,29\rangle$
$\langle 1,23,20,39\rangle$	$\langle b,0,14,36\rangle$	$\langle 0,11,c,17\rangle$	$\langle 0,17,b,9\rangle$	$\langle a,1,12,35\rangle$
$\langle 1,25,17,29\rangle$	$\langle 0,9,33,26\rangle$	$\langle 0,13,26,37\rangle$	$\langle 0,36,2,4\rangle$	$\langle 0,37,a,33\rangle$

3. $t=6$

$\langle 0,28,17,15\rangle$	$\langle 0,2,35,10\rangle$	$\langle b,0,3,43\rangle$	$\langle 0,9,8,29\rangle$	$\langle 1,32,24,39\rangle$
$\langle 0,15,16,23\rangle$	$\langle 0,7,9,2\rangle$	$\langle 0,27,46,1\rangle$	$\langle 0,8,39,34\rangle$	$\langle 0,38,28,47\rangle$
$\langle 0,21,32,46\rangle$	$\langle 0,3,20,22\rangle$	$\langle 0,1,d,33\rangle$	$\langle c,1,10,14\rangle$	$\langle 1,33,6,34\rangle$
$\langle 0,39,43,14\rangle$	$\langle 0,43,c,16\rangle$	$\langle 0,29,b,31\rangle$	$\langle 0,31,10,c\rangle$	$\langle 1,47,30,15\rangle$
$\langle 1,21,34,18\rangle$	$\langle 1,15,35,8\rangle$	$\langle a,0,47,44\rangle$	$\langle d,1,15,11\rangle$	$\langle 1,27,11,16\rangle$
$\langle 0,33,23,25\rangle$	$\langle 0,5,45,d\rangle$	$\langle 0,25,14,11\rangle$	$\langle 0,16,21,20\rangle$	$\langle 0,47,2,b\rangle$
$\langle 1,45,42,32\rangle$	$\langle 0,26,7,39\rangle$	$\langle d,0,34,32\rangle$	$\langle a,1,16,47\rangle$	$\langle 0,4,26,21\rangle$
$\langle 0,35,13,40\rangle$	$\langle 1,26,45,5\rangle$	$\langle c,0,41,3\rangle$	$\langle 1,39,47,0\rangle$	$\langle 1,36,40,29\rangle$
$\langle 0,14,15,19\rangle$	$\langle 0,45,25,a\rangle$	$\langle 1,9,44,12\rangle$	$\langle 0,41,a,37\rangle$	$\langle 0,37,11,28\rangle$
$\langle 0,11,27,38\rangle$	$\langle 0,19,44,45\rangle$	$\langle b,1,8,30\rangle$		

□

引理 5.9: 对于每一个$t\in\{4,5,6\}$，均存在一个型为8^t6^1的SSRF。

证明. 对于每个$t\in\{4,5,6\}$，令$X_t=\mathbb{Z}_{8t}\cup\{a,b,c,d,e,f\}$，且$\mathcal{S}_t=\{\{i,t+i,2t+i,\ldots,7t+i\}:i\in\mathbb{Z}_t\}\cup\{\{a,b,c,d,e,f\}\}$，则通过下列向量循环生成可得到一个型为$8^t6^1$的SSRF，其中$\mathcal{S}_t$是洞，点$\{a,b,c,d,e,f\}$保持不动。

1. $t=4$

$\langle f,0,2,27\rangle$	$\langle 0,30,17,19\rangle$	$\langle d,1,15,20\rangle$	$\langle 0,11,29,f\rangle$	$\langle 1,15,26,0\rangle$
$\langle 0,6,1,31\rangle$	$\langle f,1,7,16\rangle$	$\langle 0,27,5,c\rangle$	$\langle 0,17,6,d\rangle$	$\langle 0,21,23,18\rangle$
$\langle 0,9,14,a\rangle$	$\langle 0,25,10,15\rangle$	$\langle 0,3,a,29\rangle$	$\langle 1,3,0,10\rangle$	$\langle 0,31,21,10\rangle$
$\langle 0,19,26,e\rangle$	$\langle 0,29,c,22\rangle$	$\langle e,0,30,1\rangle$	$\langle d,0,18,9\rangle$	$\langle 1,27,28,22\rangle$
$\langle 0,22,31,13\rangle$	$\langle 1,23,14,4\rangle$	$\langle c,0,15,14\rangle$	$\langle 0,5,f,7\rangle$	$\langle 0,13,b,11\rangle$
$\langle 0,1,d,2\rangle$	$\langle a,0,11,30\rangle$	$\langle 0,15,13,6\rangle$	$\langle 0,18,25,3\rangle$	$\langle c,1,20,7\rangle$
$\langle a,1,10,11\rangle$	$\langle 0,23,e,5\rangle$	$\langle 0,7,22,b\rangle$	$\langle e,1,27,6\rangle$	$\langle b,1,4,19\rangle$
$\langle b,0,3,26\rangle$				

2. $t=5$

$\langle 1,9,10,22\rangle$	$\langle 1,30,27,18\rangle$	$\langle 0,16,38,34\rangle$	$\langle f,0,36,24\rangle$	$\langle e,0,16,33\rangle$
$\langle 1,5,34,12\rangle$	$\langle 0,31,d,37\rangle$	$\langle a,0,18,27\rangle$	$\langle c,0,7,16\rangle$	$\langle 1,27,24,10\rangle$
$\langle 1,39,5,32\rangle$	$\langle 0,37,24,13\rangle$	$\langle d,0,4,12\rangle$	$\langle 0,17,b,11\rangle$	$\langle 0,27,e,6\rangle$
$\langle 0,1,23,b\rangle$	$\langle 1,17,35,29\rangle$	$\langle 0,36,13,19\rangle$	$\langle 0,39,a,17\rangle$	$\langle f,1,13,9\rangle$
$\langle 1,29,8,15\rangle$	$\langle 0,8,27,39\rangle$	$\langle d,1,17,5\rangle$	$\langle a,1,29,28\rangle$	$\langle 0,26,14,8\rangle$
$\langle 1,7,15,39\rangle$	$\langle 0,33,31,a\rangle$	$\langle 0,9,1,c\rangle$	$\langle 0,28,9,26\rangle$	$\langle 0,38,6,7\rangle$
$\langle 0,3,c,32\rangle$	$\langle 0,19,f,1\rangle$	$\langle 0,18,29,21\rangle$	$\langle 0,21,2,d\rangle$	$\langle 1,28,0,2\rangle$
$\langle c,1,18,37\rangle$	$\langle b,1,25,4\rangle$	$\langle 1,23,14,25\rangle$	$\langle 0,7,3,4\rangle$	$\langle 0,6,39,2\rangle$
$\langle 0,23,34,f\rangle$	$\langle b,0,26,29\rangle$	$\langle 0,29,32,e\rangle$	$\langle e,1,3,0\rangle$	

3. $t = 6$

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 0,10,2,37\rangle & \langle 0,16,43,39\rangle & \langle e,0,35,16\rangle & \langle 0,21,1,5\rangle & \langle 0,47,b,10\rangle \\
\langle d,0,13,45\rangle & \langle 0,27,44,b\rangle & \langle c,0,23,15\rangle & \langle 0,29,39,c\rangle & \langle 0,45,31,a\rangle \\
\langle d,1,46,18\rangle & \langle 0,31,3,40\rangle & \langle 0,23,4,f\rangle & \langle 0,17,15,2\rangle & \langle 0,28,9,11\rangle \\
\langle 0,9,46,e\rangle & \langle c,1,22,24\rangle & \langle a,0,10,33\rangle & \langle e,1,0,45\rangle & \langle f,1,17,3\rangle \\
\langle 1,39,44,4\rangle & \langle 0,19,d,38\rangle & \langle 0,3,a,7\rangle & \langle b,0,17,43\rangle & \langle 0,5,14,3\rangle \\
\langle 1,15,41,36\rangle & \langle 0,39,5,22\rangle & \langle 1,17,28,39\rangle & \langle 0,33,37,d\rangle & \langle 0,35,22,13\rangle \\
\langle 0,8,41,4\rangle & \langle f,0,32,46\rangle & \langle 0,2,47,19\rangle & \langle 0,14,34,1\rangle & \langle 0,37,c,9\rangle \\
\langle 0,13,f,8\rangle & \langle 1,29,3,8\rangle & \langle 1,8,33,42\rangle & \langle 1,3,4,0\rangle & \langle a,1,39,30\rangle \\
\langle 0,7,e,41\rangle & \langle 0,1,26,29\rangle & \langle 0,44,7,28\rangle & \langle 1,5,20,6\rangle & \langle 1,38,9,16\rangle \\
\langle 0,15,8,25\rangle & \langle 1,23,14,15\rangle & \langle 0,43,28,20\rangle & \langle b,1,8,40\rangle & \langle 1,9,32,17\rangle \\
\langle 0,25,21,14\rangle & \langle 0,22,38,21\rangle & & &
\end{array}$$

□

引理 5.10: *存在一个型为$8^6 10^1$的SSRF。*

证明. 令$X = \mathbb{Z}_{48} \cup \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$，且$\mathcal{S} = \{\{i, 6+i, 12+i, \ldots, 42+i\} : i \in \mathbb{Z}_6\} \cup \{\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}\}$，则通过下列向量以步长为2半循环生成可得到一个型为$8^6 10^1$的SSRF，其中$\mathcal{S}_t$是洞，点$\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$保持不动。

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 0,1,9,40\rangle & \langle 0,46,5,20\rangle & \langle 0,3,a,4\rangle & \langle 0,15,13,a\rangle & \langle 0,44,4,41\rangle \\
\langle 0,9,b,13\rangle & \langle 0,11,10,b\rangle & \langle c,0,25,21\rangle & \langle f,0,34,44\rangle & \langle 0,33,c,1\rangle \\
\langle d,0,39,47\rangle & \langle e,0,37,26\rangle & \langle 0,17,d,14\rangle & \langle g,1,38,3\rangle & \langle 1,29,12,15\rangle \\
\langle 0,21,e,29\rangle & \langle j,1,8,30\rangle & \langle a,0,16,9\rangle & \langle h,1,34,45\rangle & \langle 0,25,f,2\rangle \\
\langle g,0,19,16\rangle & \langle 0,22,44,17\rangle & \langle 0,47,g,37\rangle & \langle 0,31,46,g\rangle & \langle 0,37,38,h\rangle \\
\langle 0,7,33,10\rangle & \langle 0,19,15,d\rangle & \langle e,1,42,47\rangle & \langle 0,27,31,f\rangle & \langle h,0,35,34\rangle \\
\langle 1,3,35,10\rangle & \langle d,1,14,12\rangle & \langle 0,29,i,3\rangle & \langle 0,5,h,25\rangle & \langle f,1,39,41\rangle \\
\langle j,0,29,33\rangle & \langle c,1,22,18\rangle & \langle 0,43,j,23\rangle & \langle 0,45,47,j\rangle & \langle 0,40,32,31\rangle \\
\langle 0,23,20,e\rangle & \langle 1,5,21,0\rangle & \langle 1,9,23,42\rangle & \langle 1,11,30,16\rangle & \langle 1,33,24,11\rangle \\
\langle 0,41,2,c\rangle & \langle 0,35,27,8\rangle & \langle 0,32,43,11\rangle & \langle i,1,44,28\rangle & \langle a,1,29,32\rangle \\
\langle 0,13,23,32\rangle & \langle 1,15,18,38\rangle & \langle 0,28,1,15\rangle & \langle 0,34,14,5\rangle & \langle b,1,26,33\rangle \\
\langle 0,39,26,i\rangle & \langle 0,38,41,28\rangle & \langle 1,23,28,36\rangle & \langle i,0,17,7\rangle & \langle b,0,45,46\rangle
\end{array}$$

□

下面将用强starter来构造小阶数的SSRS。starter的定义读者可参考第 2 章中的定义。

下列每个构造中的强starter将分为两个部分P和R。P中的每个元素对将乘以m^i，其中$0 \le i \le s-1$，来生产s个元素对。而R中包含了剩下的元素对。这样，下文仅列出每个starter所对应的n, m, s, P 和R。在某些时候，R可能为空，将被省略。

引理 5.11：对于每个$n \in \{81, 91, 97, 101, 105, 113, 117, 119, 129, 135, 137, 143, 165, 167, 171, 173, 177, 213\}$，都存在一个SSRS$(n)$。

证明. 1. $n = 81, m = 2, s = 6,$

$$\begin{array}{ll} P: & \{6,20\},\{9,32\},\{23,28\},\{70,78\},\{17,41\} \\ R: & \{3,21\},\{10,19\},\{14,50\},\{25,51\},\{27,39\},\{35,38\},\{42,71\},\{49,76\}, \\ & \{54,60\},\{61,65\} \end{array}$$

2. $n = 91, m = 11, s = 5,$

$$\begin{array}{ll} P: & \{5,36\},\{75,80\},\{47,68\},\{2,29\},\{70,81\},\{27,43\} \\ R: & \{1,14\},\{8,26\},\{11,37\},\{13,17\},\{21,65\},\{30,63\},\{31,87\},\{33,84\}, \\ & \{35,78\},\{39,56\},\{44,90\},\{49,88\},\{52,53\},\{57,86\},\{58,73\} \end{array}$$

3. $n = 97, m = 4, s = 12,$

$$P: \quad \{1,3\},\{13,94\},\{28,96\},\{69,84\}$$

4. $n = 101, m = 2, s = 10,$

$$P: \quad \{22,71\},\{31,85\},\{16,96\},\{5,30\},\{70,79\}$$

5. $n = 105, m = 17, s = 6,$

$$\begin{array}{ll} P: & \{1,3\},\{2,6\},\{5,41\},\{13,95\},\{23,69\} \\ R: & \{28,88\},\{63,90\},\{15,81\},\{48,99\},\{9,49\},\{35,98\},\{12,42\},\{26,75\}, \\ & \{16,21\},\{64,84\},\{68,103\},\{71,104\},\{38,44\},\{30,58\},\{45,52\}, \\ & \{62,87\},\{4,14\},\{7,97\},\{22,77\},\{56,59\},\{60,74\},\{70,91\} \end{array}$$

6. $n = 113, m = 2, s = 14,$

$$P: \quad \{1,3\},\{18,43\},\{70,110\},\{95,112\}$$

7. $n = 117, m = 7, s = 9,$

$$\begin{array}{ll} P: & \{1,3\},\{2,6\},\{4,27\},\{8,59\} \\ R: & \{51,68\},\{16,55\},\{73,102\},\{34,58\},\{24,78\},\{13,100\},\{54,99\}, \\ & \{46,80\},\{31,67\},\{65,106\},\{88,115\},\{40,95\},\{87,108\},\{12,116\}, \\ & \{43,52\},\{17,103\},\{29,82\},\{86,104\},\{39,91\},\{19,110\},\{26,84\}, \\ & \{92,112\} \end{array}$$

8. $n = 119, m = 2, s = 6,$

$$\begin{aligned} P:\ & \{1,3\},\{5,14\},\{9,19\},\{11,35\},\{27,53\},\{37,111\} \\ R:\ & \{98,115\},\{71,78\},\{39,90\},\{99,118\},\{59,102\},\{52,85\},\{73,95\}, \\ & \{69,107\},\{34,62\},\{63,68\},\{23,86\},\{46,60\},\{79,100\},\{26,61\}, \\ & \{45,94\},\{104,117\},\{47,89\},\{51,82\},\{43,77\},\{7,64\},\{65,109\}, \\ & \{81,92\},\{17,83\} \end{aligned}$$

9. $n = 129, m = 5, s = 8,$

$$\begin{aligned} P:\ & \{12,92\},\{11,37\},\{31,65\},\{35,120\},\{49,103\},\{3,30\} \\ R:\ & \{6,80\},\{13,28\},\{14,70\},\{16,24\},\{23,59\},\{27,58\},\{32,89\},\{39,97\}, \\ & \{43,94\},\{66,98\},\{68,71\},\{72,115\},\{82,99\},\{83,123\},\{86,108\}, \\ & \{102,121\} \end{aligned}$$

10. $n = 135, m = 2, s = 8,$

$$\begin{aligned} P:\ & \{1,3\},\{5,26\},\{7,33\},\{23,118\},\{31,125\} \\ R:\ & \{18,74\},\{29,75\},\{59,79\},\{30,97\},\{36,126\},\{27,51\},\{42,60\}, \\ & \{38,99\},\{17,116\},\{34,83\},\{78,93\},\{72,102\},\{68,77\},\{45,120\}, \\ & \{63,117\},\{41,69\},\{21,58\},\{65,108\},\{82,130\},\{15,54\},\{9,81\}, \\ & \{13,121\},\{19,76\},\{84,107\},\{105,106\},\{90,103\},\{37,71\} \end{aligned}$$

11. $n = 137, m = 4, s = 17,$

$$P:\ \{1,3\},\{5,109\},\{28,134\},\{132,136\}$$

12. $n = 143, m = 7, s = 9,$

$$\begin{aligned} P:\ & \{13,107\},\{106,129\},\{77,136\},\{53,63\},\{71,108\},\{75,90\} \\ R:\ & \{2,14\},\{5,44\},\{6,97\},\{8,51\},\{9,22\},\{11,74\},\{28,35\},\{31,133\}, \\ & \{37,102\},\{42,141\},\{56,89\},\{73,139\},\{82,104\},\{83,138\},\{87,98\}, \\ & \{116,142\},\{114,115\} \end{aligned}$$

13. $n = 165, m = 7, s = 5,$

$$\begin{aligned} P:\ & \{1,3\},\{2,5\},\{4,10\},\{6,18\},\{8,12\},\{9,16\},\{15,23\},\{19,29\}, \\ & \{32,92\},\{36,148\} \\ R:\ & \{25,96\},\{119,139\},\{100,155\},\{71,154\},\{76,140\},\{50,142\},\{44,151\}, \\ & \{11,48\},\{99,110\},\{61,115\},\{33,55\},\{74,163\},\{95,143\},\{24,89\}, \\ & \{127,152\},\{20,97\},\{66,135\},\{54,120\},\{37,116\},\{40,158\},\{77,123\}, \\ & \{58,90\},\{81,121\},\{27,60\},\{22,72\},\{64,88\},\{131,150\},\{73,132\}, \\ & \{118,162\},\{67,94\},\{128,144\},\{145,146\} \end{aligned}$$

14. $n = 167, m = 2, s = 83,$

$$P:\ \{1,5\}$$

15. $n = 171, m = 17, s = 6,$

$$\begin{aligned} P: \ & \{25,148\},\{110,145\},\{48,165\},\{138,142\},\{111,163\},\{61,108\}, \\ & \{63,85\},\{125,167\} \\ R: \ & \{109,136\},\{3,72\},\{57,97\},\{95,120\},\{34,129\},\{55,79\},\{54,146\}, \\ & \{114,157\},\{5,140\},\{29,141\},\{104,168\},\{1,134\},\{30,121\},\{27,128\}, \\ & \{37,56\},\{76,131\},\{89,133\},\{33,40\},\{17,113\},\{99,127\},\{12,58\}, \\ & \{19,107\},\{8,117\},\{65,159\},\{98,151\},\{118,124\},\{51,68\},\{86,94\}, \\ & \{46,144\},\{67,139\},\{93,130\},\{38,143\},\{59,116\},\{4,152\},\{42,91\}, \\ & \{2,88\},\{80,158\} \end{aligned}$$

16. $n = 173, m = 6, s = 43,$

$$P: \ \{1,3\},\{2,15\}$$

17. $n = 177, m = 4, s = 8,$

$$\begin{aligned} P: \ & \{109,133\},\{128,153\},\{38,71\},\{58,110\},\{100,114\},\{111,150\}, \\ & \{47,135\},\{63,169\} \\ R: \ & \{2,15\},\{8,31\},\{10,89\},\{13,104\},\{29,67\},\{32,66\},\{35,117\}, \\ & \{37,129\},\{40,163\},\{41,143\},\{52,61\},\{53,162\},\{59,121\}, \\ & \{62,166\},\{80,116\},\{87,146\},\{91,155\},\{118,160\},\{124,164\}, \\ & \{130,171\},\{165,175\},\{60,140\},\{125,142\},\{148,174\} \end{aligned}$$

18. $n = 213, m = 2, s = 9,$

$$\begin{aligned} P: \ & \{46,77\},\{143,192\},\{21,114\},\{65,102\},\{104,156\},\{128,200\}, \\ & \{19,122\},\{160,181\},\{36,37\} \\ R: \ & \{6,44\},\{7,48\},\{9,28\},\{11,71\},\{12,88\},\{14,96\},\{17,78\},\{202,211\}, \\ & \{18,201\},\{22,68\},\{23,52\},\{24,145\},\{34,125\},\{39,110\},\{55,157\}, \\ & \{56,142\},\{59,117\},\{101,189\},\{111,207\},\{112,209\},\{118,136\}, \\ & \{169,205\},\{197,210\},\{139,165\},\{176,191\} \end{aligned}$$

□

引理 5.12：对于每个$n \in \{19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49,51,53, 55,57,59,61,63,65,67,69,71,73,75,77,79,83,85,87,89,93,95,99,103,107,109,111, 123,125,127,131,133\}$，都存在一个SSRS($n$)。

证明. 见第 3 章的定理 3.9。 □

5.4.2 递归构造

引理 5.13：对于每个$n \in \{115,121,139,141,145,163,169,175, 179,215,217,251\}$，都存在一个SSRS($n$)。

证明. 对于每个$n \in \{115, 139, 163\}$，取一个型为8^t6^1的SSRF（见引理 5.9），其中$t \in \{4, 5, 6\}$。利用一个TD$(4, 3)$，应用构造 5.3可得一个型为24^t18^1的SSRF。将SSRS(19)和SSRS(25)作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS(n)，其中$n = 24t + 19$。

对于每个$n \in \{121, 145, 169, 217\}$，取一个型为$8^t$的SSRF（见引理 5.4），其中$t \in \{5, 6, 7, 9\}$。利用一个TD$(4, 3)$，应用构造 5.3可得一个型为$24^t$的SSRF。将SSRS$(25)$作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS(n)，其中$n = 24t + 1$。

对于$n = 141$，取一个型为4^7的SSRF（见引理 5.3）。利用一个TD$(4, 5)$，应用构造 5.3可得到一个型为20^7的SSRF。将SSRS(21)作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS(141)。

对于$n = 175$，取一个型为$8^6 10^1$的SSRF（见引理 5.10）。利用一个TD$(4, 3)$，应用构造 5.3可得到一个型为$24^6 30^1$的SSRF。将SSRS(25)和SSRS(31)作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS(175)。

对于$n = 179$，取一个组型为4^6的5-GDD（见引理 2.7）。应用构造 5.2，对这个设计的前5组中的所有点赋权为8，对最后一个组中的3个点赋权为4，并对最后一个组中剩下的点赋权为6。所需的输入设计是型分别为$8^4 4^1$以及$8^4 6^1$的SSRF（见引理 5.8 和 5.9 ）。这样得到一个型为$32^5 18^1$的SSRF。将SSRS(19)和SSRS(33)作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS(179)。

对于$n = 215$，取一个组TD$(8, 7)$（见引理 2.8）。应用构造 5.2，对这个设计的前7组中的所有点赋权为4，对最后一个组中的3个点赋权为6，剩下的全部点赋权为0。所需的输入设计是型分别为4^7以及$4^7 6^1$的SSRF（见引理 5.3 和 5.6 ）。这样得到一个型为$28^7 18^1$的SSRF。将SSRS(19)和SSRS(29)作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS(215)。

对于$n = 251$，取一个组TD$(8, 8)$（见引理 2.8）。应用构造 5.2，对这个设计的前7组中的所有点以及最后一个组中的2个点赋权为4，对最后一个组中的另外3个点赋权为6，剩下的全部点赋权为0。所需的输入设计是型分别为4^7，4^8以及$4^7 6^1$的SSRF（见引理 5.3 和 5.6 ）。这样得到一个型为$32^7 26^1$的SSRF。将SSRS(27)和SSRS(33)作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS(251)。 $\square$

引理 5.14: 对于每个奇数n，且$n \in [147,161] \cup [181,321] \setminus \{213,215,217,251\}$，都存在一个SSRS$(n)$。

证明. 取一个TD$(5,t)$（见引理 2.8），其中$t \in \{4,5,7,8\}$。应用构造 5.2，对这个设计的前4组中的所有点以及最后一个组中的x个点赋权为8，对最后一个组中的另外y个点赋权为4，对最后一个组中剩下的点赋权为6。其中要求$8x+4y+6z \geq 18$。所需的输入设计是型分别为$8^4 4^1$，$8^4 6^1$以及8^5的SSRF（见引理 5.8， 5.9 和 5.4 ）。这样得到一个型为$(8t)^4(8x+4y+6z)^1$的SSRF。将SSRS$(8t+1)$和SSRS$(8x+4y+6z+1)$作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS$(32t+8x+4y+6z+1)$。其中$\max\{18,4t\} \leq 8x+4y+6z \leq 8t$。当$t \in \{4,5,7,8\}$，对于每个奇数$n$，且$n \in [147,161] \cup [181,201] \cup [253,281] \cup [289,321]$，都可以得到一个SSRS$(n)$。

取一个TD$(6,5)$（见引理 2.8）。应用构造 5.2，对这个设计的前5组中的所有点以及最后一个组中的a个点赋权为8，对最后一个组中的另外b个点赋权为2，对最后一个组中c个点赋权为4，对最后一个组中d个点赋权为6。剩下的全部点赋权为0。其中要求$8a+2b+4c+6d \geq 18$。所需的输入设计是型分别为8^5，$8^5 2^1$，$8^5 4^1$，$8^5 6^1$以及8^6的SSRF（见引理 5.7， 5.8， 5.9 和 5.4 ）。这样得到一个型为$40^5(8a+2b+4c+6d)^1$的SSRF。将SSRS(41)和SSRS$(8a+2b+4c+6d+1)$作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS$(200+8a+2b+4c+6d+1)$。其中$18 \leq 8a+2b+4c+6d \leq 40$。对于每个奇数$n$，且$n \in [219,241]$，都可以得到一个SSRS$(n)$。

取一个TD$(7,7)$（见引理 2.8）。应用构造 5.2，对这个设计的前6组中的所有点以及最后一个组中的a个点赋权为4，对最后一个组中剩下的b个点赋权为6。所需的输入设计是型分别为4^7以及$4^6 6^1$的SSRF（见引理 5.3 和 5.6 ）。这样得到一个型为$28^6(4a+6b)^1$的SSRF。将SSRS(29)和SSRS$(4a+6b+1)$作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS$(168+4a+6b+1)$。其中$28 \leq 4a+6b \leq 42$。对于每个奇数n，且$n \in [197,211]$，都可以得到一个SSRS(n)。

取一个TD$(9,8)$（见引理 2.8）。应用构造 5.2，对这个设计的前8组中的所有点以及最后一个组中的a个点赋权为4，对最后一个组中其余的b个点赋权为2。剩下的全部点赋权为0。要求$4a+2b \geq 18$。所需的输入设计是型分别为4^8，

$4^8 2^1$以及4^9的SSRF（见引理 5.3 和 5.5 ）。这样得到一个型为$32^8(4a+2b)^1$的SSRF。将SSRS(33)和SSRS$(4a+2b+1)$作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS$(256+4a+2b+1)$。其中$18 \leq 4a+2b \leq 32$。对于每个奇数n，且$n \in [275, 289]$，都可以得到一个SSRS(n)。

取一个组型为3^8的4-RGDD（见引理 2.6），其中有7个平行类。在每个平行类外面添加一个点，可得到一个组型为$3^8 7^1$的5-GDD。应用构造 5.2，对这个设计的所有组大小为3的8个组中的所有点以及最后一个组大小为7的组中的a个点赋权为8，对最后一个组中其余的b个点赋权为4，对最后一个组中剩下的c个点赋权为6。所需的输入设计是型分别为8^5，$8^4 4^1$以及$8^4 6^1$的SSRF（见引理 5.4， 5.8 和 5.9 ）。这样得到一个型为$24^8(8a+4b+6c)^1$的SSRF。将SSRS(25)和SSRS$(8a+4b+6c+1)$作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS$(192+8a+4b+6c+1)$。其中$28 \leq 8a+4b+6c \leq 56$。对于每个奇数n，且$n \in [221, 249]$，都可以得到一个SSRS(n)。 □

定理 5.2：*对于每个奇数$n \in [19, 321]$，都存在一个SSRS(n)。*

证明. 结合引理 5.11–5.12和引理 5.13–5.14可得结论。 □

引理 5.15：*对于每个$t \geq 5$且$t \notin [10, 20] \cup [22, 24] \cup [27, 29] \cup [32, 34]$，都存在一个型为$8^t$的SSRF。*

证明. 对于每个$5 \leq t \leq 9$，由引理 5.4 知存在一个型为8^t的SSRF。

对于每个$t \geq 10$且$t \notin [10, 20] \cup [22, 24] \cup [27, 29] \cup [32, 34]$，取一个$(t, \{5, 6, 7, 8, 9\}, 1)$-PBD（见引理 2.2 ）。应用构造 5.2，对这个设计中的所有点赋权为8。所需的输入设计是型分别为8^5，8^6，8^7，8^8以及8^9的SSRF（见引理 5.4 。这样得到一个型为8^t的SSRF。 □

引理 5.16：*对于每个$t \geq 3$，都存在一个SSRS$(8t+1)$。*

证明. 对每个$3 \leq t \leq 40$，由定理 5.2 知存在一个SSRS$(8t+1)$。

对每个$t \in [41, 55] \cup [58, 240]$，取一个TD$(6, u)$（见引理 2.8)。其中$u \in [5, 40] \setminus \{6, 10, 14, 18, 22\}$。应用构造 5.2，对这个设计的前5组中的所有点以及最后一

个组中的a个点赋权为8，剩下的全部点赋权为0。要求$a=0$或者$3\le a\le u$。所需的输入设计是型分别为8^5以及8^6的SSRF（见引理 5.4 ）。这样得到一个型为$(8u)^5(8a)^1$的SSRF。将SSRS$(8u+1)$和SSRS$(8a+1)$作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS$(8(5u+a)+1)$。当 $u\in[5,40]\setminus\{6,10,14,18,22\}$ 时，$5u+a$可取遍$\{25,28,29,30,35\}\cup[38,55]\cup[58,240]$中的所有值。

对每个$t\in\{56,57\}\cup[241,\infty)$，取一个TD$(7,u)$（见引理 2.8）。其中$u\in\{9\}\cup[39,45]\cup[47,59]\cup[61,\infty)$。取这个TD第六个组中的一点$P$。删除这个点以及这个点所在组的其余$u-6$个点，并删除最后一个组中的$a$个点。这里要求$u-a\in[5,u]\setminus([10,20]\cup[22,24]\cup[27,29]\cup[32,34])$。令所有原来过$P$的区组和删点之后的第六组形成新的组。令其余的区组连同除第六组外的所有组形成新的区组。这样得到一个组型为$5^{a+1}6^{u-a}$的$\{5,6,7,u-a,u\}$-GDD。应用构造 5.2，对这个设计的所有点赋权为8。所需的输入设计是型分别为8^5，8^6，8^7，8^{u-a}以及8^u的SSRF（见引理 5.15 ）。这样得到一个型为$40^{a+1}48^{u-a}$的SSRF。将SSRS(41)和SSRS(49)作为输入设计，应用构造 5.1，可得到一个SSRS$(8(6u-a+5)+1)$。当 $u\in\{9\}\cup[39,45]\cup[47,59]\cup[61,\infty)$ 时，$6u-a+5$可取遍$\{56,57\}\cup[241,\infty)$中的所有值。 □

定理 5.3: *对于每个奇数$n\ge 19$，都存在一个SSRS(n)。*

证明. 对每个奇数$19\le n\le 321$，由定理 5.2 知存在一个SSRS(n)。

对于每个奇数$n\ge 323$，取一个TD$(7,t)$（见引理 2.8）。其中$t\ge 7$并且$t\notin\{10,14,15,18,20,22,26,30,34,38,46,60\}$。应用构造 5.2，对这个设计的前5组中的所有点，第六个组中的x个点，以及最后一个组中的a个点赋权为8，对最后一个组中的另外b个点赋权为2，对最后一个组中c个点赋权为4，对最后一个组中d个点赋权为6。剩下的全部点赋权为0。要求$3\le x\le t$且$18\le 8a+2b+4c+6d\le\min\{8t,320\}$。所需的输入设计是型分别为$8^t2^1$，$8^t4^1$，$8^t6^1$，$8^t$ 以及8^7的SSRF（见引理 5.4 ， 5.7 ， 5.8 以及 5.9 ）。其中$t=5,6$。这样得到一个型为$(8t)^5(8x)^1(8a+2b+4c+6d)^1$的SSRF。将SSRS$(8t+1)$，SSRS$(8x+1)$和SSRS$(8a+2b+4c+6d+1)$作为输入设计（见定理 5.2 和引理 5.16 ），应用构造 5.1，可得到一个SSRS$(40t+8x+8a+2b+4c+6d+1)$。其中$3\le x\le t$且$18\le 8a+2b+$

$4c+6d \le \min\{8t, 320\}$。当 $t \ge 7$且$t \notin \{10, 14, 15, 18, 20, 22, 26, 30, 34, 38, 46, 60\}$ 时，$40t+8x+8a+2b+4c+6d+1$可取遍所有奇数$n \ge 323$。 □

5.5 总结

在这一章中，几乎完全确定了超单Room方的存在性问题。结合引理 5.2 和定理 5.3 ，可以得到本章的主要结果：

定理 5.4: 一个n阶超单Room方存在的必要条件，$n \ge 15$，也是充分的，除了$n \in \{15, 17\}$是可能的例外。

6　4-*GDD(6^n) 和相关的最优四元常重码

常重码在编码理论中扮演着重要的角色。一种带有特殊性质的K-GDD被用来构造常重码。这种K-GDD被记为K-*GDD，其中任意两个相交区组中的点最多共享2个共同的组。在这一章中将主要考察4-*GDD(g^n)的存在性。在此之前，这类GDD存在性的必要条件在下列情况被证明也是充分的：$g = 3$时，或者$g = 6$且n为素数幂、$n \equiv 3, 5, 7 \pmod 8$、$n \geq 19$时。在这一章中，将证明4-*GDD(6^n)存在的必要条件，$n \geq 14$，也是充分的。相应最优四元$(n, 5, 4)$常重码的结果也将被扩展。

6.1　背景介绍

Etzion在[23]中证明，一个定义在$\mathbb{Z}_{g+1}$的最优$(g+1)$元(n, d, k)常重码可以由一个组型为g^n的k-GDD得到。记这个GDD为$(I_n \times I_g, \{\{i\} \times I_g : i \in I_n\}, \mathcal{B})$。其中$I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$，$d$是所得编码的距离。对于其中每个区组$\{(i_1, a_1), (i_2, a_2), \ldots, (i_k, a_k)\} \in \mathcal{B}$，对每个$1 \leq j \leq k$，将$a_j$放在第$i_j$位置，其他位置放0，这样可以得到一个长度为$n$的码字。如果一个组型为$g^n$的$k$-GDD所形成的所有码字构成的编码的距离为$2k-3$，则称之为一个广义Steiner系，记为GS$(2, k, n, g)$。

一个K-GDD被称为是带有“星”性质的，并记为K-*GDD，如果其任何两个相交区组的点至多共享两个公共组。当$K = \{3\}$时，一个3-*GDD(g^n)就是一个GS$(2, 3, n, g)$。记号K-*GDD首先在[31]里引入。K-*GDD可以按照如下方法被用来构造GS$(2, k, n, g)$，因此也可以用来构造最优常重码。

引理 6.1 ([31])：如果存在一个K-*GDD(g^n)，并且对任何$k \in K$都存在一个GS$(2, 3, k, h)$，则存在一个GS$(2, 3, n, gh)$。

引理 6.2 ([47])：令m, h, s, w, g, t, u和a都是整数，使得$h = sg, n = sw, u \in \{0, 1\}$，$w \notin \{2, 6\}$，且$1 \leq t \leq w$成立。假设下列的设计存在:

(i) 一个4-*GDD(h^m)，其区组可被划分为t个集合$S_0, S_1, \ldots, S_{t-1}$，组可以被划分为$s$个大小为$g$的子组，使得对所有的$0 \le r \le t-1$，$S_r$相对于这些子组的极小距离都为5。

(ii) 一个GS$(2, 4, n+u, g)$。

则存在一个GS$(2, 4, mn+u, g)$。

在这一章中，将主要考察4-*GDD(g^n)的存在性问题。下面所列出的4-*GDD(g^n)存在的必要条件已在[47] 里得到证明。

引理 6.3 ([47]): 4-*GDD(g^n)存在性的必要条件如下:

1. $n \ge 2g+2$;

2. $n \equiv 1, 4 \pmod{12}$, 如果$g \equiv 1, 5 \pmod 6$,

   $n \equiv 1 \pmod 3$, 如果$g \equiv 2, 4 \pmod 6$,

   $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, 如果$g \equiv 3 \pmod 6$.

当$g = 3$时，上述必要条件被证明也是充分的[47] 。当$g = 6$，n是素数幂，且$n \equiv 3, 5, 7 \pmod 8$，$n \ge 19$时，上述必要条件同样被证明是充分的[49] 。本章中将接着考察4-*GDD(6^n)的存在性问题，并证明其必要条件$n \ge 14$同样是充分的。这样，GS$(2, 4, v, 3)$和最优四元$(w, 5, 4)$常重码的已知结果都得到了推广。

6.2 准备工作及Room frame构造

关于Room方和Room frame的相关定义参见第 2 章。如果一个超单Room frame同时也是斜的，则称其为超单斜Room frame。一个型为g^n的超单斜Room frame记为SSSRF(g^n)。一个n阶的超单斜Room方记为SSSRS(n)。

下面4-*GDD的构造类似于[88] 里对于4-GDD的构造。

引理 6.4: 如果存在一个SSSRF(g^n)，则存在一个4-*GDD$((6g)^n)$。

证明. 令R是一个$\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$-SSSRF，其中对于每个$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，$|S_i| = g$。也就是说$R$是一个SSSRF$(g^n)$。记$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$，$X = S \times \mathbb{Z}_6$ 且$\mathcal{G} = \{\{S_i \times \mathbb{Z}_6\} : 1 \le$

$i \le n\}$。令$\mathcal{B} = \{\{(x,i),(y,i),(r,1+i),(c,4+i)\} : i \in \mathbb{Z}_6$, 其中$\{x,y\}$包含在$R$的位置$(r,c)$中}。容易证明$(X,\mathcal{G},\mathcal{B})$是一个4-GDD($(6g)^n$)。下面将证明这个GDD还带有“星”性质。

考虑任何两个相交的区组，如$\{(x_1,i),(y_1,i),(r_1,i+1),(c_1,i+4)\}$和$\{(x_2,j),(y_2,j),(r_2,j+1),(r_2,j+4)\}$。注意到任何两个从$R$中同一个位置生成的区组是相互不交的，因此以上两个区组必然是由R中两个不同的位置生产的。又由R的超单性质，可得$|\{x_1,y_1,r_1,c_1\} \cap \{x_2,y_2,r_2,c_2\}| < 3$，这样上面两个区组中的点就至多相交于两个组中。因此$(X,\mathcal{G},\mathcal{B})$是一个4-*GDD($(6g)^n$)。 □

6.3 超单斜Room方

引理 6.5: 对于每个$n \in \{25,29,37,41,49,53,61,65,77,125\}$，都存在一个SSSRS($n$)。

证明. 这些SSSRS都由$\mathbb{Z}_n$中的斜starter构造得到。这里列出3个例子，其余的情况可在本章附录A中找到。

1. $n = 25$

   $\{7,15\},\{8,11\},\{4,16\},\{2,13\},\{6,21\},\{19,20\},\{18,23\},\{5,12\},\{1,17\},$
   $\{3,9\},\{10,14\},\{22,24\}$

2. $n = 29$

   $\{19,22\},\{6,28\},\{14,23\},\{11,27\},\{9,13\},\{8,10\},\{5,26\},\{4,15\},\{1,25\},$
   $\{16,17\},\{3,20\},\{18,24\},\{2,12\},\{7,21\}$

3. $n = 37$

   $\{27,30\},\{2,21\},\{25,36\},\{9,32\},\{31,35\},\{5,22\},\{6,16\},\{14,29\},\{28,34\},$
   $\{7,12\},\{8,24\},\{4,17\},\{3,33\},\{1,10\},\{13,15\},\{11,23\},\{18,26\},\{19,20\}.$

□

下列SSSRS和SSSRF都由starter-adder构造得到。

引理 6.6: 对每个$n \in \{21,33,45,57\}$，都存在一个SSSRS(n)。

证明. 下列带斜adder的starter均属于$\mathbb{Z}_n$。

1. $n = 21$

$$\begin{aligned} S = \ & \{\{11,18\},\{6,14\},\{8,12\},\{16,1\},\{17,19\},\{10,13\},\{4,5\},\{15,3\}, \\ & \{2,7\},\{20,9\}\} \\ A_S = \ & \{7,1,15,8,3,19,9,16,10,17\} \end{aligned}$$

2. $n = 33$

$$\begin{aligned} S = \ & \{\{31,8\},\{4,13\},\{23,30\},\{9,22\},\{19,27\},\{18,29\},\{25,26\},\{1,7\}, \\ & \{3,15\},\{17,20\},\{32,14\},\{6,11\},\{10,12\},\{24,28\},\{2,16\},\{5,21\}\} \\ A_S = \ & \{17,22,15,2,25,1,14,9,26,30,28,25,10,4,21,13\} \end{aligned}$$

3. $n = 45$

$$\begin{aligned} S = \ & \{\{12,18\},\{5,13\},\{3,8\},\{29,32\},\{31,43\},\{24,26\},\{22,39\},\{1,20\}, \\ & \{34,9\},\{19,35\},\{23,44\},\{16,30\},\{28,41\},\{10,17\},\{37,38\},\{2,11\} \\ & \{6,21\},\{36,40\},\{14,25\},\{42,7\},\{15,33\},\{27,4\}\} \\ A_S = \ & \{7,8,14,25,9,5,43,35,15,28,27,16,32,6,41,33,21,3,34,44,23,26\} \end{aligned}$$

4. $n = 57$

$$\begin{aligned} S = \ & \{\{55,22\},\{27,38\},\{37,52\},\{14,17\},\{8,21\},\{46,6\},\{5,25\},\{24,31\}, \\ & \{2,12\},\{56,13\},\{9,11\},\{16,20\},\{41,42\},\{3,30\},\{51,10\},\{18,43\}, \\ & \{53,4\},\{44,49\},\{15,34\},\{28,50\},\{29,47\},\{35,1\},\{33,45\},\{19,40\}, \\ & \{54,23\},\{39,48\},\{26,32\},\{36,7\}\} \\ A_S = \ & \{32,43,41,23,10,49,42,48,56,4,35,46,44,20,31,2,3,40,27,21,6,38, \\ & 18,50,29,52,33,12\}. \end{aligned}$$

□

引理 6.7: 对于每个$n \in \{7,8,9,10,11,12\}$，均存在一个型为4^n的SSSRF。

证明. 下列带斜adder的frame starter属于$\mathbb{Z}_{4n} \setminus \{0,n,2n,3n\}$。

1. $n = 7$

$$\begin{aligned} S = \ & \{\{3,12\},\{8,18\},\{24,27\},\{16,22\},\{15,26\},\{6,11\},\{19,20\},\{25,5\}, \\ & \{2,4\},\{9,13\},\{17,1\},\{10,23\}\} \\ A_S = \ & \{8,19,16,3,18,2,4,5,27,13,17,22\} \end{aligned}$$

2. $n = 8$

$$\begin{aligned} S = \ & \{\{11,21\},\{9,23\},\{5,17\},\{19,26\},\{3,6\},\{13,15\},\{29,30\},\{28,2\}, \\ & \{20,1\},\{22,31\},\{7,12\},\{25,4\},\{14,18\},\{27,10\}\} \\ A_S = \ & \{14,3,4,12,30,15,13,21,26,23,27,25,1,10\} \end{aligned}$$

3. $n = 9$

$$\begin{aligned} S = \ & \{\{32,33\},\{31,2\},\{8,12\},\{26,29\},\{4,16\},\{5,15\},\{19,35\},\{3,14\},\\ & \{20,22\},\{23,1\},\{13,21\},\{17,30\},\{6,11\},\{10,25\},\{28,34\},\{7,24\}\}\\ A_S = \ & \{23,1,16,33,21,2,32,19,26,7,28,12,5,25,6,14\} \end{aligned}$$

4. $n = 10$

$$\begin{aligned} S = \ & \{\{19,32\},\{18,34\},\{24,1\},\{5,23\},\{39,11\},\{14,29\},\{4,12\},\{21,35\},\\ & \{31,38\},\{25,26\},\{3,8\},\{36,2\},\{13,22\},\{6,9\},\{16,27\},\{33,37\},\\ & \{15,17\},\{28,7\}\}\\ A_S = \ & \{14,34,35,24,12,8,37,36,7,17,31,19,13,18,38,11,1,25\} \end{aligned}$$

5. $n = 11$

$$\begin{aligned} S = \ & \{\{36,7\},\{4,5\},\{12,14\},\{13,19\},\{16,29\},\{26,40\},\{25,43\},\{38,10\},\\ & \{8,28\},\{18,23\},\{31,39\},\{15,32\},\{27,37\},\{2,6\},\{42,1\},\{17,24\},\\ & \{34,9\},\{21,30\},\{35,3\},\{20,41\}\}\\ A_S = \ & \{6,25,2,30,35,21,29,43,4,16,31,37,8,17,26,24,12,10,3,39\} \end{aligned}$$

6. $n = 12$

$$\begin{aligned} S = \ & \{\{40,45\},\{6,9\},\{13,21\},\{2,16\},\{5,25\},\{33,43\},\{28,46\},\{20,37\},\\ & \{19,26\},\{39,7\},\{17,38\},\{35,41\},\{23,34\},\{1,3\},\{10,11\},\{22,31\},\\ & \{29,42\},\{32,47\},\{44,15\},\{14,18\},\{8,30\},\{4,27\}\}\\ A_S = \ & \{4,5,22,3,13,7,1,21,20,16,37,38,29,27,46,39,40,33,30,23,34,6\}. \end{aligned}$$

$\square$

在[103] 中介绍了下列这些关于Room frame的递归构造。

构造 6.1 ([103]): 假设存在一个$\{S_1,\ldots,S_n\}$-Room frame，并且对于每个 $1 \le i \le n$，$|S_i| + 1$ 阶Room方均存在。则一个$1 + \sum_{i=1}^{n} |S_i|$阶Room方存在。

构造 6.2 ([103]): 假设$(X,\mathcal{G},\mathcal{B})$是一个GDD，且$w$是一个赋权函数。对于每个$x \in X$，令$S_x$是一个大小为$w(x)$的集合。假设这些$S_x$是相互不交的，且对于任意的子集$T \subset S$，定义$S_T = \cup_{x\in T} S_x$。对于任意的区组$A \in \mathcal{B}$，设$F_A$是一个$\{S_x : x \in A\}$-Room frame。令$F$是一个涵盖所有上述$F_A$的阵列。则$F$是一个$\{S_G : G \in \mathcal{G}\}$-Room frame。

在所有上述构造中，如果所有输入设计中的Room frame和Room方都是超单且斜的，则得到的Room方及Room frame也是超单且斜的。

引理 6.8：对于每个$n > 244$且$n \equiv 1 \pmod 4$，都存在一个SSSRS(n)。

证明. 对任何$n > 244$ 且$n \equiv 1 \pmod 4$，令$n = 4v + 1$。

对于$v = 65$或者$v \geq 342$，取一个$(v+1, \{7,8,9\}, 1)$-PBD （见引理 2.3 ），删除其中一个点可得一个组型为$6^i7^j8^k$的$\{7,8,9\}$-GDD，其中$6i + 7j + 8k = v$。应用构造 6.2，对这个GDD的每个点赋权为4。所需的输入设计为型分别为4^7，4^8 以及4^9的SSSRF （见引理 6.7）。这样得到一个型为$24^i28^j32^k$的SSSRF。将SSSRS(25)，SSSRS(29) 和SSSRS(33) 作为输入设计（见引理 6.5 和 6.6 ），应用构造 5.1，可得到一个SSSRS$(4v+1)$。

对于每个$v \in [61,64] \cup [66,72]$，取一个TD$(9,8)$（见引理 2.8 ）。应用构造 6.2，对这个设计的前7组中的所有点，第8组中的a个点以及最后一个组中的b个点赋权为4。剩下的全部点赋权为0。要求$a \in \{0\} \cup [5,8]$ 且$b \in \{0\} \cup [5,8]$。所需的输入设计为型分别为4^7，4^8 以及4^9的SSSRF （见引理 6.7）。这样得到一个型为$32^7(4a)^1(4b)^1$的SSSRF。将满足$m \in [21,33]$ 以及$m \equiv 1 \pmod 4$ 的SSSRS(m) 作为输入设计（见引理 6.5 和 6.6 ），应用构造 5.1，可得到一个SSSRS$(224+4a+4b+1)$。这样对于每个$v \in [61,64] \cup [66,72]$，均可以得到一个SSSRS$(4v+1)$。

对于每个$v \in [73,90]$，取一个TD$(10,9)$（见引理 2.8 ）。应用构造 6.2，对这个设计的前7组中的所有点，第8组中的a_1个点，第9个组中的a_2个点，以及最后一个组中的a_3个点赋权为4。剩下的全部点赋权为0。要求$a_i \in \{0\} \cup [5,9]$ 对所有$i \in \{1,2,3\}$成立。所需的输入设计为型分别为4^7，4^8，4^9 以及4^10的SSSRF （见引理 6.7）。这样得到一个型为$36^7(4a_1)^1(4a_2)^1(4a_3)^1$的SSSRF。将满足$m \in [21,37]$ 以及$m \equiv 1 \pmod 4$ 的SSSRS(m) 作为输入设计（见引理 6.5 和 6.6 ），应用构造 5.1，可得到一个SSSRS$(252 + 4\sum_{i=1}^{3} a_i + 1)$。这样对于每个$v \in [73,90]$，均可以得到一个SSSRS$(4v+1)$。

对于每个$v \in [91,110]$，取一个TD$(10,11)$（见引理 2.8 ）。应用构造 6.2，对这个设计的前7组中的所有点，第8组中的a_1个点，第9个组中的a_2个点，以及最后一个组中的a_3个点赋权为4。剩下的全部点赋权为0。要求$a_i \in \{0\} \cup [5,11]$ 对所有$i \in \{1,2,3\}$成立。所需的输入设计为型分别为4^7，4^8，4^9 以及4^{10}的SSSRF （见引理 6.7）。这样得到一个型为$44^7(4a_1)^1(4a_2)^1(4a_3)^1$的SSSRF。将满足$m \in [21,45]$ 以

及$m \equiv 1 \pmod 4$ 的SSSRS(m) 作为输入设计（见引理 6.5 和 6.6 ），应用构造 5.1，可得到一个SSSRS($308 + 4\sum_{i=1}^{3} a_i + 1$)。这样对于每个$v \in [91, 110]$，均可以得到一个SSSRS($4v + 1$)。

对于每个$v \in [111, 341]$，分别取TD($12, u$)（见引理 2.8 ），其中$u \in \{13, 19, 31\}$。应用构造 6.2，对这个设计的前7组中的所有点，第8组中的a_1个点，第9个组中的a_2个点，第10个组中的a_3个点，第11个组中的a_4个点，以及最后一个组中的a_5个点赋权为4。剩下的全部点赋权为0。要求$a_i = 0, u$ 或者$5 \le a_i \le \min(u, 16)$ 对所有$i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$成立。所需的输入设计为型分别为4^7，4^8，4^9，4^{10}，4^{11} 以及4^{12}的SSSRF（见引理 6.7）。这样得到一个型为 $(4u)^7(4a_1)^1(4a_2)^1(4a_3)^1(4a_4)^1(4a_5)^1$ 的SSSRF。将满足$m \in [21, 65] \cup \{77, 125\}$ 以及$m \equiv 1 \pmod 4$ 的SSSRS(m) 作为输入设计（见引理 6.5 和 6.6 ），应用构造 5.1，可得到一个SSSRS($28u + 4\sum_{i=1}^{5} a_i + 1$)。这样对于每个$v \in [111, 341]$，均可以得到一个SSSRS($4v + 1$)。 □

6.4 $14 \le n \le 307$时4-*GDD(6^n)的存在性

引理 6.9：对于每个$n \in \{21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 77, 125\}$，都存在一个4-*GDD($6^n$)。

证明. 结合引理 6.4， 6.5 和 6.6 可得结论。 □

引理 6.10：对于每个$n > 244$且$n \equiv 1 \pmod 4$，都存在一个4-*GDD(6^n)。

证明. 结合引理 6.8 和 6.4 可得结论。 □

引理 6.11：对于每个$n \in \{14, 16\}$都存在一个4-*GDD(6^n)。

证明. 令$X_n = \mathbb{Z}_{6n}$且$\mathcal{G}_n = \{\{i, n+i, 2n+i, \ldots, 5n+i\} : i \in \mathbb{Z}_n\}$，则区组集$\mathcal{B}$是由下列基区组以步长2半循环生成的。

1. $n = 14$

$$\begin{array}{ccccc} \{0,81,23,40\} & \{1,0,52,83\} & \{0,68,21,75\} & \{0,76,9,43\} & \{1,65,41,12\} \\ \{0,5,30,15\} & \{1,63,67,79\} & \{0,55,19,78\} & \{0,74,39,77\} & \{1,38,33,20\} \\ \{0,11,38,50\} & \{1,14,77,50\} & \{0,64,62,4\} & & \end{array}$$

2. $n=16$

$$\begin{array}{lllll}\{0,37,57,81\} & \{0,74,63,4\} & \{0,15,45,49\} & \{0,40,71,83\} & \{0,27,55,17\} \\ \{0,93,88,28\} & \{0,21,76,78\} & \{0,29,7,89\} & \{0,84,35,54\} & \{0,13,86,34\} \\ \{0,67,11,61\} & \{0,1,3,46\} & \{0,69,87,95\} & \{0,14,72,9\} & \{0,19,90,73\}.\end{array}$$

□

引理 6.12: 对于每个$n \in \{15,17,19,23,27,31,39,43,47, 51,55,59,63,67,69,71,73, 79,83,93,109\}$, 都存在一个4-*GDD($6^n$)。

证明. 令$X_n = \mathbb{Z}_{6n}$且$\mathcal{G}_n = \{\{i, n+i, 2n+i, \ldots, 5n+i\} : i \in \mathbb{Z}_n\}$，则区组集$\mathcal{B}$是由下列基区组循环生成的。这里列出3个例子，其余的情况可在本章附录B中找到。

1. $n=15$

$$\begin{array}{lllll}\{0,43,49,42\} & \{0,55,82,58\} & \{0,22,74,12\} & \{0,9,76,65\} & \{0,37,19,17\} \\ \{0,57,61,21\} & \{0,5,51,64\} & & & \end{array}$$

2. $n=17$

$$\begin{array}{lllll}\{0,14,29,49\} & \{0,77,83,75\} & \{0,28,33,59\} & \{0,52,91,84\} & \{0,64,54,55\} \\ \{0,42,46,30\} & \{0,37,40,61\} & & & \\ \{0,13,57,79\} & & & & \end{array}$$

3. $n=19$

$$\begin{array}{lllll}\{0,99,85,8\} & \{0,90,4,68\} & \{0,5,40,107\} & \{0,112,78,111\} & \{0,69,89,16\} \\ \{0,9,52,96\} & \{0,88,75,58\} & \{0,82,10,31\} & \{0,60,49,108\}. & \end{array}$$

□

引理 6.13: 对于每个偶数$n \in [18,74] \cup \{78,82,84,94\}$, 都存在一个4-*GDD($6^n$)。

证明. 令$X_n = (\mathbb{Z}_{n-1} \cup \infty) \times \mathbb{Z}_6$且$\mathcal{G}_n = \{(i,0),(i,1),(i,2),(i,3),(i,4),(i,5)\} : i \in \mathbb{Z}_{n-1} \cup \{\infty\}\}$，则区组集$\mathcal{B}$是由下列基区组以在群$\mathbb{Z}_{n-1} \times \mathbb{Z}_6$下的加法作用下生成的，其中$(\infty,i)+(a,b)=(\infty,i+b)$。这里列出3个例子，其余的情况可在本章附录C中找到。

1. $n=18$

$$\begin{array}{cc}\{(\infty,0),(3,2),(7,4),(8,1)\} & \{(0,0),(11,1),(4,4),(7,4)\} \\ \{(0,0),(15,1),(4,5),(12,0)\} & \{(0,0),(1,2),(4,0),(3,5)\} \\ \{(0,0),(1,0),(16,2),(8,0)\} & \{(0,0),(3,3),(12,5),(10,4)\} \\ \{(0,0),(2,0),(5,2),(13,5)\} & \{(0,6),(12,2),(6,2),(5,3)\} \\ \{(\infty,0),(14,3),(8,0),(16,5)\} & \end{array}$$

2. $n = 20$

$$\begin{array}{cc}
\{(0,0),(14,4),(1,4),(12,4)\} & \{(0,0),(2,1),(11,1),(1,5)\} \\
\{(0,0),(8,4),(15,2),(13,5)\} & \{(0,0),(3,1),(2,4),(9,3)\} \\
\{(\infty,0),(9,4),(1,2),(6,1)\} & \{(0,0),(4,5),(7,1),(15,4)\} \\
\{(0,0),(4,1),(6,3),(9,1)\} & \{(\infty,0),(18,5),(9,3),(16,0)\} \\
\{(0,0),(9,5),(14,2),(13,2)\} & \{(0,0),(1,1),(13,1),(16,1)\}
\end{array}$$

3. $n = 22$

$$\begin{array}{cc}
\{(0,0),(11,1),(13,0),(12,4)\} & \{(0,0),(4,2),(1,1),(12,5)\} \\
\{(\infty,0),(11,0),(19,2),(14,4)\} & \{(0,0),(15,4),(18,0),(7,3)\} \\
\{(\infty,0),(9,3),(18,1),(16,5)\} & \{(0,0),(5,2),(12,3),(9,0)\} \\
\{(0,0),(16,0),(2,0),(18,1)\} & \{(0,0),(8,4),(4,1),(2,3)\} \\
\{(0,0),(14,1),(20,1),(10,1)\} & \{(0,0),(1,0),(7,4),(13,1)\} \\
\{(0,0),(1,4),(5,3),(16,5)\}. &
\end{array}$$

□

一个不完全可分组设计，K-IGDD，是一个四元组$(\mathcal{V},\mathcal{G},\mathcal{H},\mathcal{B})$，其中$\mathcal{V}$是点集，$\mathcal{G}$是将$\mathcal{V}$划分为许多子集（称为组）的集合，$\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$，$\mathcal{B}$是区组集合，使得任何一个组与一个区组最多相交于一个公共点，而从不同组中取出且不同时属于$\mathcal{H}$的点对出现在$\mathcal{B}$中唯一的一个区组中，其中对任意$B\in\mathcal{B}$，都有$|B|\in K$。在$\mathcal{G}$中，若一个有v个大小为g的组的K-IGDD，其中$\mathcal{H}$有u个组而$K=\{k\}$，则将其记为k-IGDD($g^{(v,u)}$)。如果一个K-IGDD中任何两个相交区组的点至多共享两个公共组，则称其是带有“星”性质的，且记为K-*IGDD。

引理 6.14: 对于每个$(n,u)\in\{(15,2),(17,2),(17,3),(17,4),(17,5),(17,6),(19,2),(19,3),(19,4),(21,2),(21,3),(21,5),(21,6),(23,2),(23,4),(23,5),(25,2),(25,5),(27,2),(29,2),(31,3),(31,4),(33,2),(35,2),(35,3),(35,4),(47,2)\}$，均存在一个4-*IGDD($6^{(n+u,u)}$)。

证明. 令$X_{\{n,u\}}=(\mathbb{Z}_n\cup\{\infty_0,\infty_1,\ldots,\infty_{u-1}\})\times\mathbb{Z}_6$且$\mathcal{G}_{\{n,u\}}=\{\{(i,0),(i,1),(i,2),(i,3),(i,4),(i,5)\}: i\in\mathbb{Z}_n\cup\{\infty_0,\infty_1,\ldots,\infty_{u-1}\}\}$，则区组集$\mathcal{B}$是由下列基区组以在群$\mathbb{Z}_{n-1}\times\mathbb{Z}_6$下的加法作用下生成的，其中$(\infty,i)+(a,b)=(\infty,i+b)$。这样得到一个4-*GDD($6^{(n+u,u)}$)，其中$\mathcal{G}_{\{n,u\}}$是组，而$\{\infty_0,\infty_1,\ldots,\infty_{u-1}\}\times\mathbb{Z}_6$是洞$\mathcal{H}$。这里列出3个例子，其余的情况可在本章附录D中找到。

1. $n = 15, u = 2$

$$\begin{array}{cc}
\{(\infty_0,0),(10,5),(13,0),(2,3)\} & \{(\infty_0,0),(14,4),(13,1),(4,2)\} \\
\{(\infty_1,0),(2,5),(6,0),(3,4)\} & \{(0,0),(12,1),(13,1),(2,1)\} \\
\{(\infty_1,0),(9,1),(1,2),(11,3)\} & \{(0,0),(7,2),(5,2),(6,4)\} \\
\{(0,0),(6,3),(3,3),(13,2)\} & \{(0,0),(7,3),(13,3),(4,5)\} \\
\{(0,0),(1,1),(7,0),(11,4)\} &
\end{array}$$

2. $n = 17, u = 2$

$$\begin{array}{cc}
\{(0,0),(15,2),(10,5),(13,3)\} & \{(\infty_1,0),(0,1),(10,5),(2,4)\} \\
\{(\infty_0,0),(12,2),(2,1),(16,4)\} & \{(\infty_1,0),(7,0),(6,3),(1,2)\} \\
\{(0,0),(2,2),(7,4),(13,1)\} & \{(\infty_0,0),(8,0),(0,3),(6,5)\} \\
\{(0,0),(1,2),(3,2),(4,1)\} & \{(0,0),(13,0),(1,0),(5,4)\} \\
\{(0,0),(9,1),(6,0),(14,0)\} & \{(0,0),(1,1),(7,0),(8,4)\}
\end{array}$$

3. $n = 19, u = 2$

$$\begin{array}{cc}
\{(0,0),(11,0),(3,5),(12,2)\} & \{(\infty_0,0),(10,5),(1,4),(5,1)\} \\
\{(0,0),(12,4),(17,0),(9,4)\} & \{(0,0),(15,2),(2,2),(4,1)\} \\
\{(0,0),(16,4),(3,1),(18,5)\} & \{(0,0),(5,1),(14,0),(18,0)\} \\
\{(0,0),(9,2),(2,3),(10,0)\} & \{(\infty_0,0),(10,0),(7,3),(8,2)\} \\
\{(\infty_1,0),(13,3),(6,0),(10,5)\} & \{(\infty_1,0),(4,1),(9,4),(17,2)\} \\
\{(0,0),(1,3),(7,1),(14,1)\}\text{''} &
\end{array}$$

□

下面是GDD的基本构造的一个变种。

构造 6.3：令$(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$是一个$K$-GDD，$u$是一个非负整数，而$w : X \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$是一个在$X$上的赋权函数。假设对于每个区组$B \in \mathcal{B}$，都存在一个组型为$\{w(x) : x \in B\}$的4-*GDD。进一步假设对于每个组$G \in \mathcal{G}$，都存在一个组型为$\{w(x) : x \in G\} \cup \{u\}$的4-*GDD。则存在一个组型为$\{w(x) : x \in X\} \cup \{u\}$的4-*GDD。

引理 6.15：对于每个$n \in \{224, 225\} \cup [238, 241] \cup [252, 257] \cup [266, 273] \cup [280, 290] \cup [294, 307]$，都存在一个4-*GDD$(6^n)$。

证明. 当$n \in \{224, 225\} \cup [238, 241] \cup [252, 257] \cup [266, 273]$时，取一个TD(17, 16)（见引理 2.8 ）。应用构造 6.3，对这个设计的前14组中的所有点，第$14 + a_i$组中的a_i个点赋权为6，其中$i = 1, 2, 3$。剩下的全部点赋权为0。要求$a_i \in \{0\} \cup [14, 16]$对所有$i \in \{1, 2, 3\}$成立。令$u = 0$或者6。所需的输入设计为4-*GDD$(6^m)$，其

中$m \in [14,17]$（见引理 6.11及6.12）。这样得到一个4-*GDD($6^{224+\sum a_i+u/6}$)。这样，对于每个$n \in \{224,225\} \cup [238,241] \cup [252,257] \cup [266,273]$，都可以得到一个4-*GDD($6^n$)。

当$n \in [280,290] \cup [294,307]$时，取一个TD$(18,17)$（见引理 2.8 ）。应用构造 6.3，对这个设计的前14组中的所有点，第$14+a_i$组中的a_i个点赋权为6，其中$i = 1,2,3,4$。剩下的全部点赋权为0。要求$a_i \in \{0\} \cup [14,17]$ 对所有$i \in \{1,2,3\}$成立。令$u = 0$或者6。所需的输入设计为4-*GDD(6^m)，其中$m \in [14,18]$（见引理 6.11–6.13）。这样得到一个4-*GDD($6^{238+\sum a_i+u/6}$)。这样，对于每个$n \in [280,290] \cup [294,307]$，都可以得到一个4-*GDD($6^n$)。 □

一个正交表OA(k,s)是一个$k \times s^2$阵列，其中每个位置的元素都来自一个大小为s的集合S，且满足在任意两行中，S中的每个（有序）元素对都恰好出现一次。假设$L = (e_{ij})$是一个OA(k,s)，其中$1 \le i \le k$，$1 \le j \le s^2$。$R_j = (e_{1j},\ldots,e_{kj})$被称为$L$的一个向量。假设$L_1,L_2,\ldots,L_r$是$r$个在同样元素集上的OA$(k,s)$。这$r$个OA$(k,s)$被称为是单的，如果$L_1,L_2,\ldots,L_r$中的所有$r \times s^2$个向量两两不同。这$r$个OA$(k,s)$被称为是超单的，如果$L_1,L_2,\ldots,L_r$中的任意两个向量至多在两个位置一样。

令G是一个n阶阿贝尔群。一个(n,k,λ)差矩阵（DM）是一个$k \times n\lambda$矩阵$D = (d_{ij})$，其中每个位置的元素均来自G，且对于每个$1 \le i < j \le k$，集合$\{d_{il} - d_{jl} : 1 \le l \le n\lambda\}$包含$G$中每个元素$\lambda$次。将一个$(n,k,\lambda)$差矩阵记为$(n,k,\lambda)$-DM。

引理 6.16 ([47]): *如果在一个n阶群G中存在一个$(n,4,1)$-DM，则存在超单的n 个OA$(4,n)$。*

定理 6.1 ([104]): *一个$(g,4,1)$-DM存在当且仅当$g \ge 4$且$g \not\equiv 2 \pmod 4$。*

作为引理 6.16 和定理 6.1 的推论，有如下结论。

推论 6.1: *当$g \ge 4$且$g \not\equiv 2 \pmod 4$时，存在超单的n个OA$(4,n)$。*

下面是[47] 中的奇异非直接乘积构造的一个变种。

定理 6.2: *令m,v,s 和u是整数，且$1 \le s \le v$。假设下列设计存在:*

(1) 一个4-GDD(g^m) 且其所有的区组可以被划分为s个集合$S_0, S_1, \ldots, S_{s-1}$，使得对于每个$0 \le r \le s-1$，$S_r$中任何两个相交的区组的点至多共享两个组;

(2) 超单的s个OA$(4, v)$;

(3) 一个4-*IGDD($g^{(v+u,u)}$);

(4) 一个4-*GDD(g^{v+u})。

则存在一个4-*GDD(g^{mv+u})。

引理 6.17: 对于每个$n \in \{5, 6, \ldots, 12\} \cup \{14\}$，都存在一个4-GDD($6^n$)，且其所有的区组可以被划分到不超过14个的集合中，使得每个集合中任意两个相交的区组的点至多共享两个组。

证明. (1) 对于$n = 5$，所需的GDD可以在[105] 中找到。点集为$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$。组为$\{\{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \{i\}\} : i \in \mathbb{Z}_5\}$。其区组可以被划分为如下的集合：

$S_i = \{\{(0, j, 1+i), (0, j, 4+i), (0, 1+j, i), (1, 1+j, 3+i)\}, \{(1, j, 1+i), (1, j, 4+i), (1, 2+j, i), (0, 2+j, 3+i)\} : j \in \mathbb{Z}_3\}$, 当 $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ 时，

$S_{i+5} = \{\{(0, j, 2+i), (0, j, 3+i), (0, 2+j, i), (1, 2+j, 1+i)\}, \{(1, j, 2+i), (1, j, 3+i), (1, 1+j, i), (0, 1+j, 1+i)\} : j \in \mathbb{Z}_3\}$, 当 $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ 时。

(2) 对于$n = 6$，所需的GDD可以在[105] 中找到。点集为$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$。组为$\{\{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \{i\} \times \{j\}\} : i \in \mathbb{Z}_2, j \in \mathbb{Z}_3\}$。其区组可以被划分为如下的集合：

$S_1 = \{\{(i, j, 0, k), (1+i, j, 0, 1+k), (i, j, 1, k), (1+i, 1+j, 1, 1+k)\} : i \in \mathbb{Z}_2, j \in \mathbb{Z}_3, k \in \mathbb{Z}_3\}$,

$S_2 = \{\{(i, j, 0, k), (1+i, 1+j, 0, 1+k), (i, j, 1, 1+k), (1+i, 2+j, 1, 2+k)\} : i \in \mathbb{Z}_2, j \in \mathbb{Z}_3, k \in \mathbb{Z}_3\}$,

$S_3 = \{\{(i, j, 0, k), (1+i, 2+j, 0, 1+k), (1+i, 1+j, 1, k), (i, 1+j, 1, 2+k)\} : i \in \mathbb{Z}_2, j \in \mathbb{Z}_3, k \in \mathbb{Z}_3\}$,

$S_4 = \{\{(i, j, 0, 0), (i, 2+j, 0, 1), (i, j, 0, 2), (1+i, j, 1, 0)\}, \{(i, j, 0, 0), (i, 2+j, 1, 0), (i, 2+j, 1, 1), (i, j, 1, 2)\} : i \in \mathbb{Z}_2, j \in \mathbb{Z}_3\}$,

$S_5 = \{\{(i,j,0,1),(i,2{+}j,0,2),(i,j,0,0),(1{+}i,j,1,1)\},\{(i,j,0,1),(i,2{+}j,1,1),(i,2{+}j,1,2),(i,j,1,0)\} : i \in \mathbb{Z}_2, j \in \mathbb{Z}_3\}$,

$S_6 = \{\{(i,j,0,2),(i,2{+}j,0,0),(i,j,0,1),(1{+}i,j,1,2)\},\{(i,j,0,2),(i,2{+}j,1,2),(i,2{+}j,1,0),(i,j,1,1)\} : i \in \mathbb{Z}_2, j \in \mathbb{Z}_3\}$.

(3) 对于每个$n \in \{7,8,9,10,11,12\}$，在$\mathbb{Z}_{6n}$上构造所需的设计。组为$\{\{i,i{+}n,\ldots,i{+}5n\} : i \in \mathbb{Z}_n\}$。其区组可以被划分为如下的集合：

当$n=7$:

$S_1 = \{\{2i, 8+2i, 13+2i, 39+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{21}\}$,

$S_2 = \{\{2i, 16+2i, 40+2i, 36+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{21}\}$,

$S_3 = \{\{2i, 32+2i, 1+2i, 41+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{21}\}$,

$S_4 = \{\{2i, 33+2i, 15+2i, 30+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{21}\}$,

$S_5 = \{\{2i, 25+2i, 37+2i, 17+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{21}\}$,

$S_6 = \{\{2i, 19+2i, 23+2i, 29+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{21}\}$.

当$n=8$:

$S_1 = \{\{2i, 39+2i, 30+2i, 33+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{24}\}$,

$S_2 = \{\{2i, 11+2i, 15+2i, 45+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{24}\}$,

$S_3 = \{\{2i, 31+2i, 5+2i, 36+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{24}\}$,

$S_4 = \{\{2i, 10+2i, 29+2i, 6+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{24}\}$,

$S_5 = \{\{2i, 35+2i, 25+2i, 37+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{24}\}$,

$S_6 = \{\{2i, 28+2i, 1+2i, 2+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{24}\}$,

$S_7 = \{\{2i, 7+2i, 14+2i, 27+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{24}\}$.

当$n=9$:

$S_1 = \{\{i, 10+i, 53+i, 14+i\} : i \in \mathbb{Z}_{54}\}$,

$$S_2 = \{\{i, 52+i, 21+i, 28+i\} : i \in \mathbb{Z}_{54}\},$$

$$S_3 = \{\{i, 45+i, 5+i, 8+i\} : i \in \mathbb{Z}_{54}\},$$

$$S_4 = \{\{i, 6+i, 22+i, 35+i\} : i \in \mathbb{Z}_{54}\}.$$

当$n = 10$:

$$S_1 = \{\{2i, 33+2i, 51+2i, 29+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{30}\},$$

$$S_2 = \{\{2i, 2+2i, 14+2i, 13+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{30}\},$$

$$S_3 = \{\{2i, 57+2i, 43+2i, 31+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{30}\},$$

$$S_4 = \{\{2i, 39+2i, 47+2i, 15+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{30}\},$$

$$S_5 = \{\{2i, 4+2i, 9+2i, 7+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{30}\},$$

$$S_6 = \{\{2i, 1+2i, 24+2i, 45+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{30}\},$$

$$S_7 = \{\{2i, 8+2i, 35+2i, 42+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{30}\},$$

$$S_8 = \{\{2i, 22+2i, 41+2i, 16+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{30}\},$$

$$S_9 = \{\{2i, 17+2i, 23+2i, 28+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{30}\}.$$

当$n = 11$:

$$S_1 = \{\{i, 25+i, 7+i, 24+i\} : i \in \mathbb{Z}_{66}\},$$

$$S_2 = \{\{i, 50+i, 63+i, 27+i\} : i \in \mathbb{Z}_{66}\},$$

$$S_3 = \{\{i, 26+i, 58+i, 54+i\} : i \in \mathbb{Z}_{66}\},$$

$$S_4 = \{\{i, 51+i, 5+i, 57+i\} : i \in \mathbb{Z}_{66}\},$$

$$S_5 = \{\{i, 2+i, 21+i, 31+i\} : i \in \mathbb{Z}_{66}\}.$$

当$n = 12$:

$$S_1 = \{\{2i, 44+2i, 61+2i, 5+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\},$$

$$S_2 = \{\{2i, 1+2i, 64+2i, 50+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\},$$

$$S_3 = \{\{2i, 13+2i, 70+2i, 30+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\},$$

$$S_4 = \{\{2i, 43+2i, 63+2i, 69+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\},$$

$$S_5 = \{\{2i, 4+2i, 39+2i, 57+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\},$$

$$S_6 = \{\{2i, 18+2i, 56+2i, 67+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\},$$

$$S_7 = \{\{2i, 29+2i, 27+2i, 59+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\},$$

$$S_8 = \{\{2i, 41+2i, 62+2i, 37+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\},$$

$$S_9 = \{\{2i, 31+2i, 65+2i, 3+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\},$$

$$S_{10} = \{\{2i, 19+2i, 66+2i, 46+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\},$$

$$S_{11} = \{\{2i, 7+2i, 21+2i, 71+2i\} : i \in \mathbb{Z}_{36}\}.$$

(4) 当$n=14$，由引理 6.11 知存在一个4-*GDD(6^{14})，因此其所有的区组可以被划分到同一个集合中。

□

引理 6.18：对于每个$n \in [75,76] \cup [80,81] \cup [85,92] \cup [95,108] \cup [110,124] \cup [126,223] \cup [226,237] \cup [242,251] \cup [258,266] \cup \{274,275,276,278,279,291,292\}$，均存在一个4-*GDD($6^n$)。

证明. 对于每个给定的n，令$g=6$, $s=14$, $m \geq 5$, $v \geq 14$ 且$v \not\equiv 2 \pmod 4$。应用定理 6.2 得到一个4-*GDD(6^n)，其中$n = mv+u$。对于每个n，参数m, v, u在表6.1中给出。这里，输入设计4-*IGDD($6^{(v+u,u)}$) 和4-*GDD(6^{v+u}) 均存在（见引理6.9和6.11–6.14）。由引理 6.17 和推论 6.1 可知初始的4-GDD(6^m)和超单的14个OA$(4,v)$分别存在。 □

引理 6.19：对于每个$n \in [14,307]$，均存在一个4-*GDD(6^n)。

证明. 结合引理 6.9–6.13， 6.15 和 6.18 可得结论。 □

6.5 主要结果

引理 6.20：对于任何$n \geq 308$，都存在一个4-*GDD(6^n)。

表 6.1 引理6.18中SIP构造的参数

n	$m \times v + u$	n	$m \times v + u$	n	$m \times v + u$	n	$m \times v + u$	n	$m \times n + u$
75	$5 \times 15 + 0$	76	$5 \times 15 + 1$	80	$5 \times 16 + 0$	81	$5 \times 16 + 1$	85	$5 \times 17 + 0$
86	$5 \times 17 + 1$	87	$5 \times 17 + 2$	88	$5 \times 17 + 3$	89	$5 \times 17 + 4$	90	$5 \times 17 + 5$
91	$5 \times 17 + 6$	92	$7 \times 13 + 1$	95	$5 \times 19 + 0$	96	$5 \times 19 + 1$	97	$5 \times 19 + 2$
98	$5 \times 19 + 3$	99	$5 \times 19 + 4$	100	$5 \times 20 + 0$	101	$5 \times 20 + 1$	102	$6 \times 17 + 0$
103	$6 \times 17 + 1$	104	$6 \times 17 + 2$	105	$5 \times 21 + 0$	106	$5 \times 21 + 1$	107	$5 \times 21 + 2$
108	$5 \times 21 + 3$	110	$5 \times 21 + 5$	111	$5 \times 21 + 6$	112	$7 \times 16 + 0$	113	$7 \times 16 + 1$
114	$6 \times 19 + 0$	115	$5 \times 23 + 0$	116	$5 \times 23 + 1$	117	$5 \times 23 + 2$	118	$6 \times 19 + 4$
119	$5 \times 23 + 4$	120	$5 \times 24 + 0$	121	$5 \times 24 + 1$	122	$8 \times 15 + 2$	123	$7 \times 17 + 4$
124	$7 \times 17 + 5$	126	$5 \times 25 + 1$	127	$6 \times 21 + 1$	128	$8 \times 16 + 0$	129	$8 \times 16 + 1$
130	$5 \times 25 + 5$	131	$6 \times 21 + 5$	132	$6 \times 21 + 6$	133	$7 \times 19 + 0$	134	$7 \times 19 + 1$
135	$5 \times 27 + 0$	136	$5 \times 27 + 1$	137	$5 \times 27 + 2$	138	$6 \times 23 + 0$	139	$6 \times 23 + 1$
140	$5 \times 28 + 0$	141	$5 \times 28 + 1$	142	$6 \times 23 + 4$	143	$6 \times 23 + 5$	144	$6 \times 24 + 0$
145	$5 \times 29 + 0$	146	$5 \times 29 + 1$	147	$7 \times 21 + 0$	148	$7 \times 21 + 1$	149	$7 \times 21 + 2$
150	$6 \times 25 + 0$	151	$6 \times 25 + 1$	152	$8 \times 19 + 0$	153	$8 \times 19 + 1$	154	$8 \times 19 + 2$
155	$5 \times 31 + 0$	156	$5 \times 31 + 1$	157	$9 \times 17 + 4$	158	$5 \times 31 + 3$	159	$5 \times 31 + 4$
160	$5 \times 32 + 0$	161	$5 \times 32 + 1$	162	$6 \times 27 + 0$	163	$6 \times 27 + 1$	164	$6 \times 27 + 2$
165	$5 \times 33 + 0$	166	$5 \times 33 + 1$	167	$5 \times 33 + 2$	168	$6 \times 28 + 0$	169	$6 \times 28 + 1$
170	$8 \times 21 + 2$	171	$9 \times 19 + 0$	172	$9 \times 19 + 1$	173	$8 \times 21 + 5$	174	$6 \times 29 + 0$
175	$6 \times 29 + 1$	176	$5 \times 35 + 1$	177	$11 \times 16 + 1$	178	$5 \times 35 + 3$	179	$5 \times 35 + 4$
180	$5 \times 36 + 0$	181	$5 \times 36 + 1$	182	$12 \times 15 + 2$	183	$14 \times 13 + 1$	184	$8 \times 23 + 0$
185	$5 \times 37 + 0$	186	$5 \times 37 + 1$	187	$6 \times 31 + 1$	188	$11 \times 17 + 1$	189	$11 \times 17 + 2$
190	$11 \times 17 + 3$	191	$11 \times 17 + 4$	192	$6 \times 32 + 0$	193	$6 \times 32 + 1$	194	$10 \times 19 + 4$
195	$5 \times 39 + 0$	196	$5 \times 39 + 1$	197	$7 \times 28 + 1$	198	$6 \times 33 + 0$	199	$6 \times 33 + 1$
200	$5 \times 40 + 0$	201	$5 \times 40 + 1$	202	$8 \times 25 + 2$	203	$7 \times 29 + 0$	204	$7 \times 29 + 1$
205	$5 \times 41 + 0$	206	$5 \times 41 + 1$	207	$9 \times 23 + 0$	208	$9 \times 23 + 1$	209	$9 \times 23 + 2$
210	$6 \times 35 + 0$	211	$6 \times 35 + 1$	212	$6 \times 35 + 2$	213	$6 \times 35 + 3$	214	$6 \times 35 + 4$
215	$5 \times 43 + 0$	216	$5 \times 43 + 1$	217	$6 \times 36 + 1$	218	$7 \times 31 + 1$	219	$7 \times 31 + 2$
220	$5 \times 44 + 0$	221	$5 \times 44 + 1$	222	$6 \times 37 + 0$	223	$6 \times 37 + 1$	226	$5 \times 45 + 1$
227	$9 \times 25 + 2$	228	$12 \times 19 + 0$	229	$12 \times 19 + 1$	230	$10 \times 23 + 0$	231	$10 \times 23 + 1$
232	$7 \times 33 + 1$	233	$7 \times 33 + 2$	234	$6 \times 39 + 0$	235	$5 \times 47 + 0$	236	$5 \times 47 + 1$
237	$5 \times 47 + 2$	242	$14 \times 17 + 4$	243	$9 \times 27 + 0$	244	$9 \times 27 + 1$	245	$5 \times 49 + 0$
246	$5 \times 49 + 1$	247	$6 \times 41 + 1$	248	$8 \times 31 + 0$	249	$8 \times 31 + 1$	250	$10 \times 25 + 0$
251	$10 \times 25 + 1$	258	$6 \times 43 + 0$	259	$7 \times 37 + 0$	260	$7 \times 37 + 1$	261	$5 \times 52 + 1$
262	$9 \times 29 + 1$	263	$9 \times 29 + 2$	264	$8 \times 33 + 0$	265	$5 \times 53 + 0$	266	$5 \times 53 + 1$
274	$7 \times 39 + 1$	275	$5 \times 55 + 0$	276	$5 \times 55 + 1$	278	$12 \times 23 + 2$	279	$9 \times 31 + 0$
291	$10 \times 29 + 1$	292	$10 \times 29 + 2$						

证明. 当$n \in [308, 381]$时，取一个TD(20, 19)（见引理 2.8 ）。应用构造 6.3，对这个设计的前14组中的所有点，第$14 + a_i$组中的a_i个点赋权为6，其中$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$。剩下的全部点赋权为0。要求$a_i \in \{0\} \cup [14, 19]$ 对所有$i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$成立。令$u = 0$或者6。所需的输入设计为4-*GDD($6^m$)，其中$m \in [14, 20]$ （见引理 6.19）。这样得到一个4-*GDD($6^{266+\sum a_i+u/6}$)。这样，对于每个$n \in [308, 381]$，都可以得到一个4-*GDD(6^n)。

当$n \in [382, 552]$时，取一个TD(24, 23)（见引理 2.8 ）。应用构造 6.3，对这个设计的前14组中的所有点，第$14 + a_i$组中的a_i个点赋权为6，其中$i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$。剩下的全部点赋权为0。要求$a_i \in \{0\} \cup [14, 23]$ 对所有$i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$成立。令$u = 0$或者6。所需的输入设计为4-*GDD($6^m$)，其中$m \in [14, 24]$ （见引理 6.19）。这样得到一个4-*GDD($6^{322+\sum a_i+u/6}$)。这样，对于每个$n \in [382, 552]$，都可以得到一个4-*GDD(6^n)。

当$n \in [553, 1406]$时，取一个TD(38, 37)（见引理 2.8 ）。应用构造 6.3，对这个设计的前14组中的所有点，第$14 + a_i$组中的a_i个点赋权为6，其中$i \in \{1, 2, \ldots, 24\}$。剩下的全部点赋权为0。要求$a_i \in \{0\} \cup [14, 37]$ 对所有$i \in \{1, 2, \ldots, 24\}$成立。令$u = 0$或者6。所需的输入设计为4-*GDD($6^m$)，其中$m \in [14, 38]$ （见引理 6.19）。这样得到一个4-*GDD($6^{518+\sum a_i+u/6}$)。这样，对于每个$n \in [553, 1406]$，都可以得到一个4-*GDD(6^n)。

当$n \in [1407, 5402]$时，取一个TD(74, 73)（见引理 2.8 ）。应用构造 6.3，对这个设计的前14组中的所有点，第$14 + a_i$组中的a_i个点赋权为6，其中$i \in \{1, 2, \ldots, 60\}$。剩下的全部点赋权为0。要求$a_i \in \{0\} \cup [14, 73]$ 对所有$i \in \{1, 2, \ldots, 60\}$成立。令$u = 0$或者6。所需的输入设计为4-*GDD($6^m$)，其中$m \in [14, 74]$ （见引理 6.19）。这样得到一个4-*GDD($6^{1022+\sum a_i+u/6}$)。这样，对于每个$n \in [1407, 5402]$，都可以得到一个4-*GDD(6^n)。

当$n > 5403$，取一个TD$(17, t)$或TD$(17, t + 4i)$，其中对于任何$t \geq 241$且$t \equiv 1 \pmod 4$，有$i \in \{1, 2, 3, 4\}$（见[95] ）。应用构造 6.3，对这个设计的前14组中的所有点，第15组中的a个点，第16组中的b个点以及最后一个组中的c个点赋权为6。剩下的全部点赋权为0。要求$a, b \equiv 1 \pmod 4$，$14 \leq a, b \leq t$且$14 \leq c \leq 74$成立。所需

的输入设计为4-*GDD(6^m)，其中$m \in [14, 74]$或$m > 74$，$m \equiv 1 \pmod 4$（见引理6.12 和 6.19）。这样，对于每个$n \in [14t+14, 16t+74]$，均可以得到一个4-*GDD(6^n)。不难验证当$t \equiv 1 \pmod 4$取遍所有$[241, \infty)$中的值时，区间$[14t+14, 16t+74]$相互覆盖。 □

结合引理 6.19 和 6.20 ，可以得到这一章的主要结果，定理如下：

定理 6.3: 4-*GDD(6^n)存在的必要条件，$n \geq 14$，也是充分的。

6.6 总结

利用上面4-*GDD(6^n)的存在性结论，可以得到一些新的最优非线性四元常重码。以下是一些已知的广义系的结果：

引理 6.21 ([48]): 对于任意的素数$v \equiv 1 \pmod 4$且$v > 13$，都存在一个GS$(2, 4, v, 3)$。

引理 6.22 ([49]): 如果一个素数幂$v \equiv 3, 5, 7 \pmod 8$且$v \geq 19$，而$2n + 1 \equiv 1 \pmod 4$是一个素数，且$2n+1 > 13$，则一个GS$(2, 4, 2vn+1, 3)$与一个GS$(2, 4, v(2n+1), 3)$同时存在。

结合引理 6.2 和 6.21 ，可以将引理 6.22 中的存在性结果改进为下面的结论。

定理 6.4: 如果$v \geq 14$，而$2n + 1 \equiv 1 \pmod 4$是一个素数，且$2n + 1 > 13$，则一个GS$(2, 4, 2vn + 1, 3)$与一个GS$(2, 4, v(2n + 1), 3)$同时存在。

定理 6.5: 如果$v \geq 14$，而$2n + 1 \equiv 1 \pmod 4$是一个素数，且$2n + 1 > 13$，则存在一个最优非线性四元$(w, 5, 4)$常重码，其中$w = 2vn + 1$或$v(2n + 1)$。

超单斜Room方在构造4-*GDD(6^n)的过程中发挥了重要的作用。其本身的存在性问题也是十分有趣的。在这一章中得到了其存在性的部分结果，但是离完全解决其存在性问题还差得很远。这个问题可以作为以后研究工作的一个主题。

附录A

1. $n = 41$

$\{7,29\},\{25,28\},\{8,24\},\{30,39\},\{18,26\},\{17,23\},\{31,35\},\{2,22\},\{1,32\},\{21,34\},\{6,13\},\{9,36\},\{3,27\},$
$\{15,20\},\{37,38\},\{10,33\},\{12,14\},\{4,19\},\{5,16\},\{11,40\}$

2. $n = 49$

$\{5,17\},\{8,26\},\{13,40\},\{38,42\},\{12,31\},\{28,41\},\{14,19\},\{27,48\},\{1,36\},\{9,15\},\{7,23\},\{2,34\},$
$\{29,37\},\{20,22\},\{3,45\},\{18,21\},\{6,32\},\{4,43\},\{11,35\},\{10,30\},\{16,25\},\{24,39\},\{33,44\},\{46,47\}$

3. $n = 53$

$\{7,32\},\{23,34\},\{16,39\},\{5,49\},\{27,42\},\{12,13\},\{15,28\},\{43,45\},\{26,46\},\{19,22\},\{18,50\},\{4,40\},$
$\{10,37\},\{17,31\},\{20,36\},\{33,52\},\{25,35\},\{38,44\},\{47,51\},\{2,24\},\{1,30\},\{9,21\},\{3,8\},\{6,14\},$
$\{11,29\},\{41,48\}$

4. $n = 61$

$\{20,46\},\{15,28\},\{32,38\},\{26,36\},\{29,49\},\{4,18\},\{10,19\},\{30,51\},\{44,48\},\{8,25\},\{14,41\},\{21,50\},$
$\{1,34\},\{17,47\},\{11,27\},\{2,13\},\{5,42\},\{35,53\},\{37,60\},\{54,57\},\{33,40\},\{24,39\},\{6,59\},\{7,12\},$
$\{3,45\},\{9,31\},\{16,52\},\{43,55\},\{22,23\},\{56,58\}$

5. $n = 65$

$\{18,52\},\{49,51\},\{2,23\},\{1,47\},\{35,36\},\{6,14\},\{45,61\},\{53,62\},\{37,54\},\{9,29\},\{3,40\},\{17,46\},$
$\{13,16\},\{10,43\},\{4,27\},\{5,59\},\{34,41\},\{21,31\},\{20,38\},\{11,50\},\{7,12\},\{24,64\},\{8,60\},\{33,48\},$
$\{26,30\},\{19,25\},\{15,58\},\{28,55\},\{22,57\},\{32,44\},\{39,63\},\{42,56\}$

6. $n = 77$

$\{72,73\},\{14,17\},\{24,46\},\{10,70\},\{12,50\},\{27,61\},\{33,43\},\{49,68\},\{7,9\},\{28,57\},\{18,30\},\{16,25\},$
$\{22,36\},\{2,8\},\{31,51\},\{1,37\},\{26,39\},\{6,38\},\{32,69\},\{53,71\},\{42,67\},\{56,63\},\{11,60\},\{34,45\},$
$\{19,40\},\{4,48\},\{5,55\},\{47,52\},\{41,64\},\{62,66\},\{23,58\},\{3,54\},\{13,21\},\{15,76\},\{29,75\},\{20,44\},$
$\{35,65\},\{59,74\}$

7. $n = 125$

$\{23,52\},\{106,124\},\{51,70\},\{1,11\},\{46,89\},\{56,94\},\{36,37\},\{55,69\},\{62,77\},\{14,42\},\{7,44\},\{40,93\},$
$\{27,59\},\{33,87\},\{31,120\},\{20,71\},\{50,99\},\{2,47\},\{22,122\},\{30,53\},\{68,84\},\{61,102\},\{74,79\},$
$\{80,115\},\{24,86\},\{8,54\},\{48,109\},\{49,82\},\{26,117\},\{29,38\},\{83,90\},\{64,108\},\{66,105\},\{21,91\},$
$\{16,28\},\{39,116\},\{12,72\},\{88,96\},\{92,98\},\{57,104\},\{41,107\},\{19,75\},\{73,113\},\{13,114\},\{78,100\},$
$\{9,123\},\{6,10\},\{18,85\},\{43,111\},\{81,101\},\{5,35\},\{3,34\},\{32,58\},\{45,97\},\{4,17\},\{95,112\},\{60,110\},$
$\{15,119\},\{63,65\},\{118,121\},\{25,67\},\{76,103\}$

附录B

1. $n = 23$

$\{0,24,42,22\}$	$\{0,45,127,122\}$	$\{0,109,74,19\}$	$\{0,14,17,105\}$	$\{0,94,128,41\}$	$\{0,36,75,137\}$
$\{0,28,68,100\}$	$\{0,134,113,125\}$	$\{0,71,86,78\}$	$\{0,6,49,79\}$	$\{0,26,57,84\}$	

2. $n = 27$

$\{0,129,126,110\}$	$\{0,11,28,141\}$	$\{0,114,85,70\}$	$\{0,105,125,50\}$	$\{0,2,60,53\}$	$\{0,115,31,158\}$
$\{0,67,72,6\}$	$\{0,89,71,9\}$	$\{0,154,68,22\}$	$\{0,1,124,150\}$	$\{0,137,40,74\}$	$\{0,23,79,121\}$
$\{0,93,152,138\}$					

3. $n = 31$

$\{0,17,8,47\}$ $\{0,153,81,49\}$ $\{0,69,98,34\}$ $\{0,121,132,76\}$ $\{0,58,101,46\}$ $\{0,36,20,165\}$
$\{0,119,142,92\}$ $\{0,171,4,185\}$ $\{0,10,3,106\}$ $\{0,102,28,127\}$ $\{0,113,13,61\}$ $\{0,26,63,133\}$
$\{0,164,75,126\}$ $\{0,66,144,184\}$ $\{0,6,77,168\}$

4. $n = 39$

$\{0,219,75,217\}$ $\{0,228,158,200\}$ $\{0,198,86,104\}$ $\{0,1,188,73\}$ $\{0,210,20,133\}$
$\{0,31,183,56\}$ $\{0,212,221,189\}$ $\{0,79,8,168\}$ $\{0,5,186,129\}$ $\{0,207,166,58\}$
$\{0,141,103,54\}$ $\{0,223,50,10\}$ $\{0,171,65,174\}$ $\{0,170,135,19\}$ $\{0,55,201,175\}$
$\{0,4,138,222\}$ $\{0,136,227,165\}$ $\{0,220,123,153\}$ $\{0,154,197,102\}$

5. $n = 43$

$\{0,44,9,211\}$ $\{0,39,227,81\}$ $\{0,178,27,34\}$ $\{0,14,235,72\}$ $\{0,46,103,13\}$ $\{0,173,222,79\}$
$\{0,96,45,228\}$ $\{0,133,17,165\}$ $\{0,185,84,102\}$ $\{0,247,50,76\}$ $\{0,106,230,255\}$ $\{0,198,8,67\}$
$\{0,21,92,40\}$ $\{0,64,184,119\}$ $\{0,62,238,254\}$ $\{0,5,113,128\}$ $\{0,147,6,69\}$ $\{0,41,118,29\}$
$\{0,205,1,105\}$ $\{0,137,234,236\}$ $\{0,98,136,88\}$

6. $n = 47$

$\{0,105,275,175\}$ $\{0,239,84,28\}$ $\{0,63,255,250\}$ $\{0,61,218,35\}$ $\{0,81,161,240\}$
$\{0,228,146,268\}$ $\{0,58,17,280\}$ $\{0,207,185,216\}$ $\{0,158,86,89\}$ $\{0,52,16,197\}$
$\{0,18,191,51\}$ $\{0,217,98,87\}$ $\{0,171,209,4\}$ $\{0,74,15,194\}$ $\{0,96,126,50\}$
$\{0,149,128,262\}$ $\{0,257,92,93\}$ $\{0,83,138,150\}$ $\{0,44,10,269\}$ $\{0,24,204,253\}$
$\{0,68,178,116\}$ $\{0,6,114,153\}$ $\{0,143,106,151\}$

7. $n = 51$

$\{0,243,206,217\}$ $\{0,22,179,163\}$ $\{0,201,134,200\}$ $\{0,97,103,263\}$ $\{0,17,38,152\}$
$\{0,116,47,148\}$ $\{0,183,236,224\}$ $\{0,145,173,228\}$ $\{0,44,136,235\}$ $\{0,222,249,80\}$
$\{0,93,287,35\}$ $\{0,90,139,15\}$ $\{0,77,197,227\}$ $\{0,208,76,20\}$ $\{0,144,126,168\}$
$\{0,29,304,299\}$ $\{0,244,196,241\}$ $\{0,151,147,238\}$ $\{0,218,8,184\}$ $\{0,121,131,81\}$
$\{0,119,60,73\}$ $\{0,281,267,195\}$ $\{0,297,85,108\}$ $\{0,199,95,273\}$ $\{0,113,177,52\}$

8. $n = 55$

$\{0,138,311,253\}$ $\{0,211,291,304\}$ $\{0,318,102,223\}$ $\{0,74,232,288\}$ $\{0,41,94,205\}$
$\{0,4,312,131\}$ $\{0,204,27,287\}$ $\{0,155,104,264\}$ $\{0,141,195,72\}$ $\{0,206,238,239\}$
$\{0,105,29,284\}$ $\{0,174,183,273\}$ $\{0,21,327,245\}$ $\{0,31,171,37\}$ $\{0,152,16,52\}$
$\{0,202,185,210\}$ $\{0,118,197,257\}$ $\{0,266,222,14\}$ $\{0,86,328,63\}$ $\{0,241,302,154\}$
$\{0,15,295,300\}$ $\{0,187,246,198\}$ $\{0,201,167,263\}$ $\{0,227,146,217\}$ $\{0,180,142,310\}$
$\{0,218,49,117\}$ $\{0,233,186,193\}$

9. $n = 59$

$\{0,35,56,143\}$ $\{0,208,289,261\}$ $\{0,48,235,307\}$ $\{0,186,144,238\}$ $\{0,247,63,335\}$
$\{0,350,14,149\}$ $\{0,23,244,274\}$ $\{0,57,240,172\}$ $\{0,351,55,255\}$ $\{0,314,11,241\}$
$\{0,346,134,112\}$ $\{0,313,270,349\}$ $\{0,123,136,316\}$ $\{0,344,140,207\}$ $\{0,190,197,280\}$
$\{0,32,288,228\}$ $\{0,227,226,75\}$ $\{0,85,54,276\}$ $\{0,160,162,91\}$ $\{0,6,106,131\}$
$\{0,225,198,237\}$ $\{0,345,321,176\}$ $\{0,233,44,141\}$ $\{0,148,224,122\}$ $\{0,155,105,293\}$
$\{0,290,37,305\}$ $\{0,284,195,175\}$ $\{0,309,17,325\}$ $\{0,77,250,111\}$

10. $n = 63$

$\{0,170,221,273\}$ $\{0,48,266,259\}$ $\{0,163,161,81\}$ $\{0,109,3,369\}$ $\{0,27,122,274\}$
$\{0,16,60,89\}$ $\{0,108,324,187\}$ $\{0,5,154,177\}$ $\{0,239,92,59\}$ $\{0,173,165,243\}$
$\{0,37,87,72\}$ $\{0,285,219,236\}$ $\{0,287,85,325\}$ $\{0,320,220,69\}$ $\{0,364,280,18\}$
$\{0,121,111,255\}$ $\{0,265,182,222\}$ $\{0,110,209,333\}$ $\{0,30,31,225\}$ $\{0,321,129,185\}$
$\{0,339,76,101\}$ $\{0,290,62,86\}$ $\{0,141,11,261\}$ $\{0,28,102,281\}$ $\{0,313,246,317\}$
$\{0,232,68,22\}$ $\{0,190,245,203\}$ $\{0,90,271,235\}$ $\{0,171,77,96\}$ $\{0,331,337,357\}$
$\{0,344,166,230\}$

11. $n = 67$

$\{0, 318, 104, 284\}$	$\{0, 75, 70, 240\}$	$\{0, 238, 182, 234\}$	$\{0, 119, 31, 364\}$	$\{0, 141, 120, 255\}$
$\{0, 273, 274, 293\}$	$\{0, 83, 59, 207\}$	$\{0, 210, 26, 251\}$	$\{0, 326, 136, 342\}$	$\{0, 366, 8, 22\}$
$\{0, 249, 347, 365\}$	$\{0, 166, 272, 215\}$	$\{0, 97, 126, 271\}$	$\{0, 63, 53, 117\}$	$\{0, 310, 312, 209\}$
$\{0, 73, 158, 375\}$	$\{0, 197, 152, 42\}$	$\{0, 336, 123, 325\}$	$\{0, 256, 78, 369\}$	$\{0, 46, 227, 321\}$
$\{0, 86, 39, 280\}$	$\{0, 156, 61, 13\}$	$\{0, 295, 263, 223\}$	$\{0, 323, 351, 258\}$	$\{0, 252, 320, 277\}$
$\{0, 183, 233, 387\}$	$\{0, 30, 23, 163\}$	$\{0, 281, 287, 149\}$	$\{0, 89, 265, 300\}$	$\{0, 3, 306, 297\}$
$\{0, 112, 328, 311\}$	$\{0, 331, 172, 160\}$	$\{0, 340, 80, 167\}$		

12. $n = 69$

$\{0, 37, 179, 266\}$	$\{0, 24, 315, 349\}$	$\{0, 144, 251, 97\}$	$\{0, 177, 368, 383\}$	$\{0, 21, 130, 343\}$
$\{0, 344, 195, 134\}$	$\{0, 122, 333, 384\}$	$\{0, 396, 196, 75\}$	$\{0, 278, 7, 110\}$	$\{0, 48, 350, 242\}$
$\{0, 259, 101, 72\}$	$\{0, 329, 326, 243\}$	$\{0, 151, 381, 264\}$	$\{0, 252, 13, 141\}$	$\{0, 300, 10, 374\}$
$\{0, 332, 38, 106\}$	$\{0, 323, 176, 118\}$	$\{0, 212, 240, 42\}$	$\{0, 250, 84, 57\}$	$\{0, 408, 39, 409\}$
$\{0, 362, 217, 403\}$	$\{0, 412, 253, 312\}$	$\{0, 392, 225, 288\}$	$\{0, 236, 361, 365\}$	$\{0, 146, 132, 56\}$
$\{0, 115, 402, 394\}$	$\{0, 139, 77, 234\}$	$\{0, 96, 105, 379\}$	$\{0, 382, 192, 23\}$	$\{0, 316, 389, 156\}$
$\{0, 388, 54, 173\}$	$\{0, 320, 183, 336\}$	$\{0, 60, 17, 395\}$	$\{0, 67, 133, 249\}$	

13. $n = 71$

$\{0, 12, 345, 329\}$	$\{0, 292, 395, 398\}$	$\{0, 369, 127, 374\}$	$\{0, 270, 335, 171\}$	$\{0, 27, 254, 310\}$
$\{0, 77, 95, 60\}$	$\{0, 8, 266, 386\}$	$\{0, 4, 200, 87\}$	$\{0, 352, 162, 359\}$	$\{0, 277, 271, 238\}$
$\{0, 90, 140, 36\}$	$\{0, 166, 146, 108\}$	$\{0, 189, 41, 405\}$	$\{0, 195, 416, 101\}$	$\{0, 291, 396, 246\}$
$\{0, 289, 404, 66\}$	$\{0, 84, 324, 170\}$	$\{0, 191, 34, 316\}$	$\{0, 249, 76, 194\}$	$\{0, 287, 224, 187\}$
$\{0, 165, 294, 136\}$	$\{0, 207, 425, 411\}$	$\{0, 198, 145, 259\}$	$\{0, 79, 375, 407\}$	$\{0, 46, 124, 403\}$
$\{0, 209, 362, 117\}$	$\{0, 96, 24, 11\}$	$\{0, 169, 89, 212\}$	$\{0, 47, 225, 298\}$	$\{0, 275, 300, 193\}$
$\{0, 183, 305, 42\}$	$\{0, 133, 307, 131\}$	$\{0, 356, 68, 112\}$	$\{0, 206, 367, 215\}$	$\{0, 400, 49, 241\}$

14. $n = 73$

$\{0, 22, 306, 406\}$	$\{0, 17, 352, 141\}$	$\{0, 104, 102, 42\}$	$\{0, 153, 193, 415\}$	$\{0, 46, 166, 293\}$
$\{0, 339, 346, 232\}$	$\{0, 181, 30, 225\}$	$\{0, 177, 93, 187\}$	$\{0, 275, 65, 203\}$	$\{0, 45, 37, 239\}$
$\{0, 343, 33, 38\}$	$\{0, 81, 215, 90\}$	$\{0, 229, 320, 41\}$	$\{0, 205, 88, 21\}$	$\{0, 341, 4, 110\}$
$\{0, 269, 330, 356\}$	$\{0, 221, 252, 224\}$	$\{0, 119, 175, 280\}$	$\{0, 302, 266, 329\}$	$\{0, 426, 362, 283\}$
$\{0, 53, 14, 395\}$	$\{0, 173, 189, 24\}$	$\{0, 178, 390, 370\}$	$\{0, 419, 50, 240\}$	$\{0, 29, 282, 307\}$
$\{0, 71, 383, 241\}$	$\{0, 290, 174, 123\}$	$\{0, 182, 164, 112\}$	$\{0, 201, 299, 286\}$	$\{0, 171, 230, 308\}$
$\{0, 80, 115, 298\}$	$\{0, 234, 157, 168\}$	$\{0, 423, 135, 129\}$	$\{0, 437, 121, 74\}$	$\{0, 113, 162, 196\}$
$\{0, 89, 327, 147\}$				

15. $n = 79$

$\{0, 405, 98, 317\}$	$\{0, 212, 172, 136\}$	$\{0, 280, 328, 461\}$	$\{0, 107, 112, 78\}$	$\{0, 91, 191, 312\}$
$\{0, 12, 354, 311\}$	$\{0, 32, 303, 138\}$	$\{0, 348, 232, 392\}$	$\{0, 291, 197, 467\}$	$\{0, 228, 249, 141\}$
$\{0, 408, 58, 142\}$	$\{0, 247, 104, 185\}$	$\{0, 322, 63, 321\}$	$\{0, 209, 365, 292\}$	$\{0, 361, 389, 343\}$
$\{0, 359, 54, 429\}$	$\{0, 128, 56, 205\}$	$\{0, 313, 239, 179\}$	$\{0, 207, 37, 447\}$	$\{0, 444, 92, 355\}$
$\{0, 53, 200, 95\}$	$\{0, 213, 229, 127\}$	$\{0, 281, 130, 454\}$	$\{0, 459, 300, 110\}$	$\{0, 254, 377, 4\}$
$\{0, 257, 177, 463\}$	$\{0, 357, 360, 31\}$	$\{0, 464, 129, 417\}$	$\{0, 22, 260, 356\}$	$\{0, 223, 425, 184\}$
$\{0, 457, 51, 422\}$	$\{0, 154, 450, 436\}$	$\{0, 93, 26, 248\}$	$\{0, 75, 243, 276\}$	$\{0, 337, 278, 339\}$
$\{0, 244, 433, 424\}$	$\{0, 419, 111, 275\}$	$\{0, 287, 8, 264\}$	$\{0, 449, 455, 384\}$	

16. $n = 83$

$\{0, 126, 469, 395\}$	$\{0, 189, 417, 346\}$	$\{0, 204, 387, 206\}$	$\{0, 396, 446, 141\}$	$\{0, 32, 96, 310\}$
$\{0, 118, 56, 149\}$	$\{0, 283, 98, 293\}$	$\{0, 69, 88, 27\}$	$\{0, 254, 137, 160\}$	$\{0, 476, 460, 224\}$
$\{0, 84, 468, 392\}$	$\{0, 411, 358, 261\}$	$\{0, 164, 211, 199\}$	$\{0, 77, 416, 145\}$	$\{0, 322, 423, 316\}$
$\{0, 265, 39, 472\}$	$\{0, 379, 120, 438\}$	$\{0, 279, 337, 286\}$	$\{0, 462, 162, 297\}$	$\{0, 73, 441, 455\}$
$\{0, 221, 46, 413\}$	$\{0, 20, 268, 173\}$	$\{0, 242, 63, 260\}$	$\{0, 371, 11, 91\}$	$\{0, 132, 28, 326\}$
$\{0, 350, 222, 355\}$	$\{0, 54, 356, 267\}$	$\{0, 129, 208, 354\}$	$\{0, 406, 296, 86\}$	$\{0, 253, 420, 90\}$
$\{0, 122, 147, 113\}$	$\{0, 99, 55, 100\}$	$\{0, 275, 431, 41\}$	$\{0, 109, 105, 72\}$	$\{0, 449, 125, 328\}$
$\{0, 15, 344, 327\}$	$\{0, 485, 362, 477\}$	$\{0, 266, 3, 314\}$	$\{0, 307, 66, 347\}$	$\{0, 364, 340, 124\}$
$\{0, 321, 209, 70\}$				

17. $n = 93$

$\{0, 343, 505, 270\}$ $\{0, 480, 334, 375\}$ $\{0, 282, 354, 551\}$ $\{0, 381, 223, 298\}$ $\{0, 9, 208, 389\}$
$\{0, 96, 236, 353\}$ $\{0, 387, 124, 296\}$ $\{0, 449, 557, 144\}$ $\{0, 62, 430, 176\}$ $\{0, 184, 5, 35\}$
$\{0, 157, 493, 508\}$ $\{0, 32, 58, 251\}$ $\{0, 220, 333, 376\}$ $\{0, 406, 161, 554\}$ $\{0, 407, 133, 383\}$
$\{0, 373, 275, 248\}$ $\{0, 277, 6, 63\}$ $\{0, 13, 21, 123\}$ $\{0, 530, 266, 111\}$ $\{0, 318, 258, 154\}$
$\{0, 107, 71, 427\}$ $\{0, 489, 477, 536\}$ $\{0, 209, 79, 436\}$ $\{0, 355, 421, 476\}$ $\{0, 348, 315, 385\}$
$\{0, 212, 544, 297\}$ $\{0, 482, 431, 166\}$ $\{0, 408, 46, 135\}$ $\{0, 272, 211, 256\}$ $\{0, 358, 52, 490\}$
$\{0, 360, 192, 519\}$ $\{0, 352, 134, 40\}$ $\{0, 461, 538, 509\}$ $\{0, 314, 101, 119\}$ $\{0, 328, 87, 326\}$
$\{0, 54, 153, 548\}$ $\{0, 398, 74, 118\}$ $\{0, 446, 299, 330\}$ $\{0, 369, 472, 388\}$ $\{0, 42, 233, 17\}$
$\{0, 341, 167, 303\}$ $\{0, 432, 291, 429\}$ $\{0, 458, 80, 370\}$ $\{0, 143, 452, 337\}$ $\{0, 502, 11, 34\}$
$\{0, 95, 187, 416\}$

18. $n = 109$

$\{0, 362, 237, 649\}$ $\{0, 517, 538, 570\}$ $\{0, 269, 104, 154\}$ $\{0, 7, 347, 163\}$ $\{0, 28, 325, 360\}$
$\{0, 562, 364, 118\}$ $\{0, 333, 432, 426\}$ $\{0, 72, 234, 75\}$ $\{0, 381, 8, 310\}$ $\{0, 235, 168, 559\}$
$\{0, 599, 248, 90\}$ $\{0, 356, 85, 634\}$ $\{0, 616, 23, 10\}$ $\{0, 308, 132, 323\}$ $\{0, 244, 643, 49\}$
$\{0, 19, 462, 396\}$ $\{0, 1, 614, 253\}$ $\{0, 515, 140, 407\}$ $\{0, 33, 342, 471\}$ $\{0, 172, 403, 203\}$
$\{0, 571, 24, 256\}$ $\{0, 591, 544, 186\}$ $\{0, 466, 225, 511\}$ $\{0, 42, 584, 316\}$ $\{0, 135, 14, 101\}$
$\{0, 177, 343, 17\}$ $\{0, 602, 74, 576\}$ $\{0, 467, 30, 39\}$ $\{0, 265, 57, 392\}$ $\{0, 493, 595, 77\}$
$\{0, 603, 170, 213\}$ $\{0, 627, 180, 355\}$ $\{0, 618, 472, 501\}$ $\{0, 318, 460, 448\}$ $\{0, 282, 548, 148\}$
$\{0, 270, 469, 181\}$ $\{0, 395, 349, 276\}$ $\{0, 353, 596, 592\}$ $\{0, 499, 563, 215\}$ $\{0, 88, 575, 442\}$
$\{0, 223, 100, 82\}$ $\{0, 240, 418, 337\}$ $\{0, 421, 257, 220\}$ $\{0, 2, 229, 204\}$ $\{0, 131, 589, 465\}$
$\{0, 261, 430, 150\}$ $\{0, 409, 560, 341\}$ $\{0, 190, 304, 475\}$ $\{0, 193, 289, 80\}$ $\{0, 404, 507, 144\}$
$\{0, 283, 86, 214\}$ $\{0, 632, 534, 578\}$ $\{0, 230, 56, 505\}$ $\{0, 295, 122, 138\}$

附录C

1. $n = 24$

$\{(0,0), (5,4), (7,4), (18,5)\}$ $\{(0,0), (4,4), (6,3), (5,2)\}$ $\{(0,0), (14,2), (21,3), (12,1)\}$
$\{(0,0), (8,3), (6,5), (16,3)\}$ $\{(0,0), (8,5), (5,0), (17,0)\}$ $\{(0,0), (7,2), (1,0), (3,2)\}$
$\{(0,0), (13,0), (20,0), (17,5)\}$ $\{(\infty,0), (8,5), (12,2), (2,1)\}$ $\{(\infty,0), (15,0), (16,3), (7,4)\}$
$\{(0,0), (16,1), (13,3), (5,5)\}$ $\{(0,0), (12,2), (11,3), (15,5)\}$ $\{(0,0), (1,2), (5,3), (14,0)\}$

2. $n = 26$

$\{(0,0), (7,1), (14,3), (2,0)\}$ $\{(\infty,0), (17,5), (3,4), (12,3)\}$ $\{(0,0), (1,1), (17,4), (11,2)\}$
$\{(0,0), (1,0), (6,5), (7,3)\}$ $\{(0,0), (21,3), (8,5), (16,5)\}$ $\{(0,0), (23,1), (6,4), (4,1)\}$
$\{(0,0), (22,5), (1,5), (2,2)\}$ $\{(\infty,0), (5,1), (8,0), (18,2)\}$ $\{(0,0), (13,0), (9,2), (20,0)\}$
$\{(0,0), (15,2), (4,2), (7,4)\}$ $\{(0,0), (2,1), (9,0), (12,4)\}$ $\{(0,0), (22,3), (6,1), (21,1)\}$
$\{(0,0), (2,4), (10,5), (13,5)\}$

3. $n = 28$

$\{(0,0), (19,3), (16,2), (22,3)\}$ $\{(0,0), (14,2), (13,3), (17,4)\}$ $\{(0,0), (19,4), (3,3), (20,0)\}$
$\{(0,0), (14,4), (25,5), (23,0)\}$ $\{(0,0), (14,1), (18,0), (24,2)\}$ $\{(\infty,0), (21,0), (17,4), (23,3)\}$
$\{(0,0), (9,4), (7,2), (2,0)\}$ $\{(0,0), (11,0), (15,4), (16,4)\}$ $\{(0,0), (17,1), (11,3), (5,0)\}$
$\{(0,0), (12,4), (9,5), (10,0)\}$ $\{(\infty,0), (20,2), (11,5), (1,1)\}$ $\{(0,0), (23,3), (22,5), (8,0)\}$
$\{(0,0), (21,0), (12,5), (20,3)\}$ $\{(0,0), (5,5), (12,0), (19,5)\}$

4. $n = 30$

$\{(0,0), (21,2), (18,3), (10,2)\}$ $\{(0,0), (22,3), (6,0), (12,4)\}$ $\{(0,0), (20,1), (17,3), (27,3)\}$
$\{(0,0), (8,5), (10,1), (20,4)\}$ $\{(0,0), (14,1), (10,4), (1,1)\}$ $\{(0,0), (7,0), (25,5), (3,0)\}$
$\{(0,0), (6,2), (5,0), (4,2)\}$ $\{(\infty,0), (15,4), (24,5), (23,0)\}$ $\{(0,0), (4,5), (24,1), (18,4)\}$
$\{(0,0), (17,0), (22,2), (13,2)\}$ $\{(0,0), (13,1), (18,2), (12,1)\}$ $\{(0,0), (2,1), (5,3), (26,3)\}$
$\{(\infty,0), (8,3), (23,1), (21,2)\}$ $\{(0,0), (17,4), (28,3), (14,3)\}$ $\{(0,0), (2,4), (8,3), (15,2)\}$

5. $n = 32$

$\{(\infty,0), (2,4), (24,2), (20,5)\}$ $\{(0,0), (17,0), (3,5), (11,1)\}$ $\{(0,0), (4,2), (24,3), (14,5)\}$
$\{(0,0), (11,2), (12,4), (13,1)\}$ $\{(0,0), (24,1), (20,2), (29,5)\}$ $\{(0,0), (3,2), (19,4), (28,2)\}$
$\{(0,0), (5,0), (24,0), (13,3)\}$ $\{(0,0), (28,3), (5,2), (15,1)\}$ $\{(0,0), (29,2), (22,0), (14,2)\}$
$\{(0,0), (15,3), (16,1), (26,3)\}$ $\{(0,0), (28,5), (23,0), (1,5)\}$ $\{(\infty,0), (13,3), (30,0), (11,1)\}$
$\{(0,0), (25,5), (24,5), (22,5)\}$ $\{(0,0), (6,4), (2,3), (21,0)\}$ $\{(0,0), (19,1), (18,0), (24,2)\}$
$\{(0,0), (4,4), (10,1), (18,2)\}$

6. $n = 34$

$\{(0,0),(17,2),(3,0),(27,4)\}$ $\{(0,0),(15,0),(29,5),(30,4)\}$ $\{(0,0),(1,2),(12,5),(14,1)\}$
$\{(\infty,0),(32,1),(22,0),(29,3)\}$ $\{(0,0),(18,1),(17,3),(26,4)\}$ $\{(0,0),(16,5),(21,2),(8,4)\}$
$\{(0,0),(31,2),(5,0),(12,0)\}$ $\{(\infty,0),(9,2),(22,5),(0,4)\}$ $\{(0,0),(25,4),(29,0),(28,5)\}$
$\{(0,0),(21,5),(11,0),(28,4)\}$ $\{(0,0),(6,4),(15,3),(17,0)\}$ $\{(0,0),(19,3),(23,0),(25,0)\}$
$\{(0,0),(21,3),(1,3),(6,1)\}$ $\{(0,0),(28,1),(22,2),(32,0)\}$ $\{(0,0),(24,3),(20,5),(27,0)\}$
$\{(0,0),(30,1),(18,5),(20,4)\}$ $\{(0,0),(2,1),(11,1),(19,0)\}$

7. $n = 36$

$\{(0,0),(19,3),(31,0),(23,0)\}$ $\{(\infty,0),(14,2),(10,0),(28,4)\}$ $\{(0,0),(30,1),(19,5),(22,4)\}$
$\{(0,0),(29,1),(9,1),(3,4)\}$ $\{(0,0),(8,2),(22,0),(28,4)\}$ $\{(0,0),(19,0),(32,5),(9,0)\}$
$\{(0,0),(28,1),(18,5),(12,5)\}$ $\{(0,0),(17,5),(15,5),(18,2)\}$ $\{(0,0),(14,3),(15,3),(25,1)\}$
$\{(0,0),(12,2),(17,3),(26,2)\}$ $\{(\infty,0),(21,5),(16,1),(19,3)\}$ $\{(0,0),(25,5),(17,0),(1,2)\}$
$\{(0,0),(21,5),(24,5),(28,3)\}$ $\{(0,0),(13,4),(20,5),(33,2)\}$ $\{(0,0),(6,1),(1,1),(5,2)\}$
$\{(0,0),(23,2),(24,0),(2,1)\}$ $\{(0,0),(4,5),(30,3),(28,0)\}$ $\{(0,0),(2,5),(8,1),(27,2)\}$

8. $n = 38$

$\{(0,0),(1,2),(12,2),(35,2)\}$ $\{(0,0),(15,4),(1,5),(31,0)\}$ $\{(0,0),(15,2),(21,5),(17,5)\}$
$\{(0,0),(36,2),(4,1),(27,4)\}$ $\{(0,0),(4,5),(23,2),(18,1)\}$ $\{(0,0),(28,0),(13,3),(25,1)\}$
$\{(0,0),(21,2),(8,0),(30,5)\}$ $\{(0,0),(20,4),(26,5),(11,5)\}$ $\{(0,0),(2,0),(7,0),(4,2)\}$
$\{(0,0),(15,5),(25,3),(18,0)\}$ $\{(0,0),(24,5),(5,3),(25,5)\}$ $\{(0,0),(18,5),(16,0),(26,3)\}$
$\{(0,0),(13,5),(17,3),(9,2)\}$ $\{(\infty,0),(30,1),(35,5),(33,4)\}$ $\{(0,0),(7,4),(16,5),(10,0)\}$
$\{(0,0),(13,0),(24,2),(32,4)\}$ $\{(\infty,0),(29,3),(21,0),(28,2)\}$ $\{(0,0),(21,3),(1,3),(11,4)\}$
$\{(0,0),(6,2),(12,0),(29,1)\}$

9. $n = 40$

$\{(0,0),(15,4),(38,4),(16,3)\}$ $\{(0,0),(34,2),(25,4),(36,4)\}$ $\{(0,0),(37,5),(29,3),(1,0)\}$
$\{(0,0),(32,1),(12,1),(34,1)\}$ $\{(0,0),(8,1),(31,2),(25,5)\}$ $\{(0,0),(26,1),(5,1),(36,1)\}$
$\{(0,0),(6,1),(19,4),(25,0)\}$ $\{(0,0),(35,2),(12,3),(3,0)\}$ $\{(0,0),(11,4),(19,1),(23,4)\}$
$\{(\infty,0),(3,3),(24,5),(31,2)\}$ $\{(\infty,0),(6,0),(37,1),(35,4)\}$ $\{(0,0),(34,0),(30,4),(33,2)\}$
$\{(0,0),(25,3),(14,4),(35,1)\}$ $\{(0,0),(27,1),(18,1),(5,3)\}$ $\{(0,0),(24,1),(17,1),(26,0)\}$
$\{(0,0),(26,5),(11,2),(16,4)\}$ $\{(0,0),(35,5),(2,4),(26,4)\}$ $\{(0,0),(32,5),(38,5),(20,3)\}$
$\{(0,0),(29,1),(17,3),(32,4)\}$ $\{(0,0),(1,3),(15,2),(19,2)\}$

10. $n = 42$

$\{(0,0),(11,3),(21,2),(35,0)\}$ $\{(0,0),(29,3),(11,1),(16,2)\}$ $\{(0,0),(23,2),(24,4),(20,0)\}$
$\{(0,0),(8,3),(13,2),(11,4)\}$ $\{(0,0),(16,0),(31,5),(33,0)\}$ $\{(0,0),(37,4),(14,3),(21,3)\}$
$\{(0,0),(30,1),(12,1),(4,5)\}$ $\{(0,0),(3,0),(32,2),(34,4)\}$ $\{(\infty,0),(17,0),(35,3),(31,2)\}$
$\{(0,0),(7,5),(16,4),(2,5)\}$ $\{(0,0),(13,4),(17,4),(19,1)\}$ $\{(0,0),(31,0),(9,3),(40,0)\}$
$\{(0,0),(40,2),(11,2),(24,5)\}$ $\{(0,0),(8,4),(30,0),(16,5)\}$ $\{(0,0),(17,5),(3,5),(38,3)\}$
$\{(\infty,0),(3,1),(29,4),(10,5)\}$ $\{(0,0),(36,3),(21,1),(26,5)\}$ $\{(0,0),(9,2),(1,3),(13,5)\}$
$\{(0,0),(28,0),(34,5),(2,0)\}$ $\{(0,0),(21,5),(18,1),(40,5)\}$ $\{(0,0),(1,5),(6,1),(35,2)\}$

11. $n = 44$

$\{(0,0),(16,5),(23,2),(27,4)\}$ $\{(0,0),(11,2),(34,0),(28,0)\}$ $\{(0,0),(38,2),(4,4),(35,5)\}$
$\{(0,0),(42,5),(8,4),(9,3)\}$ $\{(0,0),(28,4),(41,5),(40,2)\}$ $\{(0,0),(22,3),(37,4),(27,5)\}$
$\{(0,0),(7,0),(26,3),(2,5)\}$ $\{(\infty,0),(32,5),(42,1),(17,0)\}$ $\{(0,0),(8,5),(2,2),(37,2)\}$
$\{(0,0),(25,5),(32,3),(21,2)\}$ $\{(\infty,0),(30,3),(6,4),(7,2)\}$ $\{(0,0),(23,5),(19,0),(40,1)\}$
$\{(0,0),(30,1),(10,1),(26,1)\}$ $\{(0,0),(42,0),(6,5),(12,0)\}$ $\{(0,0),(30,4),(11,0),(14,1)\}$
$\{(0,0),(22,2),(13,4),(40,0)\}$ $\{(0,0),(38,1),(41,3),(9,1)\}$ $\{(0,0),(21,0),(26,0),(14,4)\}$
$\{(0,0),(25,0),(12,3),(10,3)\}$ $\{(0,0),(1,2),(15,4),(39,5)\}$ $\{(0,0),(29,1),(41,2),(21,5)\}$
$\{(0,0),(7,1),(17,1),(25,4)\}$

12. $n = 46$

$\{(0,0),(7,2),(38,0),(13,4)\}$ $\{(0,0),(27,0),(8,1),(24,3)\}$ $\{(0,0),(38,3),(8,3),(12,5)\}$
$\{(0,0),(9,1),(32,5),(2,3)\}$ $\{(0,0),(23,1),(2,1),(24,4)\}$ $\{(0,0),(6,0),(19,0),(1,4)\}$
$\{(0,0),(37,0),(40,1),(9,2)\}$ $\{(0,0),(23,2),(27,2),(14,5)\}$ $\{(\infty,0),(34,5),(4,1),(7,0)\}$
$\{(\infty,0),(30,2),(9,3),(28,4)\}$ $\{(0,0),(35,1),(41,5),(42,0)\}$ $\{(0,0),(15,5),(36,0),(5,4)\}$
$\{(0,0),(5,1),(33,2),(13,5)\}$ $\{(0,0),(9,5),(8,5),(44,1)\}$ $\{(0,0),(41,1),(6,1),(12,0)\}$
$\{(0,0),(12,1),(11,5),(28,5)\}$ $\{(0,0),(33,3),(22,0),(28,3)\}$ $\{(0,0),(30,3),(10,3),(27,1)\}$
$\{(0,0),(11,0),(27,3),(43,4)\}$ $\{(0,0),(3,4),(23,5),(43,1)\}$ $\{(0,0),(34,4),(8,2),(19,3)\}$
$\{(0,0),(2,0),(12,2),(16,0)\}$ $\{(0,0),(4,3),(11,4),(25,1)\}$

13. $n=48$

$\{(0,0),(16,4),(5,2),(30,4)\}$	$\{(0,0),(6,1),(7,4),(29,5)\}$	$\{(0,0),(18,4),(12,4),(34,0)\}$
$\{(0,0),(46,2),(23,3),(39,2)\}$	$\{(0,0),(3,0),(17,5),(20,1)\}$	$\{(\infty,0),(31,5),(8,4),(40,0)\}$
$\{(0,0),(37,2),(38,2),(43,0)\}$	$\{(0,0),(18,0),(46,4),(3,1)\}$	$\{(0,0),(31,0),(42,0),(29,3)\}$
$\{(0,0),(20,4),(12,1),(39,1)\}$	$\{(0,0),(36,2),(45,2),(17,3)\}$	$\{(0,0),(3,5),(22,5),(24,0)\}$
$\{(0,0),(11,1),(20,3),(32,3)\}$	$\{(0,0),(43,5),(26,1),(16,1)\}$	$\{(0,0),(32,4),(8,0),(41,3)\}$
$\{(0,0),(18,5),(21,3),(39,5)\}$	$\{(0,0),(39,4),(2,0),(34,5)\}$	$\{(0,0),(45,1),(5,3),(12,2)\}$
$\{(0,0),(22,3),(26,2),(36,1)\}$	$\{(0,0),(12,3),(46,5),(44,3)\}$	$\{(0,0),(40,3),(30,0),(34,4)\}$
$\{(\infty,0),(1,1),(28,2),(15,3)\}$	$\{(0,0),(10,1),(19,4),(35,1)\}$	$\{(0,0),(1,5),(7,1),(43,4)\}$

14. $n=50$

$\{(0,0),(12,1),(47,0),(18,1)\}$	$\{(0,0),(38,2),(40,1),(1,1)\}$	$\{(0,0),(25,4),(41,1),(3,0)\}$
$\{(\infty,0),(24,4),(6,1),(14,2)\}$	$\{(0,0),(22,2),(15,0),(34,2)\}$	$\{(0,0),(10,3),(16,2),(43,5)\}$
$\{(0,0),(25,3),(32,3),(2,2)\}$	$\{(0,0),(31,1),(36,1),(44,3)\}$	$\{(0,0),(45,5),(30,0),(43,4)\}$
$\{(0,0),(38,4),(24,0),(10,4)\}$	$\{(0,0),(32,1),(47,3),(40,4)\}$	$\{(0,0),(16,5),(44,2),(45,1)\}$
$\{(0,0),(44,1),(32,4),(35,1)\}$	$\{(0,0),(28,1),(45,2),(48,3)\}$	$\{(0,0),(19,3),(6,3),(46,2)\}$
$\{(0,0),(13,1),(17,4),(48,4)\}$	$\{(0,0),(9,4),(35,0),(28,2)\}$	$\{(0,0),(46,4),(48,2),(25,2)\}$
$\{(0,0),(26,1),(23,2),(31,2)\}$	$\{(0,0),(18,2),(34,3),(6,4)\}$	$\{(0,0),(39,1),(10,1),(32,0)\}$
$\{(0,0),(34,5),(30,5),(41,2)\}$	$\{(0,0),(44,4),(24,5),(48,0)\}$	$\{(\infty,0),(0,0),(26,3),(38,5)\}$
$\{(0,0),(9,3),(20,3),(36,3)\}$		

15. $n=52$

$\{(0,0),(5,2),(2,4),(20,1)\}$	$\{(0,0),(8,4),(21,1),(42,5)\}$	$\{(0,0),(18,4),(12,5),(31,2)\}$
$\{(0,0),(37,2),(36,4),(7,4)\}$	$\{(0,0),(19,5),(21,5),(15,4)\}$	$\{(0,0),(20,3),(36,5),(10,1)\}$
$\{(0,0),(13,0),(23,5),(32,2)\}$	$\{(0,0),(40,5),(28,3),(44,4)\}$	$\{(0,0),(45,4),(20,0),(11,0)\}$
$\{(0,0),(25,5),(46,5),(49,5)\}$	$\{(0,0),(35,0),(28,0),(1,1)\}$	$\{(0,0),(31,1),(13,1),(2,5)\}$
$\{(0,0),(50,3),(47,2),(6,0)\}$	$\{(0,0),(33,1),(11,5),(8,0)\}$	$\{(\infty,0),(11,4),(33,3),(45,0)\}$
$\{(0,0),(43,4),(38,1),(37,1)\}$	$\{(\infty,0),(7,2),(42,5),(15,1)\}$	$\{(0,0),(28,2),(23,2),(34,0)\}$
$\{(0,0),(40,3),(32,0),(12,4)\}$	$\{(0,0),(5,4),(35,1),(37,3)\}$	$\{(0,0),(47,0),(33,5),(9,2)\}$
$\{(0,0),(24,5),(15,0),(8,1)\}$	$\{(0,0),(24,4),(25,0),(29,3)\}$	$\{(0,0),(4,2),(18,2),(1,5)\}$
$\{(0,0),(10,0),(25,3),(39,5)\}$	$\{(0,0),(2,3),(9,4),(12,0)\}$	

16. $n=54$

$\{(0,0),(49,3),(20,5),(11,3)\}$	$\{(0,0),(40,5),(47,3),(13,0)\}$	$\{(0,0),(2,3),(6,1),(1,4)\}$
$\{(0,0),(37,2),(21,2),(17,2)\}$	$\{(0,0),(12,0),(14,2),(31,1)\}$	$\{(0,0),(32,1),(33,2),(19,2)\}$
$\{(0,0),(33,4),(9,1),(51,1)\}$	$\{(0,0),(52,0),(18,0),(6,2)\}$	$\{(0,0),(24,0),(46,0),(41,4)\}$
$\{(\infty,0),(31,3),(22,4),(6,5)\}$	$\{(0,0),(3,1),(41,5),(43,3)\}$	$\{(0,0),(38,1),(52,4),(26,4)\}$
$\{(0,0),(21,4),(42,5),(52,3)\}$	$\{(0,0),(35,1),(24,5),(18,1)\}$	$\{(0,0),(46,3),(35,4),(8,1)\}$
$\{(0,0),(37,4),(29,2),(5,1)\}$	$\{(0,0),(42,2),(4,5),(17,1)\}$	$\{(0,0),(18,4),(43,1),(28,0)\}$
$\{(0,0),(16,3),(50,4),(47,1)\}$	$\{(\infty,0),(28,1),(5,2),(1,0)\}$	$\{(0,0),(9,3),(28,1),(23,2)\}$
$\{(0,0),(51,0),(31,3),(8,0)\}$	$\{(0,0),(4,1),(12,5),(7,1)\}$	$\{(0,0),(26,2),(23,4),(10,1)\}$
$\{(0,0),(36,3),(50,1),(45,1)\}$	$\{(0,0),(46,1),(44,0),(23,0)\}$	$\{(0,0),(6,0),(20,1),(28,4)\}$

17. $n=56$

$\{(0,0),(5,3),(6,2),(44,1)\}$	$\{(0,0),(14,0),(34,5),(21,2)\}$	$\{(0,0),(30,0),(12,4),(36,5)\}$
$\{(0,0),(34,1),(24,0),(22,2)\}$	$\{(0,0),(27,5),(7,4),(26,1)\}$	$\{(0,0),(23,0),(26,0),(33,3)\}$
$\{(0,0),(33,5),(16,0),(20,3)\}$	$\{(0,0),(33,0),(38,4),(18,4)\}$	$\{(0,0),(17,3),(3,1),(14,1)\}$
$\{(0,0),(10,2),(5,2),(23,3)\}$	$\{(0,0),(35,2),(11,3),(12,3)\}$	$\{(\infty,0),(31,4),(33,5),(47,3)\}$
$\{(0,0),(15,5),(6,4),(31,2)\}$	$\{(0,0),(34,2),(33,1),(30,4)\}$	$\{(0,0),(33,2),(24,2),(48,5)\}$
$\{(0,0),(10,4),(16,4),(42,2)\}$	$\{(0,0),(18,0),(16,1),(27,3)\}$	$\{(0,0),(38,0),(50,1),(29,4)\}$
$\{(0,0),(1,3),(4,1),(8,3)\}$	$\{(0,0),(9,5),(17,4),(7,5)\}$	$\{(0,0),(45,0),(30,5),(49,5)\}$
$\{(0,0),(53,3),(35,4),(41,1)\}$	$\{(0,0),(26,5),(15,4),(34,0)\}$	$\{(0,0),(46,2),(27,4),(54,4)\}$
$\{(\infty,0),(28,1),(53,0),(25,2)\}$	$\{(0,0),(42,1),(27,1),(50,5)\}$	$\{(0,0),(26,3),(18,3),(14,3)\}$
$\{(0,0),(2,2),(13,0),(32,5)\}$		

18. $n=58$

$\{(0,0),(44,0),(15,0),(25,2)\}$	$\{(0,0),(51,2),(29,4),(32,3)\}$	$\{(0,0),(47,1),(8,1),(30,0)\}$
$\{(0,0),(51,4),(1,5),(37,2)\}$	$\{(0,0),(31,0),(33,2),(20,5)\}$	$\{(0,0),(44,4),(3,4),(1,4)\}$
$\{(0,0),(55,1),(29,5),(28,5)\}$	$\{(0,0),(31,3),(36,5),(49,4)\}$	$\{(0,0),(14,5),(34,0),(52,5)\}$
$\{(\infty,0),(25,1),(6,0),(28,2)\}$	$\{(0,0),(4,4),(22,1),(31,1)\}$	$\{(0,0),(14,1),(2,1),(41,5)\}$
$\{(0,0),(24,1),(27,1),(48,3)\}$	$\{(0,0),(53,3),(24,0),(13,1)\}$	$\{(0,0),(14,3),(56,4),(47,0)\}$
$\{(\infty,0),(44,3),(16,5),(50,4)\}$	$\{(0,0),(9,1),(23,5),(3,2)\}$	$\{(0,0),(10,4),(16,4),(12,2)\}$
$\{(0,0),(13,4),(49,0),(34,4)\}$	$\{(0,0),(11,0),(42,5),(22,3)\}$	$\{(0,0),(24,5),(41,4),(34,2)\}$
$\{(0,0),(27,5),(20,0),(39,2)\}$	$\{(0,0),(32,5),(15,3),(40,3)\}$	$\{(0,0),(55,3),(51,3),(46,4)\}$
$\{(0,0),(8,3),(12,4),(7,0)\}$	$\{(0,0),(15,4),(5,3),(12,1)\}$	$\{(0,0),(23,3),(49,1),(11,4)\}$
$\{(0,0),(16,5),(32,2),(7,3)\}$	$\{(0,0),(1,1),(36,1),(53,1)\}$	

19. $n = 60$

$\{(0,0),(5,4),(22,4),(13,3)\}$	$\{(0,0),(25,2),(18,4),(50,3)\}$	$\{(0,0),(35,3),(22,3),(4,1)\}$
$\{(0,0),(21,4),(57,1),(47,3)\}$	$\{(0,0),(26,3),(41,1),(3,4)\}$	$\{(0,0),(41,0),(12,0),(46,2)\}$
$\{(0,0),(38,4),(42,4),(6,0)\}$	$\{(0,0),(2,0),(28,0),(57,3)\}$	$\{(0,0),(50,2),(58,4),(20,4)\}$
$\{(0,0),(34,3),(58,2),(7,5)\}$	$\{(\infty,0),(16,3),(19,5),(4,2)\}$	$\{(0,0),(19,2),(42,2),(10,2)\}$
$\{(0,0),(31,3),(17,5),(47,1)\}$	$\{(0,0),(27,3),(24,4),(38,5)\}$	$\{(0,0),(6,4),(58,3),(1,5)\}$
$\{(0,0),(21,5),(6,5),(34,0)\}$	$\{(0,0),(8,1),(53,5),(16,1)\}$	$\{(0,0),(51,2),(29,1),(53,3)\}$
$\{(0,0),(30,1),(12,4),(19,4)\}$	$\{(\infty,0),(14,0),(47,4),(33,1)\}$	$\{(0,0),(55,2),(48,0),(15,1)\}$
$\{(0,0),(31,4),(9,5),(20,3)\}$	$\{(0,0),(40,3),(56,0),(37,0)\}$	$\{(0,0),(18,1),(57,2),(45,0)\}$
$\{(0,0),(42,5),(46,1),(43,0)\}$	$\{(0,0),(23,1),(24,1),(13,2)\}$	$\{(0,0),(15,2),(54,0),(49,3)\}$
$\{(0,0),(7,3),(42,3),(16,5)\}$	$\{(0,0),(49,5),(53,4),(39,5)\}$	$\{(0,0),(5,1),(28,5),(44,1)\}$

20. $n = 62$

$\{(0,0),(33,2),(54,0),(41,5)\}$	$\{(0,0),(11,3),(18,2),(12,5)\}$	$\{(0,0),(39,4),(32,0),(27,4)\}$
$\{(0,0),(34,1),(32,1),(50,5)\}$	$\{(0,0),(31,2),(50,0),(41,4)\}$	$\{(0,0),(26,4),(38,1),(3,4)\}$
$\{(0,0),(43,0),(26,0),(46,3)\}$	$\{(0,0),(27,2),(57,2),(58,5)\}$	$\{(0,0),(47,0),(57,4),(24,4)\}$
$\{(0,0),(44,4),(54,3),(32,2)\}$	$\{(0,0),(52,0),(1,1),(37,0)\}$	$\{(0,0),(19,1),(26,2),(47,3)\}$
$\{(0,0),(31,5),(39,0),(47,5)\}$	$\{(0,0),(9,1),(47,4),(6,2)\}$	$\{(0,0),(60,2),(16,3),(45,4)\}$
$\{(0,0),(28,3),(47,2),(49,5)\}$	$\{(0,0),(24,3),(43,3),(35,1)\}$	$\{(0,0),(47,1),(36,2),(34,3)\}$
$\{(0,0),(37,1),(48,3),(4,0)\}$	$\{(\infty,0),(24,3),(46,0),(21,1)\}$	$\{(0,0),(44,1),(56,5),(20,5)\}$
$\{(0,0),(25,2),(56,3),(52,2)\}$	$\{(0,0),(16,1),(26,1),(20,0)\}$	$\{(0,0),(22,4),(7,2),(5,0)\}$
$\{(0,0),(48,1),(25,3),(30,2)\}$	$\{(0,0),(27,1),(19,3),(48,0)\}$	$\{(0,0),(15,1),(6,4),(5,4)\}$
$\{(0,0),(6,0),(22,5),(43,5)\}$	$\{(0,0),(3,0),(9,5),(1,5)\}$	$\{(\infty,0),(45,4),(47,2),(7,5)\}$
$\{(0,0),(4,3),(19,2),(32,4)\}$		

21. $n = 64$

$\{(0,0),(10,5),(62,4),(47,2)\}$	$\{(0,0),(7,0),(30,1),(34,2)\}$	$\{(0,0),(5,0),(3,5),(24,4)\}$
$\{(0,0),(50,3),(32,1),(38,0)\}$	$\{(0,0),(55,3),(30,4),(17,0)\}$	$\{(0,0),(1,0),(5,5),(27,5)\}$
$\{(0,0),(22,2),(3,0),(50,5)\}$	$\{(\infty,0),(20,4),(49,0),(59,1)\}$	$\{(0,0),(23,0),(57,0),(10,0)\}$
$\{(0,0),(18,3),(14,0),(3,4)\}$	$\{(0,0),(39,0),(41,5),(21,1)\}$	$\{(0,0),(50,4),(49,5),(19,0)\}$
$\{(0,0),(57,5),(22,3),(21,2)\}$	$\{(0,0),(47,1),(39,1),(49,3)\}$	$\{(0,0),(22,5),(16,2),(14,4)\}$
$\{(0,0),(55,2),(21,3),(12,5)\}$	$\{(0,0),(57,4),(11,0),(53,2)\}$	$\{(0,0),(7,4),(21,0),(38,5)\}$
$\{(0,0),(40,4),(12,4),(15,0)\}$	$\{(0,0),(54,4),(58,2),(27,0)\}$	$\{(0,0),(45,0),(9,1),(61,3)\}$
$\{(\infty,0),(32,2),(52,3),(37,5)\}$	$\{(0,0),(5,1),(35,1),(6,4)\}$	$\{(0,0),(60,3),(20,2),(12,0)\}$
$\{(0,0),(12,1),(29,5),(32,0)\}$	$\{(0,0),(31,3),(54,1),(13,5)\}$	$\{(0,0),(56,5),(39,4),(37,4)\}$
$\{(0,0),(19,5),(7,3),(56,4)\}$	$\{(0,0),(48,5),(9,0),(37,2)\}$	$\{(0,0),(56,1),(33,4),(52,1)\}$
$\{(0,0),(25,2),(20,0),(53,3)\}$	$\{(0,0),(1,4),(9,3),(46,3)\}$	

22. $n = 66$

$\{(0,0),(1,2),(47,0),(2,2)\}$	$\{(0,0),(56,0),(28,4),(36,2)\}$	$\{(0,0),(49,2),(18,3),(27,5)\}$
$\{(0,0),(11,0),(4,1),(21,4)\}$	$\{(0,0),(19,0),(41,5),(50,3)\}$	$\{(0,0),(41,4),(13,4),(25,5)\}$
$\{(0,0),(54,5),(1,3),(62,4)\}$	$\{(0,0),(18,1),(12,5),(36,5)\}$	$\{(\infty,0),(51,3),(47,0),(21,5)\}$
$\{(0,0),(50,1),(6,1),(9,5)\}$	$\{(0,0),(49,0),(36,4),(23,3)\}$	$\{(0,0),(39,4),(59,3),(21,5)\}$
$\{(0,0),(37,1),(61,0),(12,3)\}$	$\{(0,0),(57,3),(44,3),(51,3)\}$	$\{(0,0),(51,2),(48,1),(22,2)\}$
$\{(0,0),(7,1),(42,5),(11,3)\}$	$\{(0,0),(32,1),(34,2),(37,5)\}$	$\{(0,0),(48,5),(49,4),(32,4)\}$
$\{(0,0),(35,3),(40,0),(21,1)\}$	$\{(0,0),(17,4),(10,0),(55,3)\}$	$\{(0,0),(13,3),(22,0),(36,1)\}$
$\{(0,0),(62,1),(7,3),(53,0)\}$	$\{(0,0),(38,2),(11,5),(13,5)\}$	$\{(0,0),(33,4),(28,3),(47,4)\}$
$\{(0,0),(43,5),(53,4),(23,5)\}$	$\{(0,0),(63,1),(30,0),(33,0)\}$	$\{(0,0),(20,1),(41,3),(5,0)\}$
$\{(0,0),(23,0),(15,4),(17,2)\}$	$\{(0,0),(39,0),(50,4),(31,0)\}$	$\{(0,0),(26,4),(59,1),(34,5)\}$
$\{(\infty,0),(14,4),(7,2),(12,1)\}$	$\{(0,0),(15,0),(14,5),(25,1)\}$	$\{(0,0),(1,4),(5,2),(43,2)\}$

23. $n = 68$

$\{(0,0),(59,5),(53,0),(51,5)\}$	$\{(0,0),(2,5),(55,3),(54,1)\}$	$\{(0,0),(31,2),(23,5),(13,3)\}$
$\{(0,0),(52,3),(24,2),(60,2)\}$	$\{(0,0),(62,0),(21,2),(5,5)\}$	$\{(0,0),(28,0),(9,1),(23,4)\}$
$\{(\infty,0),(46,5),(7,2),(0,0)\}$	$\{(0,0),(25,0),(12,5),(53,2)\}$	$\{(0,0),(58,0),(27,2),(3,1)\}$
$\{(0,0),(3,0),(33,5),(51,0)\}$	$\{(0,0),(22,4),(56,4),(5,3)\}$	$\{(0,0),(27,0),(52,5),(12,0)\}$
$\{(0,0),(24,3),(21,5),(65,3)\}$	$\{(0,0),(23,1),(49,2),(43,0)\}$	$\{(0,0),(14,5),(42,3),(38,4)\}$
$\{(0,0),(30,3),(21,0),(55,4)\}$	$\{(0,0),(54,2),(36,5),(32,3)\}$	$\{(0,0),(50,1),(56,1),(18,0)\}$
$\{(0,0),(38,0),(8,2),(60,3)\}$	$\{(0,0),(27,3),(35,1),(30,0)\}$	$\{(0,0),(25,4),(42,4),(6,1)\}$
$\{(0,0),(11,1),(20,3),(9,5)\}$	$\{(0,0),(23,3),(50,2),(3,2)\}$	$\{(0,0),(1,0),(51,4),(63,2)\}$
$\{(\infty,0),(21,1),(59,3),(11,4)\}$	$\{(0,0),(64,1),(4,1),(60,1)\}$	$\{(0,0),(57,2),(22,0),(48,4)\}$
$\{(0,0),(4,3),(54,0),(30,2)\}$	$\{(0,0),(65,0),(47,4),(32,2)\}$	$\{(0,0),(14,1),(1,5),(47,2)\}$
$\{(0,0),(37,5),(10,1),(56,3)\}$	$\{(0,0),(66,5),(65,2),(31,5)\}$	$\{(0,0),(6,3),(29,3),(7,1)\}$
$\{(0,0),(6,4),(16,4),(45,5)\}$		

24. $n = 70$

$\{(0,0),(56,5),(21,3),(66,4)\}$	$\{(0,0),(27,1),(40,3),(21,1)\}$	$\{(0,0),(7,2),(36,4),(12,3)\}$
$\{(0,0),(59,3),(55,0),(15,4)\}$	$\{(\infty,0),(0,3),(5,0),(67,1)\}$	$\{(0,0),(58,4),(55,5),(31,5)\}$
$\{(0,0),(49,0),(47,0),(43,5)\}$	$\{(0,0),(11,4),(2,4),(30,4)\}$	$\{(0,0),(55,3),(37,5),(60,3)\}$
$\{(0,0),(56,1),(9,4),(37,2)\}$	$\{(0,0),(59,0),(43,4),(52,5)\}$	$\{(0,0),(63,1),(39,3),(47,1)\}$
$\{(0,0),(15,5),(33,0),(54,0)\}$	$\{(0,0),(16,5),(53,2),(49,2)\}$	$\{(0,0),(1,3),(50,2),(32,5)\}$
$\{(0,0),(27,0),(62,3),(30,1)\}$	$\{(0,0),(57,4),(40,1),(49,3)\}$	$\{(\infty,0),(57,2),(7,5),(45,4)\}$
$\{(0,0),(3,3),(20,5),(46,3)\}$	$\{(0,0),(67,5),(42,3),(53,3)\}$	$\{(0,0),(67,3),(33,4),(68,4)\}$
$\{(0,0),(18,2),(3,0),(61,3)\}$	$\{(0,0),(21,5),(65,2),(15,3)\}$	$\{(0,0),(28,5),(6,4),(13,4)\}$
$\{(0,0),(61,4),(23,1),(2,5)\}$	$\{(0,0),(63,3),(34,2),(45,3)\}$	$\{(0,0),(37,0),(64,2),(47,2)\}$
$\{(0,0),(65,4),(8,5),(44,0)\}$	$\{(0,0),(56,3),(43,3),(57,1)\}$	$\{(0,0),(1,5),(28,3),(10,4)\}$
$\{(0,0),(29,0),(22,2),(46,4)\}$	$\{(0,0),(39,4),(25,5),(8,0)\}$	$\{(0,0),(1,0),(36,5),(5,5)\}$
$\{(0,0),(28,1),(58,1),(12,0)\}$	$\{(0,0),(3,4),(23,0),(28,2)\}$	

25. $n = 72$

$\{(0,0),(24,4),(9,0),(67,2)\}$	$\{(0,0),(65,0),(17,1),(55,0)\}$	$\{(0,0),(16,5),(8,1),(57,0)\}$
$\{(0,0),(8,5),(9,4),(5,5)\}$	$\{(0,0),(63,0),(34,4),(21,1)\}$	$\{(0,0),(31,3),(13,1),(59,0)\}$
$\{(0,0),(53,0),(38,0),(3,2)\}$	$\{(0,0),(60,3),(45,0),(9,2)\}$	$\{(0,0),(32,3),(50,2),(10,1)\}$
$\{(0,0),(12,4),(54,4),(3,1)\}$	$\{(\infty,0),(17,2),(22,0),(41,1)\}$	$\{(0,0),(37,0),(20,1),(13,0)\}$
$\{(0,0),(4,0),(34,3),(23,4)\}$	$\{(0,0),(54,3),(42,1),(61,3)\}$	$\{(0,0),(53,5),(39,4),(32,0)\}$
$\{(0,0),(55,5),(70,0),(61,1)\}$	$\{(0,0),(38,1),(36,0),(63,4)\}$	$\{(0,0),(1,2),(35,3),(46,4)\}$
$\{(0,0),(69,4),(38,3),(43,5)\}$	$\{(0,0),(52,3),(23,0),(62,5)\}$	$\{(0,0),(65,5),(23,3),(30,0)\}$
$\{(0,0),(38,2),(41,5),(57,1)\}$	$\{(0,0),(26,3),(20,0),(67,5)\}$	$\{(0,0),(2,0),(46,0),(3,4)\}$
$\{(0,0),(49,3),(31,0),(47,4)\}$	$\{(0,0),(31,4),(54,0),(11,0)\}$	$\{(0,0),(1,3),(5,0),(28,5)\}$
$\{(0,0),(26,1),(21,0),(16,3)\}$	$\{(0,0),(15,2),(41,4),(34,2)\}$	$\{(\infty,0),(2,4),(14,5),(46,3)\}$
$\{(0,0),(59,1),(6,5),(2,3)\}$	$\{(0,0),(2,4),(49,1),(13,2)\}$	$\{(0,0),(68,1),(60,4),(22,0)\}$
$\{(0,0),(34,5),(46,2),(14,3)\}$	$\{(0,0),(22,4),(1,1),(7,5)\}$	$\{(0,0),(13,5),(27,3),(44,1)\}$

26. $n = 74$

$\{(0,0),(23,5),(25,1),(17,1)\}$	$\{(0,0),(21,2),(14,1),(25,0)\}$	$\{(0,0),(35,4),(64,3),(37,4)\}$
$\{(0,0),(57,1),(11,4),(44,3)\}$	$\{(0,0),(15,2),(2,5),(34,3)\}$	$\{(0,0),(10,3),(34,1),(70,4)\}$
$\{(0,0),(50,4),(20,0),(5,0)\}$	$\{(0,0),(2,1),(62,0),(20,2)\}$	$\{(0,0),(2,4),(28,1),(52,1)\}$
$\{(0,0),(72,3),(13,2),(4,2)\}$	$\{(0,0),(61,1),(21,4),(63,4)\}$	$\{(0,0),(70,1),(41,5),(51,3)\}$
$\{(\infty,0),(46,5),(26,4),(18,1)\}$	$\{(0,0),(25,3),(35,3),(52,5)\}$	$\{(0,0),(52,0),(45,1),(19,2)\}$
$\{(0,0),(29,1),(56,1),(33,0)\}$	$\{(0,0),(12,4),(34,5),(63,5)\}$	$\{(0,0),(33,2),(47,5),(59,2)\}$
$\{(0,0),(18,5),(25,2),(48,2)\}$	$\{(0,0),(21,3),(26,4),(30,5)\}$	$\{(0,0),(59,0),(55,3),(20,4)\}$
$\{(0,0),(63,1),(58,5),(47,4)\}$	$\{(0,0),(6,2),(5,3),(22,0)\}$	$\{(0,0),(61,5),(64,5),(67,0)\}$
$\{(0,0),(16,1),(61,4),(5,4)\}$	$\{(0,0),(64,2),(32,0),(33,1)\}$	$\{(0,0),(45,0),(36,1),(16,2)\}$
$\{(0,0),(43,0),(35,1),(65,2)\}$	$\{(0,0),(46,2),(39,0),(38,0)\}$	$\{(0,0),(1,4),(42,1),(57,0)\}$
$\{(\infty,0),(69,0),(72,3),(31,2)\}$	$\{(0,0),(55,4),(62,4),(43,4)\}$	$\{(0,0),(23,4),(54,1),(15,3)\}$
$\{(0,0),(22,4),(37,2),(36,0)\}$	$\{(0,0),(53,3),(4,0),(7,4)\}$	$\{(0,0),(49,1),(55,0),(24,2)\}$
$\{(0,0),(6,3),(19,3),(55,2)\}$		

27. $n = 78$

$\{(0,0),(40,2),(29,1),(11,0)\}$	$\{(0,0),(64,5),(41,3),(58,4)\}$	$\{(0,0),(1,1),(47,2),(41,4)\}$
$\{(0,0),(55,5),(15,0),(25,5)\}$	$\{(0,0),(51,3),(53,1),(75,1)\}$	$\{(0,0),(4,3),(32,3),(34,4)\}$
$\{(0,0),(44,2),(49,3),(29,0)\}$	$\{(0,0),(17,5),(4,2),(65,2)\}$	$\{(0,0),(26,5),(69,5),(25,0)\}$
$\{(0,0),(48,1),(34,2),(17,0)\}$	$\{(0,0),(41,2),(63,5),(56,5)\}$	$\{(\infty,0),(5,5),(37,3),(75,4)\}$
$\{(0,0),(21,2),(18,4),(56,3)\}$	$\{(0,0),(21,5),(33,5),(47,1)\}$	$\{(0,0),(54,0),(19,3),(28,2)\}$
$\{(0,0),(16,1),(76,3),(13,0)\}$	$\{(0,0),(18,3),(70,1),(68,4)\}$	$\{(0,0),(20,0),(38,2),(53,3)\}$
$\{(0,0),(47,4),(2,0),(39,2)\}$	$\{(0,0),(67,3),(10,1),(42,2)\}$	$\{(0,0),(57,1),(24,1),(34,3)\}$
$\{(0,0),(64,4),(51,0),(1,4)\}$	$\{(0,0),(69,0),(72,0),(37,0)\}$	$\{(0,0),(9,3),(15,5),(4,0)\}$
$\{(0,0),(46,3),(73,5),(39,0)\}$	$\{(0,0),(69,1),(3,5),(13,5)\}$	$\{(0,0),(75,4),(76,0),(68,2)\}$
$\{(0,0),(68,0),(63,2),(44,4)\}$	$\{(0,0),(5,5),(24,0),(46,4)\}$	$\{(0,0),(41,0),(12,2),(18,5)\}$
$\{(0,0),(46,0),(61,4),(58,1)\}$	$\{(0,0),(16,5),(37,5),(9,1)\}$	$\{(0,0),(54,3),(57,5),(5,2)\}$
$\{(\infty,0),(6,2),(18,1),(61,0)\}$	$\{(0,0),(11,3),(17,3),(42,1)\}$	$\{(0,0),(73,2),(50,3),(69,3)\}$
$\{(0,0),(16,4),(38,3),(66,4)\}$	$\{(0,0),(20,2),(47,3),(65,3)\}$	$\{(0,0),(6,5),(16,3),(42,4)\}$

28. $n = 82$

$$\begin{array}{ccc}
\{(0,0),(56,2),(51,0),(5,4)\} & \{(0,0),(48,2),(45,3),(38,0)\} & \{(\infty,0),(43,0),(2,2),(47,1)\} \\
\{(\infty,0),(40,3),(43,5),(51,4)\} & \{(0,0),(59,3),(26,2),(61,3)\} & \{(0,0),(40,1),(35,0),(24,1)\} \\
\{(0,0),(58,1),(25,2),(50,3)\} & \{(0,0),(22,4),(79,2),(28,3)\} & \{(0,0),(50,5),(42,3),(49,1)\} \\
\{(0,0),(69,1),(54,0),(37,0)\} & \{(0,0),(57,1),(61,1),(2,2)\} & \{(0,0),(28,4),(5,3),(65,2)\} \\
\{(0,0),(10,0),(16,3),(36,5)\} & \{(0,0),(6,1),(37,3),(32,4)\} & \{(0,0),(54,5),(72,2),(15,5)\} \\
\{(0,0),(34,1),(16,1),(31,4)\} & \{(0,0),(9,3),(71,3),(38,1)\} & \{(0,0),(64,3),(43,1),(56,0)\} \\
\{(0,0),(1,1),(46,1),(47,4)\} & \{(0,0),(7,2),(52,4),(71,1)\} & \{(0,0),(34,3),(14,3),(69,5)\} \\
\{(0,0),(41,2),(39,5),(68,0)\} & \{(0,0),(70,2),(3,1),(63,2)\} & \{(0,0),(24,4),(47,0),(77,3)\} \\
\{(0,0),(39,2),(71,5),(28,2)\} & \{(0,0),(9,5),(72,0),(78,2)\} & \{(0,0),(17,2),(67,2),(5,0)\} \\
\{(0,0),(4,4),(73,0),(21,3)\} & \{(0,0),(1,5),(78,0),(59,1)\} & \{(0,0),(54,1),(14,1),(1,0)\} \\
\{(0,0),(60,0),(62,5),(18,1)\} & \{(0,0),(15,0),(8,1),(49,4)\} & \{(0,0),(20,1),(52,1),(16,5)\} \\
\{(0,0),(14,2),(44,1),(23,3)\} & \{(0,0),(10,4),(54,3),(29,0)\} & \{(0,0),(39,4),(70,3),(22,0)\} \\
\{(0,0),(7,1),(79,5),(68,3)\} & \{(0,0),(47,1),(41,1),(25,5)\} & \{(0,0),(66,2),(38,2),(23,0)\} \\
\{(0,0),(55,0),(69,0),(68,4)\} & \{(0,0),(6,4),(24,0),(54,4)\} &
\end{array}$$

29. $n = 84$

$$\begin{array}{ccc}
\{(0,0),(48,1),(19,1),(23,2)\} & \{(0,0),(21,0),(40,4),(32,3)\} & \{(0,0),(44,5),(82,0),(64,4)\} \\
\{(0,0),(14,0),(73,2),(24,0)\} & \{(0,0),(55,2),(10,5),(38,0)\} & \{(0,0),(37,2),(66,3),(67,1)\} \\
\{(0,0),(76,4),(35,1),(30,2)\} & \{(0,0),(49,1),(15,1),(76,5)\} & \{(\infty,0),(26,2),(37,4),(35,0)\} \\
\{(0,0),(29,2),(36,1),(73,4)\} & \{(\infty,0),(63,3),(8,5),(70,1)\} & \{(0,0),(67,3),(77,0),(40,0)\} \\
\{(0,0),(79,2),(12,2),(77,2)\} & \{(0,0),(60,2),(78,3),(38,4)\} & \{(0,0),(34,1),(32,0),(60,3)\} \\
\{(0,0),(72,1),(52,5),(9,1)\} & \{(0,0),(39,2),(12,0),(26,5)\} & \{(0,0),(65,2),(48,4),(51,4)\} \\
\{(0,0),(16,2),(68,3),(73,5)\} & \{(0,0),(9,5),(60,1),(22,5)\} & \{(0,0),(71,5),(56,5),(29,5)\} \\
\{(0,0),(75,2),(39,3),(8,3)\} & \{(0,0),(16,4),(54,3),(51,1)\} & \{(0,0),(37,5),(19,0),(60,5)\} \\
\{(0,0),(5,0),(6,3),(58,0)\} & \{(0,0),(8,2),(3,1),(15,5)\} & \{(0,0),(27,5),(53,3),(47,2)\} \\
\{(0,0),(4,5),(36,0),(34,3)\} & \{(0,0),(37,1),(25,4),(6,5)\} & \{(0,0),(69,3),(17,1),(80,3)\} \\
\{(0,0),(47,3),(68,2),(25,3)\} & \{(0,0),(41,2),(7,0),(40,3)\} & \{(0,0),(74,0),(21,1),(8,0)\} \\
\{(0,0),(79,4),(65,3),(78,2)\} & \{(0,0),(28,5),(4,3),(26,0)\} & \{(0,0),(3,5),(82,5),(24,1)\} \\
\{(0,0),(47,4),(58,5),(71,1)\} & \{(0,0),(24,5),(50,0),(33,1)\} & \{(0,0),(42,5),(81,4),(33,2)\} \\
\{(0,0),(44,0),(77,4),(29,4)\} & \{(0,0),(69,4),(72,2),(50,1)\} & \{(0,0),(8,5),(28,0),(70,2)\}
\end{array}$$

30. $n = 94$

$$\begin{array}{ccc}
\{(0,0),(35,2),(4,1),(40,0)\} & \{(0,0),(9,0),(61,1),(46,4)\} & \{(0,0),(71,1),(64,3),(54,4)\} \\
\{(0,0),(44,1),(7,1),(45,4)\} & \{(0,0),(86,1),(75,5),(52,5)\} & \{(0,0),(85,4),(22,0),(67,5)\} \\
\{(0,0),(55,0),(24,2),(58,2)\} & \{(0,0),(13,5),(4,3),(68,4)\} & \{(0,0),(67,3),(12,2),(5,2)\} \\
\{(0,0),(75,4),(1,2),(4,0)\} & \{(0,0),(14,0),(62,0),(54,3)\} & \{(0,0),(76,1),(91,3),(63,5)\} \\
\{(0,0),(12,5),(2,5),(32,4)\} & \{(0,0),(65,0),(68,5),(63,2)\} & \{(0,0),(2,1),(43,4),(48,4)\} \\
\{(0,0),(51,5),(18,3),(4,5)\} & \{(0,0),(57,3),(39,5),(71,2)\} & \{(0,0),(29,4),(43,1),(35,0)\} \\
\{(0,0),(49,0),(35,5),(72,1)\} & \{(0,0),(11,0),(10,1),(35,1)\} & \{(0,0),(76,5),(26,2),(27,3)\} \\
\{(\infty,0),(61,0),(86,3),(37,2)\} & \{(0,0),(34,5),(26,5),(22,1)\} & \{(0,0),(16,2),(55,2),(41,0)\} \\
\{(0,0),(6,1),(27,4),(21,0)\} & \{(0,0),(85,1),(74,0),(65,1)\} & \{(0,0),(34,1),(84,5),(24,3)\} \\
\{(0,0),(13,3),(16,4),(3,0)\} & \{(0,0),(53,4),(63,0),(27,0)\} & \{(0,0),(82,1),(86,3),(36,2)\} \\
\{(0,0),(52,4),(33,3),(20,3)\} & \{(0,0),(45,1),(9,3),(74,1)\} & \{(0,0),(39,4),(34,3),(59,2)\} \\
\{(0,0),(30,3),(42,0),(92,0)\} & \{(0,0),(41,4),(73,4),(42,2)\} & \{(0,0),(47,4),(87,3),(70,3)\} \\
\{(0,0),(73,5),(67,0),(56,3)\} & \{(0,0),(27,5),(56,1),(85,2)\} & \{(0,0),(38,2),(57,5),(15,0)\} \\
\{(0,0),(13,1),(88,1),(60,0)\} & \{(0,0),(69,1),(72,4),(53,2)\} & \{(0,0),(86,4),(49,3),(65,3)\} \\
\{(0,0),(69,0),(54,5),(42,4)\} & \{(0,0),(21,4),(9,4),(91,0)\} & \{(0,0),(66,5),(60,5),(44,2)\} \\
\{(\infty,0),(74,1),(72,5),(32,4)\} & \{(0,0),(15,4),(32,2),(48,3)\} &
\end{array}$$

附录D

1. $n = 21, u = 2$

$$\begin{array}{ccc}
\{(0,0),(11,1),(6,5),(15,5)\} & \{(0,0),(4,1),(7,0),(15,0)\} & \{(\infty_0,0),(3,5),(5,2),(11,0)\} \\
\{(0,0),(3,2),(8,3),(4,0)\} & \{(0,0),(14,4),(20,0),(19,4)\} & \{(0,0),(12,2),(10,2),(9,1)\} \\
\{(\infty_1,0),(18,0),(15,3),(14,4)\} & \{(\infty_0,0),(18,4),(7,1),(4,3)\} & \{(0,0),(17,1),(19,2),(8,2)\} \\
\{(0,0),(20,3),(13,2),(8,5)\} & \{(\infty_1,0),(11,2),(18,5),(13,1)\} & \{(0,0),(3,0),(10,4),(15,3)\}
\end{array}$$

2. $n = 23, u = 2$

$$\begin{array}{ccc}
\{(\infty_0,0),(5,4),(15,2),(13,5)\} & \{(0,0),(2,0),(8,4),(14,0)\} & \{(\infty_1,0),(0,1),(10,3),(4,4)\} \\
\{(0,0),(5,4),(12,4),(3,2)\} & \{(0,0),(3,3),(4,4),(6,3)\} & \{(0,0),(6,0),(9,5),(13,1)\} \\
\{(\infty_0,0),(5,3),(16,1),(10,0)\} & \{(0,0),(1,0),(21,5),(8,2)\} & \{(0,0),(9,4),(5,5),(10,1)\} \\
\{(0,0),(11,5),(15,0),(10,0)\} & \{(0,0),(16,1),(21,2),(9,3)\} & \{(\infty_1,0),(0,0),(22,2),(14,5)\} \\
\{(0,0),(1,2),(4,0),(16,3)\} & &
\end{array}$$

3. $n = 25, u = 2$

$\{(0,0),(23,0),(8,3),(19,0)\}$	$\{(\infty_1,0),(14,1),(24,0),(1,2)\}$	$\{(0,0),(7,5),(18,0),(17,1)\}$
$\{(\infty_0,0),(21,0),(8,3),(3,1)\}$	$\{(\infty_1,0),(0,3),(22,5),(8,4)\}$	$\{(0,0),(20,3),(15,5),(12,5)\}$
$\{(0,0),(16,4),(11,4),(23,2)\}$	$\{(\infty_0,0),(0,5),(23,4),(4,2)\}$	$\{(0,0),(21,5),(6,5),(12,2)\}$
$\{(0,0),(5,5),(11,0),(21,4)\}$	$\{(0,0),(14,4),(1,4),(23,3)\}$	$\{(0,0),(9,0),(18,4),(1,0)\}$
$\{(0,0),(21,2),(3,5),(22,3)\}$	$\{(0,0),(1,2),(21,1),(24,3)\}$	

4. $n = 27, u = 2$

$\{(\infty_0,0),(20,5),(15,2),(5,1)\}$	$\{(0,0),(11,5),(16,0),(8,5)\}$	$\{(0,0),(15,1),(18,5),(1,3)\}$
$\{(0,0),(9,3),(14,1),(1,1)\}$	$\{(0,0),(2,4),(14,2),(25,0)\}$	$\{(0,0),(21,2),(9,2),(6,5)\}$
$\{(0,0),(6,0),(2,3),(24,1)\}$	$\{(\infty_1,0),(23,2),(10,5),(7,3)\}$	$\{(0,0),(7,4),(17,0),(25,4)\}$
$\{(0,0),(25,5),(24,5),(20,0)\}$	$\{(\infty_1,0),(25,1),(19,0),(18,4)\}$	$\{(\infty_0,0),(0,3),(25,4),(16,0)\}$
$\{(0,0),(1,4),(20,1),(8,0)\}$	$\{(0,0),(10,3),(14,5),(4,0)\}$	$\{(0,0),(1,5),(5,0),(21,4)\}$

5. $n = 29, u = 2$

$\{(0,0),(27,3),(13,2),(18,3)\}$	$\{(0,0),(5,4),(11,1),(20,2)\}$	$\{(\infty_0,0),(21,4),(14,1),(9,2)\}$
$\{(0,0),(16,0),(4,5),(22,0)\}$	$\{(0,0),(8,4),(6,2),(27,0)\}$	$\{(0,0),(1,0),(13,4),(11,0)\}$
$\{(0,0),(15,3),(10,3),(9,5)\}$	$\{(0,0),(4,4),(7,5),(17,1)\}$	$\{(\infty_0,0),(19,5),(22,3),(13,0)\}$
$\{(\infty_1,0),(26,1),(0,0),(5,2)\}$	$\{(0,0),(26,4),(24,3),(12,0)\}$	$\{(0,0),(1,5),(22,5),(21,3)\}$
$\{(\infty_1,0),(0,5),(18,3),(16,4)\}$	$\{(0,0),(14,0),(10,5),(13,5)\}$	$\{(0,0),(19,5),(25,0),(26,3)\}$
$\{(0,0),(4,2),(11,4),(25,3)\}$		

6. $n = 33, u = 2$

$\{(\infty_1,0),(20,4),(13,1),(8,5)\}$	$\{(0,0),(22,2),(31,5),(9,1)\}$	$\{(0,0),(23,1),(5,0),(32,1)\}$
$\{(0,0),(14,0),(27,5),(16,5)\}$	$\{(0,0),(21,5),(23,3),(4,5)\}$	$\{(0,0),(30,3),(6,2),(29,0)\}$
$\{(0,0),(17,4),(30,1),(20,0)\}$	$\{(0,0),(28,1),(25,1),(20,4)\}$	$\{(0,0),(21,3),(32,2),(28,5)\}$
$\{(\infty_0,0),(14,5),(6,4),(28,3)\}$	$\{(\infty_0,0),(14,0),(18,1),(1,2)\}$	$\{(0,0),(8,4),(10,4),(17,2)\}$
$\{(0,0),(25,0),(10,0),(27,3)\}$	$\{(0,0),(15,3),(19,1),(12,2)\}$	$\{(\infty_1,0),(22,0),(8,3),(26,2)\}$
$\{(0,0),(32,4),(27,0),(1,0)\}$	$\{(0,0),(1,1),(8,2),(19,5)\}$	$\{(0,0),(3,4),(15,4),(27,2)\}$

7. $n = 35, u = 2$

$\{(0,0),(14,3),(22,5),(15,5)\}$	$\{(0,0),(31,4),(12,4),(25,2)\}$	$\{(\infty_0,0),(15,2),(11,5),(33,3)\}$
$\{(0,0),(18,3),(32,5),(15,3)\}$	$\{(0,0),(5,0),(13,0),(20,4)\}$	$\{(\infty_1,0),(1,5),(34,0),(12,3)\}$
$\{(0,0),(30,1),(34,2),(25,5)\}$	$\{(0,0),(29,0),(5,1),(11,0)\}$	$\{(0,0),(9,0),(25,4),(16,3)\}$
$\{(0,0),(29,3),(31,1),(3,2)\}$	$\{(0,0),(9,2),(33,3),(34,3)\}$	$\{(0,0),(27,1),(17,1),(15,1)\}$
$\{(0,0),(12,1),(30,3),(16,5)\}$	$\{(0,0),(29,5),(8,4),(32,2)\}$	$\{(0,0),(16,1),(1,1),(14,0)\}$
$\{(\infty_1,0),(30,1),(9,2),(3,4)\}$	$\{(0,0),(12,3),(3,5),(7,5)\}$	$\{(\infty_0,0),(29,4),(19,1),(31,0)\}$
$\{(0,0),(1,5),(12,2),(28,4)\}$		

8. $n = 47, u = 2$

$\{(0,0),(17,0),(13,5),(2,5)\}$	$\{(0,0),(41,4),(16,2),(38,5)\}$	$\{(0,0),(31,3),(7,3),(27,4)\}$
$\{(0,0),(4,0),(13,0),(10,0)\}$	$\{(0,0),(12,5),(28,0),(30,3)\}$	$\{(0,0),(17,4),(38,1),(32,3)\}$
$\{(0,0),(7,5),(4,2),(23,4)\}$	$\{(0,0),(28,2),(2,2),(41,3)\}$	$\{(\infty_1,0),(25,1),(26,4),(20,5)\}$
$\{(\infty_0,0),(1,3),(4,5),(2,4)\}$	$\{(\infty_0,0),(43,1),(10,2),(22,0)\}$	$\{(0,0),(7,1),(46,4),(22,5)\}$
$\{(0,0),(45,2),(31,2),(3,1)\}$	$\{(0,0),(10,4),(46,0),(5,1)\}$	$\{(0,0),(4,3),(43,2),(14,2)\}$
$\{(0,0),(3,4),(17,1),(24,3)\}$	$\{(0,0),(40,2),(32,4),(45,0)\}$	$\{(0,0),(46,2),(28,3),(35,3)\}$
$\{(0,0),(39,4),(21,2),(20,3)\}$	$\{(0,0),(12,0),(39,0),(22,1)\}$	$\{(0,0),(14,4),(36,4),(27,2)\}$
$\{(0,0),(15,0),(33,1),(24,4)\}$	$\{(0,0),(20,5),(31,0),(10,2)\}$	$\{(\infty_1,0),(23,3),(34,0),(46,2)\}$
$\{(0,0),(5,0),(18,3),(30,4)\}$		

9. $n = 17, u = 3$

$\{(\infty_1,0),(1,0),(0,3),(5,5)\}$	$\{(0,0),(11,5),(2,2),(15,5)\}$	$\{(\infty_1,0),(8,4),(16,2),(2,1)\}$
$\{(0,0),(16,4),(7,4),(15,0)\}$	$\{(\infty_0,0),(4,4),(3,3),(1,0)\}$	$\{(\infty_2,0),(6,2),(2,1),(12,0)\}$
$\{(\infty_0,0),(16,1),(3,5),(8,2)\}$	$\{(0,0),(7,0),(9,5),(14,3)\}$	$\{(\infty_2,0),(1,4),(15,3),(13,5)\}$
$\{(0,0),(5,0),(12,5),(6,5)\}$	$\{(0,0),(1,0),(11,4),(14,4)\}$	

10. $n = 19, u = 3$

$$\begin{array}{ccc}
\{(\infty_1,0),(17,3),(10,4),(0,1)\} & \{(\infty_0,0),(4,4),(18,2),(17,1)\} & \{(0,0),(2,1),(14,5),(8,5)\} \\
\{(0,0),(11,4),(15,4),(8,4)\} & \{(\infty_2,0),(12,3),(11,4),(18,5)\} & \{(0,0),(10,0),(2,0),(3,2)\} \\
\{(\infty_2,0),(0,2),(5,0),(2,1)\} & \{(0,0),(5,5),(6,5),(10,2)\} & \{(0,0),(17,4),(4,5),(7,3)\} \\
\{(\infty_0,0),(7,5),(17,3),(15,0)\} & \{(\infty_1,0),(9,2),(10,5),(13,0)\} & \{(0,0),(1,4),(11,3),(16,3)\}
\end{array}$$

11. $n = 21, u = 3$

$$\begin{array}{ccc}
\{(0,0),(3,1),(12,1),(17,0)\} & \{(\infty_2,0),(8,5),(20,4),(3,2)\} & \{(0,0),(15,3),(7,5),(9,4)\} \\
\{(\infty_1,0),(15,0),(16,3),(0,1)\} & \{(\infty_1,0),(14,4),(3,5),(10,2)\} & \{(0,0),(15,0),(3,3),(5,0)\} \\
\{(0,0),(11,4),(10,4),(18,4)\} & \{(\infty_2,0),(13,1),(11,3),(0,0)\} & \{(\infty_0,0),(20,4),(13,2),(9,3)\} \\
\{(\infty_0,0),(8,5),(10,1),(13,0)\} & \{(0,0),(2,0),(15,4),(1,2)\} & \{(0,0),(6,4),(2,1),(3,0)\} \\
\{(0,0),(1,1),(5,2),(13,5)\} & &
\end{array}$$

12. $n = 31, u = 3$

$$\begin{array}{ccc}
\{(\infty_2,0),(22,1),(24,2),(16,0)\} & \{(0,0),(21,0),(6,4),(29,1)\} & \{(0,0),(15,1),(24,3),(11,0)\} \\
\{(\infty_1,0),(1,5),(2,3),(21,0)\} & \{(0,0),(15,5),(10,4),(6,2)\} & \{(0,0),(15,4),(18,2),(19,4)\} \\
\{(0,0),(27,1),(22,1),(13,1)\} & \{(\infty_2,0),(13,5),(1,4),(18,3)\} & \{(\infty_1,0),(7,4),(25,2),(2,1)\} \\
\{(0,0),(30,5),(11,3),(14,2)\} & \{(0,0),(5,2),(6,5),(26,1)\} & \{(\infty_0,0),(28,4),(25,3),(18,5)\} \\
\{(0,0),(2,0),(3,0),(6,3)\} & \{(0,0),(8,4),(15,0),(17,2)\} & \{(0,0),(21,4),(7,1),(19,0)\} \\
\{(\infty_0,0),(6,0),(24,1),(2,2)\} & \{(0,0),(18,0),(11,1),(25,0)\} & \{(0,0),(1,5),(3,2),(11,2)\}
\end{array}$$

13. $n = 35, u = 3$

$$\begin{array}{ccc}
\{(0,0),(5,2),(31,2),(21,1)\} & \{(\infty_0,0),(26,2),(30,3),(10,0)\} & \{(\infty_0,0),(12,1),(10,5),(7,4)\} \\
\{(0,0),(18,3),(1,4),(31,0)\} & \{(0,0),(7,4),(15,5),(6,2)\} & \{(0,0),(13,1),(14,2),(3,3)\} \\
\{(0,0),(9,2),(10,2),(23,2)\} & \{(0,0),(24,5),(8,2),(31,1)\} & \{(0,0),(4,2),(10,0),(8,5)\} \\
\{(\infty_2,0),(24,1),(0,4),(3,2)\} & \{(0,0),(18,4),(24,4),(7,0)\} & \{(0,0),(23,4),(28,5),(6,3)\} \\
\{(0,0),(3,0),(15,0),(1,3)\} & \{(0,0),(5,5),(14,4),(27,0)\} & \{(\infty_1,0),(10,0),(20,5),(8,2)\} \\
\{(\infty_1,0),(15,4),(8,1),(34,3)\} & \{(0,0),(29,1),(26,5),(2,5)\} & \{(0,0),(18,0),(2,0),(3,5)\} \\
\{(\infty_2,0),(9,3),(28,5),(34,0)\} & \{(0,0),(5,0),(20,4),(28,1)\} &
\end{array}$$

14. $n = 17, u = 4$

$$\begin{array}{ccc}
\{(0,0),(7,0),(16,0),(2,0)\} & \{(\infty_3,0),(9,2),(0,11),(16,0)\} & \{(\infty_2,0),(2,3),(15,4),(1,1)\} \\
\{(\infty_1,0),(13,5),(15,1),(5,3)\} & \{(0,0),(14,1),(4,0),(8,1)\} & \{(\infty_2,0),(4,5),(13,0),(2,2)\} \\
\{(\infty_1,0),(4,4),(0,0),(5,2)\} & \{(\infty_0,0),(4,2),(14,5),(2,4)\} & \{(0,0),(6,4),(16,3),(11,5)\} \\
\{(\infty_0,0),(4,1),(7,3),(3,0)\} & \{(\infty_3,0),(12,4),(6,1),(10,3)\} & \{(0,0),(2,5),(5,3),(8,4)\}
\end{array}$$

15. $n = 19, u = 4$

$$\begin{array}{ccc}
\{(0,0),(12,3),(9,3),(14,3)\} & \{(\infty_2,0),(17,0),(6,2),(0,4)\} & \{(\infty_1,0),(10,0),(11,2),(15,5)\} \\
\{(\infty_3,0),(8,5),(17,0),(6,3)\} & \{(\infty_1,0),(0,3),(3,4),(9,1)\} & \{(0,0),(10,0),(12,5),(6,0)\} \\
\{(\infty_0,0),(3,4),(7,3),(10,2)\} & \{(\infty_3,0),(18,1),(2,4),(17,2)\} & \{(0,0),(11,1),(18,3),(17,3)\} \\
\{(\infty_0,0),(3,0),(16,5),(11,1)\} & \{(\infty_2,0),(13,3),(14,1),(9,5)\} & \{(0,0),(12,0),(3,4),(7,5)\} \\
\{(0,0),(1,1),(3,2),(11,2)\} & &
\end{array}$$

16. $n = 23, u = 4$

$$\begin{array}{ccc}
\{(\infty_3,0),(2,4),(20,2),(19,0)\} & \{(0,0),(21,1),(6,1),(4,1)\} & \{(0,0),(10,4),(5,0),(2,1)\} \\
\{(0,0),(18,5),(6,5),(16,2)\} & \{(\infty_2,0),(12,2),(5,3),(0,0)\} & \{(0,0),(5,5),(7,1),(19,0)\} \\
\{(0,0),(14,0),(20,2),(1,0)\} & \{(\infty_3,0),(2,1),(14,5),(16,3)\} & \{(\infty_1,0),(14,3),(0,0),(15,2)\} \\
\{(\infty_0,0),(8,4),(22,3),(21,5)\} & \{(0,0),(3,3),(6,3),(13,5)\} & \{(\infty_1,0),(13,4),(16,5),(20,1)\} \\
\{(\infty_0,0),(9,0),(17,2),(5,1)\} & \{(\infty_2,0),(14,1),(13,4),(5,5)\} & \{(0,0),(1,1),(4,3),(16,0)\}
\end{array}$$

17. $n = 31, u = 4$

$$\begin{array}{ccc}
\{(0,0),(8,3),(19,0),(1,2)\} & \{(\infty_2,0),(30,3),(20,0),(6,2)\} & \{(\infty_3,0),(21,0),(3,4),(28,2)\} \\
\{(0,0),(1,1),(25,1),(27,3)\} & \{(\infty_0,0),(28,4),(7,5),(23,3)\} & \{(\infty_2,0),(25,4),(10,1),(12,5)\} \\
\{(\infty_1,0),(16,3),(20,4),(26,1)\} & \{(0,0),(10,0),(6,0),(15,0)\} & \{(0,0),(21,4),(29,3),(1,4)\} \\
\{(0,0),(23,4),(20,1),(15,4)\} & \{(\infty_0,0),(24,0),(21,1),(17,2)\} & \{(\infty_3,0),(21,1),(18,3),(7,5)\} \\
\{(0,0),(14,0),(5,5),(20,4)\} & \{(0,0),(18,5),(20,5),(17,5)\} & \{(\infty_1,0),(16,0),(14,5),(28,2)\} \\
\{(0,0),(4,4),(13,3),(16,5)\} & \{(0,0),(30,1),(5,2),(22,3)\} & \{(0,0),(12,3),(8,1),(30,3)\} \\
\{(0,0),(2,5),(9,2),(21,1)\} & &
\end{array}$$

18. $n = 35, u = 4$

$\{(0,0),(15,5),(27,1),(22,1)\}$ $\{(0,0),(7,0),(18,3),(25,2)\}$ $\{(\infty_1,0),(9,4),(28,1),(7,5)\}$
$\{(0,0),(5,3),(25,1),(21,3)\}$ $\{(\infty_3,0),(2,4),(10,0),(14,2)\}$ $\{(\infty_2,0),(10,4),(28,5),(23,1)\}$
$\{(\infty_3,0),(2,5),(4,3),(22,1)\}$ $\{(\infty_2,0),(10,0),(13,2),(19,3)\}$ $\{(0,0),(3,1),(11,2),(14,2)\}$
$\{(0,0),(34,1),(18,5),(4,0)\}$ $\{(\infty_0,0),(8,3),(7,5),(2,4)\}$ $\{(0,0),(4,3),(12,0),(29,0)\}$
$\{(\infty_0,0),(8,0),(18,1),(34,2)\}$ $\{(0,0),(6,3),(22,2),(9,2)\}$ $\{(0,0),(2,1),(25,4),(23,1)\}$
$\{(0,0),(25,0),(24,0),(33,0)\}$ $\{(0,0),(4,1),(26,5),(11,5)\}$ $\{(\infty_1,0),(9,3),(2,0),(31,2)\}$
$\{(0,0),(2,2),(34,4),(3,3)\}$ $\{(0,0),(24,2),(1,3),(8,4)\}$ $\{(0,0),(5,2),(14,1),(20,3)\}$

19. $n = 17, u = 5$

$\{(\infty_4,0),(10,3),(15,1),(14,2)\}$ $\{(\infty_3,0),(16,4),(2,1),(0,0)\}$ $\{(\infty_2,0),(2,4),(11,5),(5,3)\}$
$\{(\infty_0,0),(15,4),(9,3),(5,2)\}$ $\{(0,0),(7,3),(6,3),(8,0)\}$ $\{(\infty_3,0),(10,3),(2,2),(15,5)\}$
$\{(\infty_1,0),(4,4),(14,5),(6,2)\}$ $\{(\infty_2,0),(3,1),(15,2),(13,0)\}$ $\{(\infty_0,0),(13,1),(5,5),(8,0)\}$
$\{(\infty_4,0),(3,5),(9,4),(1,0)\}$ $\{(\infty_1,0),(2,3),(15,1),(14,0)\}$ $\{(0,0),(11,2),(13,2),(16,2)\}$
$\{(0,0),(3,2),(7,2),(14,2)\}$

20. $n = 21, u = 5$

$\{(\infty_0,0),(6,2),(3,5),(8,0)\}$ $\{(\infty_4,0),(16,2),(10,0),(0,4)\}$ $\{(\infty_4,0),(1,5),(15,3),(13,1)\}$
$\{(\infty_1,0),(17,4),(11,3),(4,5)\}$ $\{(0,0),(1,2),(7,0),(10,1)\}$ $\{(0,0),(7,5),(17,5),(16,2)\}$
$\{(0,0),(5,0),(18,0),(17,0)\}$ $\{(\infty_0,0),(11,1),(4,4),(3,3)\}$ $\{(\infty_2,0),(15,4),(3,0),(10,1)\}$
$\{(\infty_3,0),(1,4),(16,1),(14,2)\}$ $\{(0,0),(18,2),(8,3),(10,3)\}$ $\{(\infty_2,0),(3,2),(5,5),(2,3)\}$
$\{(\infty_3,0),(10,0),(13,5),(14,3)\}$ $\{(\infty_1,0),(7,1),(12,0),(16,2)\}$ $\{(0,0),(2,1),(6,0),(17,2)\}$

21. $n = 23, u = 5$

$\{(\infty_2,0),(14,3),(19,0),(22,2)\}$ $\{(\infty_3,0),(13,1),(17,2),(11,3)\}$ $\{(\infty_1,0),(16,0),(15,5),(22,1)\}$
$\{(\infty_0,0),(5,3),(1,5),(13,4)\}$ $\{(\infty_2,0),(16,5),(6,4),(17,1)\}$ $\{(\infty_4,0),(13,2),(1,0),(20,3)\}$
$\{(\infty_3,0),(9,5),(2,0),(14,4)\}$ $\{(0,0),(21,3),(8,0),(13,1)\}$ $\{(0,0),(17,4),(12,0),(21,0)\}$
$\{(\infty_4,0),(19,1),(22,4),(20,5)\}$ $\{(\infty_0,0),(13,0),(15,2),(16,1)\}$ $\{(0,0),(7,3),(21,5),(6,3)\}$
$\{(0,0),(17,0),(10,0),(9,3)\}$ $\{(0,0),(3,4),(6,4),(19,0)\}$ $\{(\infty_1,0),(21,2),(18,3),(7,4)\}$
$\{(0,0),(4,5),(9,1),(14,1)\}$

22. $n = 25, u = 5$

$\{(\infty_2,0),(10,0),(7,1),(24,5)\}$ $\{(\infty_2,0),(14,4),(24,3),(23,2)\}$ $\{(0,0),(8,4),(22,4),(18,0)\}$
$\{(0,0),(20,0),(2,5),(22,3)\}$ $\{(\infty_0,0),(23,2),(22,3),(0,4)\}$ $\{(\infty_4,0),(21,3),(4,2),(3,5)\}$
$\{(\infty_0,0),(19,5),(8,0),(14,1)\}$ $\{(\infty_3,0),(6,0),(17,4),(18,2)\}$ $\{(\infty_1,0),(19,3),(18,1),(12,2)\}$
$\{(0,0),(21,5),(17,0),(1,0)\}$ $\{(\infty_1,0),(22,4),(10,5),(19,0)\}$ $\{(0,0),(17,3),(7,3),(20,3)\}$
$\{(0,0),(15,2),(10,3),(21,0)\}$ $\{(0,0),(17,5),(23,5),(11,2)\}$ $\{(\infty_3,0),(6,1),(22,5),(24,3)\}$
$\{(\infty_4,0),(24,1),(20,4),(8,0)\}$ $\{(0,0),(2,0),(12,1),(21,4)\}$

23. $n = 17, u = 6$

$\{(0,0),(15,0),(4,0),(7,0)\}$ $\{(\infty_5,0),(11,2),(14,1),(6,0)\}$ $\{(\infty_4,0),(14,1),(15,4),(2,2)\}$
$\{(\infty_1,0),(2,1),(14,3),(2,2)\}$ $\{(\infty_4,0),(11,5),(9,0),(2,3)\}$ $\{(\infty_2,0),(1,0),(7,2),(9,5)\}$
$\{(\infty_5,0),(7,4),(1,3),(0,5)\}$ $\{(\infty_3,0),(0,1),(1,3),(14,4)\}$ $\{(\infty_0,0),(4,1),(0,0),(11,2)\}$
$\{(0,0),(1,0),(3,2),(8,2)\}$ $\{(\infty_0,0),(13,3),(15,4),(10,5)\}$ $\{(\infty_2,0),(10,1),(15,4),(14,3)\}$
$\{(\infty_1,0),(0,5),(14,4),(4,2)\}$ $\{(\infty_3,0),(8,5),(0,2),(2,0)\}$

24. $n = 21, u = 6$

$\{(0,0),(4,4),(17,5),(18,0)\}$ $\{(\infty_5,0),(19,5),(0,0),(16,3)\}$ $\{(\infty_4,0),(9,0),(3,3),(17,1)\}$
$\{(\infty_1,0),(18,4),(9,1),(19,0)\}$ $\{(\infty_4,0),(3,4),(2,5),(20,2)\}$ $\{(\infty_2,0),(19,0),(6,3),(3,2)\}$
$\{(\infty_5,0),(15,2),(2,4),(6,1)\}$ $\{(\infty_3,0),(9,2),(20,4),(14,0)\}$ $\{(\infty_0,0),(0,1),(2,0),(9,5)\}$
$\{(0,0),(2,2),(20,3),(13,0)\}$ $\{(\infty_0,0),(19,3),(15,4),(9,2)\}$ $\{(\infty_2,0),(10,5),(8,1),(19,4)\}$
$\{(\infty_1,0),(14,3),(9,2),(11,5)\}$ $\{(\infty_3,0),(6,1),(7,5),(19,3)\}$ $\{(0,0),(20,0),(5,5),(14,5)\}$
$\{(0,0),(2,0),(7,0),(17,0)\}$

7 有待改进之处

7.1 常重复合码

本文中研究了三类常重复合码，分别是重量为4且距离为5的四元常重复合码、重量为4且距离为6的四元常重复合码以及距离为6且复合构型为$[2,2]$的三元常重复合码。其中重量为4且距离为5的四元常重复合码还有5个长度较小的最优编码的最大码字个数未能完全确定。距离为6且复合构型为$[2,2]$的最优三元常重复合码中也有一些长度较小的最优编码的最大码字个数未能确定，并且当$n \equiv 5 \pmod 6$时，目前所构造的码字个数离理论上界值还差1，更进一步的研究应该去探索新的构造方法使得码字个数达到理论上界值或者证明目前的理论上界值确实是不能够达到的。除此以外，距离为6且复合构型为$[3,1]$的最优三元常重复合码也是一个值得进一步研究的课题。综上所述，可总结为如下的几个公开问题：

公开问题1: 距离为6，复合构型为$[2,2]$且长度$n \equiv 5 \pmod 6$的最优三元常重复合码的码字个数能否达到理论上界值？

公开问题2: 距离为6且复合构型为$[3,1]$的最优三元常重复合码的码字个数是多少？

7.2 超单Room方

本文中基本解决了超单Room方的存在性问题，但是15阶和17阶的超单Room方的存在性还未知。此外，在构造4-*GDD(6^n)的过程中，得到了部分超单斜Room方的存在性结果，但是这个结果离完整解决超单斜Room方的存在性问题还差得较多。超单斜Room方的存在性问题是值得研究的，也可作为一个公开问题：

公开问题3: 超单斜Room方存在的必要条件是否充分？

参 考 文 献

[1] AGRELL E, VARDY A, ZEGER K. Upper bounds for constant-weight codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2000, 46(7):2373–2395.

[2] CHUNG F R K, SALEHI J A, WEI V K. Optical orthogonal codes: design, analysis, and applications[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1989, 35(3):595–604.

[3] A N Q, GYÖRFI L, MASSEY J L. Constructions of binary constant-weight cyclic codes and cyclically permutable codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1992, 38(3):940–949.

[4] WANG X M, YANG Y X. On the undetected error-probability of nonlinear binary constant weight codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1994, 42(7):2390–2394.

[5] BLAUM M, BRUCK J. Coding for tolerance and detection of skew in parallel asynchronous communications[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2000, 46(7):2329–2335.

[6] ERICSON T, ZINOVIEV V. Codes on Euclidean spheres[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 2001.

[7] ETZION T. Constructions of error-correcting DC-free block codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1990, 36(4):899–905.

[8] VAN TILBORG H, BLAUM M. On error-correcting balanced codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1989, 35(5):1091–1095.

[9] BITAN S, ETZION T. Constructions for optimal constant weight cyclically permutable codes and difference-families[J]. IEEE Trans. Infomation Theory, 1995, 41(1):77–87.

[10] BLAKE-WILSON S, PHELPS K T. Constant weight codes and group divisible designs[J]. Des. Codes Cryptogr., 1999, 16(1):11–27.

[11] CONWAY J H, SLOANE N J A. Sphere packings, lattices and groups[M]. Thirdth ed. New York: Springer-Verlag, 1999.

[12] MACWILLIAMS F J, SLOANE N J A. The theory of error-correcting codes. I[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1977.

[13] BEST M R, BROUWER A E, MACWILLIAMS F J, et al. Bounds for binary codes of length less than 25[J]. IEEE Trans. Infomation Theory, 1978, IT-24(1):81–93.

[14] HONKALA I S. Combinatorial bounds for binary constant weight and covering codes[M]. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1989.

[15] GRAHAM R L, SLOANE N J A. Lower bounds for constant weight codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1980, 26(1):37–43.

[16] BROUWER A E, SHEARER J B, SLOANE N J A, et al. A new table of constant weight codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1990, 36(6):1334–1380.

[17] SCHRIJVER A. New code upper bounds from the Terwilliger algebra and semidefinite programming[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2005, 51(8):2859–2866.

[18] CHEE Y M, XING C, YEO S L. New constant-weight codes from propagation rules[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2010, 56(4):1596–1599.

[19] ÖSTERGÅRD P R J. Classification of binary constant weight codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2010, 56(8):3779–3785.

[20] KANG B G, KIM H K, TOAN P T. Delsarte's linear programming bound for constant-weight codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2012, 58(9):5956–5962.

[21] ZHANG H, GE G. Optimal quaternary constant-weight codes with weight four and distance five[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2013, 59(3):1617–1629.

[22] CHEE Y M, LING S. Constructions for q-ary constant-weight codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2007, 53(1):135–146.

[23] ETZION T. Optimal constant weight codes over Z_k and generalized designs[J]. Discrete Math., 1997, 169(1-3):55–82.

[24] FU F W, VINCK A J H, SHEN S Y. On the constructions of constant-weight codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1998, 44(1):328–333.

[25] BOGDANOVA G. New bounds for the maximum size of ternary constant weight codes[J]. Serdica Math. J., 2000, 26(1):5–12.

[26] FU F W, KLØVE T, LUO Y, et al. On the Svanström bound for ternary constant-weight codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2001, 47(5):2061–2064.

[27] ÖSTERGÅRD P R J, SVANSTRÖM M. Ternary constant weight codes[J]. Electron. J. Combin., 2002, 9(1):Research Paper 41, 23 pp. (electronic). http://www.combinatorics.org/Volume_9/Abstracts/v9i1r41.html.

[28] SVANSTRÖM M. A lower bound for ternary constant weight codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1997, 43(5):1630–1632.

[29] SVANSTRÖM M. Ternary codes with weight constraints[D]. PhD dissertation. Sweden: Linköpings Universitet, 1999.

[30] CHEN K, GE G, ZHU L. Generalized Steiner triple systems with group size five[J]. J. Combin. Des., 1999, 7(6):441–452.

[31] CHEN K, GE G, ZHU L. Starters and related codes[J]. J. Statist. Plann. Inference, 2000, 86(2):379–395.

[32] GE G. Generalized Steiner triple systems with group size $g \equiv 1, 5 \pmod 6$[J]. Australas. J. Combin., 2000, 21:37–47.

[33] GE G. Further results on the existence of generalized Steiner triple systems with group size $g \equiv 1, 5 \pmod 6$[J]. Australas. J. Combin., 2002, 25:19–27.

[34] GE G, WU D. Generalized Steiner triple systems with group size ten[J]. J. Math. Res. Exposition, 2003, 23(3):391–396.

[35] PHELPS K, YIN C. Generalized Steiner systems with block size three and group size $g \equiv 3 \pmod 6$[J]. J. Combin. Des., 1997, 5(6):417–432.

[36] PHELPS K, YIN C. Generalized Steiner systems with block size three and group size four[J]. Ars Combin., 1999, 53:133–146.

[37] WU D, GE G, ZHU L. Generalized Steiner triple systems with group size $g = 7, 8$[J]. Ars Combin., 2000, 57:175–191.

[38] YIN J, LU Y, WANG J. Maximum distance holey packings and related codes[J]. Sci. China Ser. A, 1999, 42(12):1262–1269.

[39] CHEE Y M, DAU S H, LING A C H, et al. The sizes of optimal q-ary codes of weight three and distance four: a complete solution[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2008, 54(3):1291–1295.

[40] CHEE Y M, DAU S H, LING A C H, et al. Linear size optimal q-ary constant-weight codes and constant-composition codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2010, 56(1):140–151.

[41] CAO H, JI L, ZHU L. Constructions for generalized Steiner systems $\mathrm{GS}(3, 4, v, 2)$[J]. Des. Codes Cryptogr., 2007, 45(2):185–197.

[42] GE G. Construction of optimal ternary constant weight codes via Bhaskar Rao designs[J]. Discrete Math., 2008, 308(13):2704–2708.

[43] JI L, WU D, ZHU L. Existence of generalized Steiner systems $\mathrm{GS}(2, 4, v, 2)$[J]. Des. Codes Cryptogr., 2005, 36(1):83–99.

[44] WU D, ZHU L. Generalized Steiner systems $\mathrm{GS}(2, 4, \nu, 2)$ with ν a prime power $\equiv 7 \pmod{12}$[J]. Des. Codes Cryptogr., 2001, 24(1):69–80.

[45] ZHANG H, ZHANG X, GE G. Optimal ternary constant-weight codes with weight 4 and distance 5[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2012, 58(5):2706–2718.

[46] ZHANG H, GE G. Optimal ternary constant-weight codes of weight four and distance six[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2010, 56(5):2188–2203.

[47] GE G, WU D. 4-$^*\mathrm{GDDs}(3^n)$ and generalized Steiner systems $\mathrm{GS}(2, 4, v, 3)$[J]. J. Combin. Des., 2003, 11(6):381–393.

[48] GE G, WU D. Some new optimal quaternary constant weight codes[J]. Sci. China Ser. F, 2005, 48(2):192–200.

[49] WU D, FAN P. Constructions of optimal quaternary constant weight codes via group divisible designs[J]. Discrete Math., 2009, 309(20):6009–6013.

[50] ZHU M, GE G. $4\text{-}^{*}GDD(6^n)s$ and related optimal quaternary constant-weight codes[J]. J. Combin. Des., 2012, 20(12):509–526.

[51] TELATAR I E, GALLAGER R G. Zero error decision feedback capacity of discrete memoryless channels[C]// ARIKAN E. Proc. Bilkent Int. Conf. New Trends Commun. Control Signal Process. Elsevier 1990: 228–233.

[52] D′YACHKOV A G. Random constant composition codes for multiple access channels[J]. Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform., 1984, 13(6):357–369.

[53] ERICSON T, ZINOVIEV V. Spherical codes generated by binary partitions of symmetric pointsets[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1995, 41(1):107–129.

[54] CHEE Y M, LING S. Improved lower bounds for constant GC-content DNA codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2008, 54(1):391–394.

[55] KING O D. Bounds for DNA codes with constant GC-content[J]. Electron. J. Combin., 2003, 10:Research Paper 33, 13 pp. (electronic). http://www.combinatorics.org/Volume_10/Abstracts/v10i1r33.html.

[56] MILENKOVIC O, KASHYAP N. On the design of codes for DNA computing[G]// Coding and cryptography. vol 3969. Berlin: Springer, 2006: 100–119.

[57] CHU W, COLBOURN C J, DUKES P. Constructions for permutation codes in powerline communications[J]. Des. Codes Cryptogr., 2004, 32(1-3):51–64.

[58] COLBOURN C J, KLøVE T, LING A C H. Permutation arrays for powerline communication and mutually orthogonal Latin squares[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2004, 50(6):1289–1291.

[59] CHU W, COLBOURN C J, DUKES P. On constant composition codes[J]. Discrete Appl. Math., 2006, 154(6):912–929.

[60] HUCZYNSKA S, MULLEN G L. Frequency permutation arrays[J]. J. Combin. Des., 2006, 14(6):463–478.

[61] COSTELLO D J, FORNEY G D. Channel coding: The road to channel capacity[J]. PROCEEDINGS OF THE IEEE, 2007, 95(6):1150–1177.

[62] BOGDANOVA G T. Bounds for the maximum size of ternary constant-composition codes[C]// Proc. of the International Workshop on Optimal Codes. 1998: 15–18.

[63] BOGDANOVA G, OCETAROVA D. Some ternary constant-composition codes[C]// Proc. Sixth Int. Workshop Algebraic and Combinatorial Coding Theory. Pskov, Russia: 1998: 41–45.

[64] BOGDANOVA G T, KAPRALOV S N. Enumeration of optimal ternary codes with a given composition[J]. Problemy Peredachi Informatsii, 2003, 39(4):35–40.

[65] DING C, YIN J. Combinatorial constructions of optimal constant-composition codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2005, 51(10):3671–3674.

[66] DING C, YIN J. A construction of optimal constant composition codes[J]. Des. Codes Cryptogr., 2006, 40(2):157–165.

[67] HUCZYNSKA S. Equidistant frequency permutation arrays and related constant composition codes[J]. Des. Codes Cryptogr., 2010, 54(2):109–120.

[68] WEN B, WANG J, YIN J. Optimal grid holey packings with block size 3 and 4[J]. Des. Codes Cryptogr., 2009, 52(1):107–124.

[69] YAN J, YIN J. Constructions of optimal GDRP$(n, \lambda; v)$'s of type $\lambda^1\mu^{m-1}$[J]. Discrete Appl. Math., 2008, 156(14):2666–2678.

[70] YAN J, YIN J. A class of optimal constant composition codes from GDRPs[J]. Des. Codes Cryptogr., 2009, 50(1):61–76.

[71] YIN J, TANG Y. A new combinatorial approach to the construction of constant composition codes[J]. Sci. China Ser. A, 2008, 51(3):416–426.

[72] YIN J, YAN J, WANG C. Generalized balanced tournament designs and related codes[J]. Des. Codes Cryptogr., 2008, 46(2):211–230.

[73] DING C. Optimal constant composition codes from zero-difference balanced functions[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2008, 54(12):5766–5770.

[74] DING C, YIN J. Algebraic constructions of constant composition codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2005, 51(4):1585–1589.

[75] DING C, YUAN J. A family of optimal constant-composition codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2005, 51(10):3668–3671.

[76] DING Y. A construction for constant-composition codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2008, 54(8):3738–3741.

[77] CHEE Y M, GE G, LING A C H. Group divisible codes and their application in the construction of optimal constant-composition codes of weight three[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2008, 54(8):3552–3564.

[78] CHEE Y M, LING A C H, LING S, et al. The PBD-closure of constant-composition codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2007, 53(8):2685–2692.

[79] LUO Y, FU F W, VINCK A J H, et al. On constant-composition codes over Z_q[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2003, 49(11):3010–3016.

[80] SVANSTRÖM M. Constructions of ternary constant-composition codes with weight three[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2000, 46(7):2644–2647.

[81] LUO J, HELLESETH T. Constant composition codes as subcodes of cyclic codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2011, 57(11):7482–7488.

[82] WU H L, CHANG J C. Constructing constant composition codes via distance-increasing mappings[J]. SIAM J. Discrete Math., 2012, 26(1):375–383.

[83] SVANSTRÖM M, ÖSTERGÅRD P R J, BOGDANOVA G T. Bounds and constructions for ternary constant-composition codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2002, 48(1):101–111.

[84] GAO F, GE G. Optimal ternary constant-composition codes of weight four and distance five[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2011, 57(6):3742–3757.

[85] ROOM T G. A new type of magic square[J]. Math. Gazette, 1955, 39:307.

[86] WALLIS W D. A room square of side 257[C]// HOFFMAN F, LEVOW R B, THOMAS R S D. Proceedings of the Fourth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Utilitas Mathematica Pub 1973: 533.

[87] MULLIN R C, WALLIS W D. The existence of Room squares[J]. Aequationes Math., 1975, 13(1/2):1–7.

[88] RODGER C A. Linear spaces with many small lines[J]. Discrete Math., 1994, 129(1-3):167–180.

[89] GE G, ZHU L. Existence of almost resolvable directed 5-cycle systems[J]. Australas. J. Combin., 1995, 11:181–195.

[90] COLBOURN C J, STINSON D R, ZHU L. More frames with block size four[J]. J. Combin. Math. Combin. Comput., 1997, 23:3–19.

[91] ABEL R J R, BENNETT F E, GREIG M. PBD-closure[M]// COLBOURN C J, DINITZ J H. Handbook of Combinatorial Designs (Second Edition). Boca Raton: CRC Press, 2007: 247–254.

[92] LING A C H, ZHU X, COLBOURN C J, et al. Pairwise balanced designs with consecutive block sizes[J]. Des. Codes Cryptogr., 1997, 10(2):203–222.

[93] REES R, STINSON D R. On the existence of incomplete designs of block size four having one hole[J]. Utilitas Math., 1989, 35:119–152.

[94] GE G. Group divisible designs[M]// COLBOURN C J, DINITZ J H. Handbook of Combinatorial Designs (Second Edition). Boca Raton: CRC Press, 2007: 255–260.

[95] ABEL R J R, BROUWER A E, COLBOURN C J, et al. Mutually orthogonal latin squares (MOLS)[M]// COLBOURN C J, DINITZ J H. Handbook of Combinatorial Designs (Second Edition). Boca Raton: CRC Press, 2007: 160–193.

[96] DINITZ J H. Room squares[M]// COLBOURN C J, DINITZ J H. Handbook of Combinatorial Designs (Second Edition). Boca Raton: CRC Press, 2007: 584–590.

[97] STINSON D R. Some constructions for frames, Room squares, and subsquares[J]. Ars Combin., 1981, 12:229–267.

[98] DINITZ J H, STINSON D R. The construction and uses of frames[J]. Ars Combin., 1980, 10:31–53.

[99] GE G, LING A C H. Asymptotic results on the existence of 4-RGDDs and uniform 5-GDDs[J]. J. Combin. Des., 2005, 13(3):222–237.

[100] CHEN K, ZHU L. On the existence of skew Room frames of type t^u[J]. Ars Combin., 1996, 43:65–79.

[101] ZHANG X, GE G. On the existence of partitionable skew Room frames[J]. Discrete Math., 2007, 307(22):2786–2807.

[102] GE G, REES R. On group-divisible designs with block size four and group-type $6^u m^1$[J]. Discrete Math., 2004, 279(1-3):247–265.

[103] STINSON D R. The spectrum of skew Room squares[J]. J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 1981, 31(4):475–480.

[104] GE G. On $(g, 4; 1)$-difference matrices[J]. Discrete Math., 2005, 301(2-3):164–174.

[105] BROUWER A E, SCHRIJVER A, HANANI H. Group divisible designs with block-size four[J]. Discrete Math., 1977/78, 20(1):1–10.

个人简介

- 朱明志，男，浙江大学理学院数学系博士生，导师：葛根年。

- 通信地址：中国浙江省杭州市浙江大学玉泉校区数学系，310027。

- 联系方式：13645813740，mike_85@126.com

- 教育经历：

  2004.9–2008.6，武汉大学数学与统计学院，应用数学专业，理学学士

  2008.9–今，浙江大学理学院数学系，应用数学专业，理学博士，导师：葛根年，研究方向：组合设计及其应用。

- 研究兴趣：组合设计理论，编码理论及数学在实际中的相关应用

攻读博士学位期间主要研究成果

- 发表的文章

ZHU M, GE G. Room squares with super-simple property[J]. Des. Codes Cryptogr. online. DOI 10.1007/s10623-012-9746-7. http://dx.doi.org/10.1007/s10623-012-9746-7.

ZHU M, GE G. 4-*GDD(6^n)s and related optimal quaternary constant-weight codes[J]. J. Combin. Des., 2012, 20(12):509–526.

ZHU M, GE G. Quaternary constant-composition codes with weight 4 and distances 5 or 6[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2012, 58(9):6012–6022.

ZHU M, GE G. Mixed group divisible designs with three groups and block size 4[J]. Discrete Math., 2010, 310(17–18):2323–2326.