中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

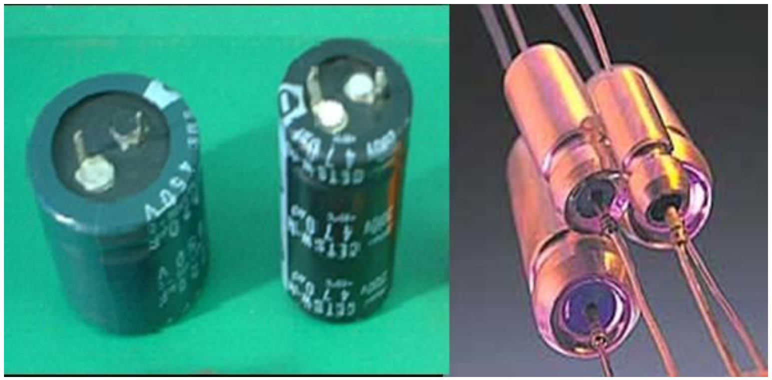
第5章　电容元件和电感元件

本章目录

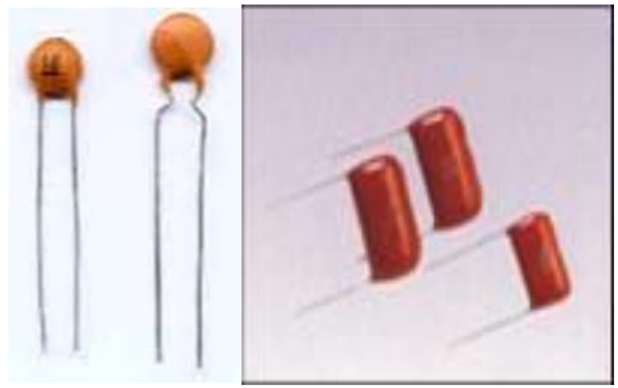
§5.1 电容元件

1 基本概念

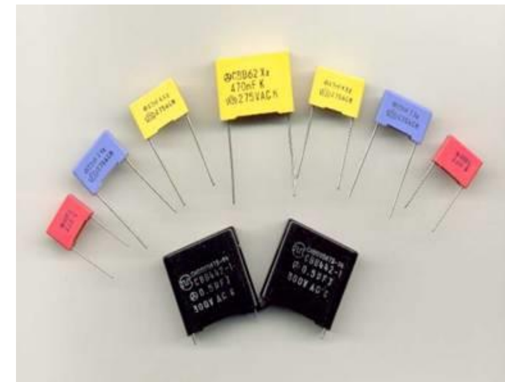
（1）实际电容器示例



电解电容器



瓷质电容器



聚丙烯膜电容器

图 5.1a 固 定 电 容 器

管式空气可调电容器

片式空气可调电容器

5.1b 可 变 电 容 器

（2）电容构成原理

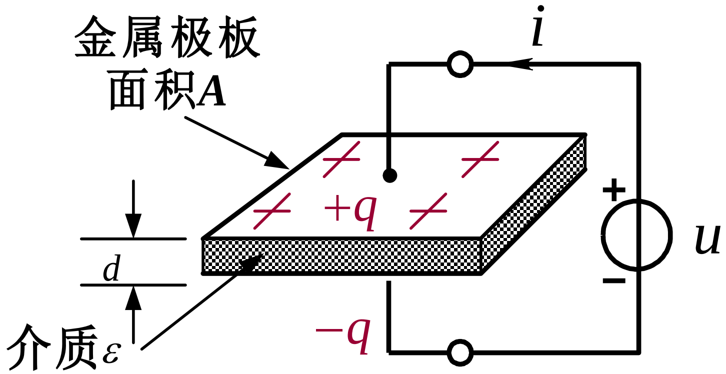


图5.2 电容的基本构成

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

（3）电容的电路符号

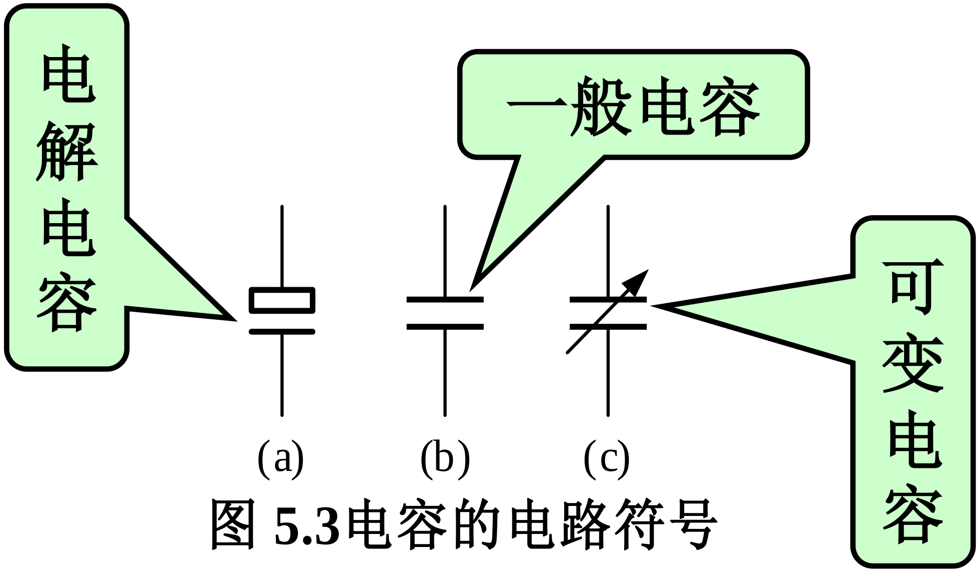


图 5.3电容的电路符号

2 线性电容定义

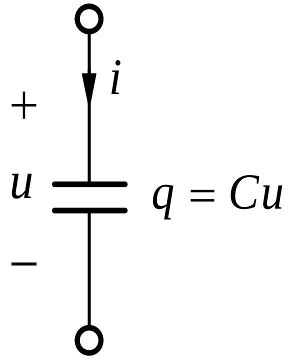
一个二端元件，在任一时刻，它的电荷q与端电压u成正比：

$$q = Cu$$

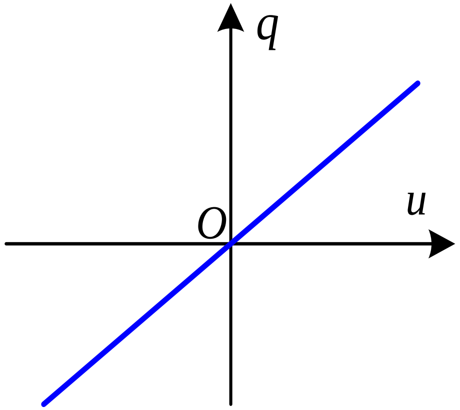
C:电容[系数]，单位：F(法拉)。
常用单位：μF(微法)，pF(皮法);
$1\mu F = 10^{-6}F, 1pF = 10^{-12}F$。

库伏特性曲线

在 u、q 取关联参考方向时，线性电容电荷、电压关系曲线（库伏特性曲线）如图所示。



(a)



(b)

§5.1 电容元件

3 线性电容的电压电流关系：

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow$$ （电容元件的VCR方程）

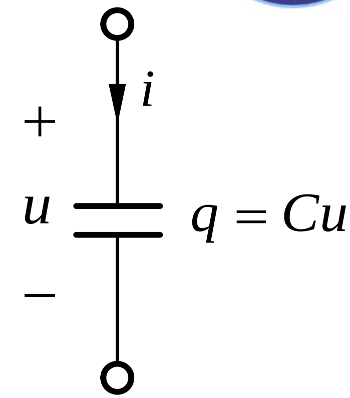


图5.4(a)

●物理意义：线性电容的端口电流并不取决于当前时刻电压，而与端口电压的时间变化率成正比，所以电容是一种动态元件。

用电流表示电压：

$$u(t)=\frac{q(t)}{C}=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

●物理意义：t 时刻电容上的电压决定于此时刻以前的全部电流，所以电容属于记忆元件。

4 电容的功率和能量

在关联参考方向下，输入线性电容端口的功率：

$$p = ui = Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

截止到 t瞬间，从外部输入电容的能量为：

$$w_e(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{t} Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi = C\int_{u(-\infty)}^{u(t)} u\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}Cu^2\Big|_{u(-\infty)}^{u(t)} = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(-\infty) = \frac{1}{2}Cu^2(t) = \frac{q^2}{2C}$$

电容吸收的总能量全部储存在电场中，没有产生能量损耗，所以电容是无损元件。

电容储能公式：$w_e(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)=\frac{q^2}{2C}$

当$|\boldsymbol{u(t)}|\uparrow$ → 储能↑ 也即吸收能量→吸收功率

当$|\boldsymbol{u(t)}|\downarrow$ → 储能↓ 也即释放能量→发出功率

从全过程来看，电容本身不能提供能量，电容是无源元件。

综上所述，电容是一种动态、记忆、储能、无损、无源元件。

例5.1图示电路，设 $C_1=0.5\mathrm{F}$，$C_2=0.25\mathrm{F}$，电路处于直流工作状态。计算两个电容各自储存的电场能量。

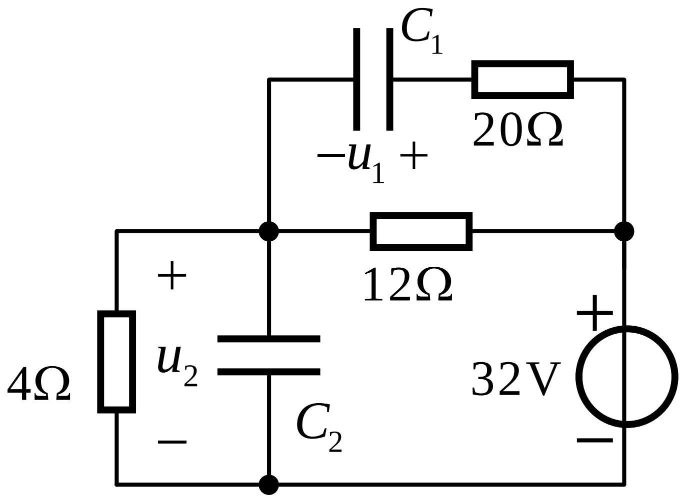


图 5.7

解 在直流电路中电容相当于开路，据此求得电容电压分别为

$$u_1=\frac{12\Omega}{(12+4)\Omega}\times 32\mathrm{V}=24\mathrm{V}$$

$$u_2=32\mathrm{V}-u_1=8\mathrm{V}$$

所以两个电容储存的电场能量分别为

$$w_1=\frac{1}{2}C_1u_1^2=144\mathrm{J}\quad;\qquad w_2=\frac{1}{2}C_2u_2^2=8\mathrm{J}$$

§ 5.1 电容元件

5 电容的串并联等效

（1）电容的并联等效

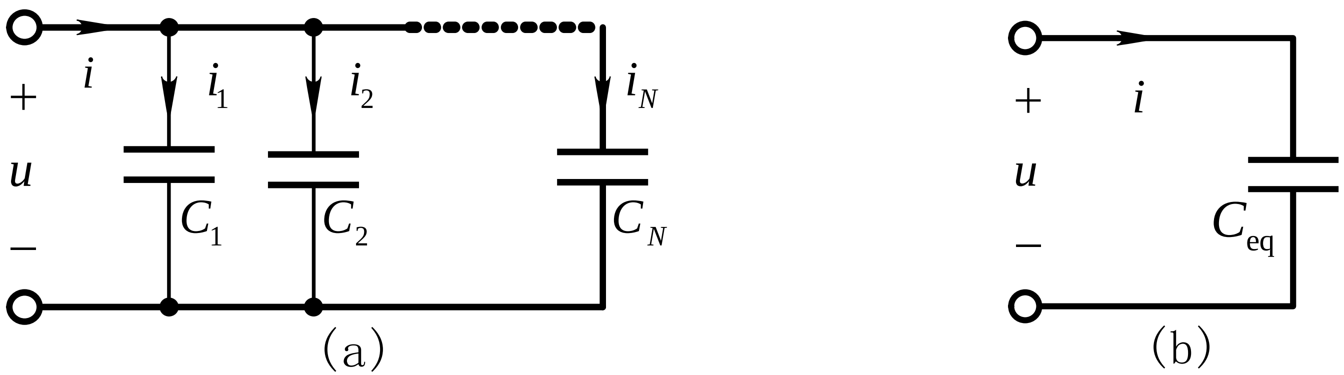


图 5.5 电容的并联等效

由于并联电容的总电荷等于各电容的电荷之和，即

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_N = (C_1 + C_2 + \cdots + C_N)u = C_{eq}u$$

所以并联等效电容等于各电容之和，等效电路如图 5.5(b)所示

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

§ 5.1 电容元件

（2）电容的串联等效

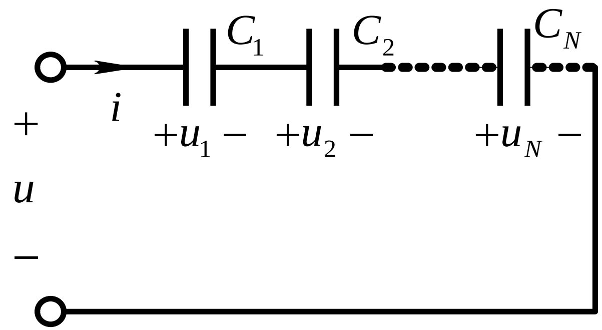


图5.6(a)电容的串联

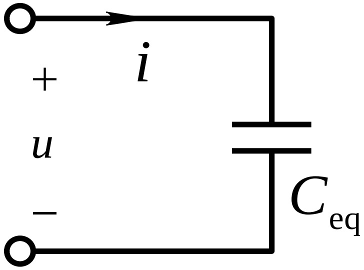


图5.6(b)等效电容

根据KVL及电容元件的*u*、*i*关系得:

$$u=u_1+u_2+\cdots+u_N=\frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)\mathrm{d}\xi+\cdots+\frac{1}{C_N}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_N})\int_{-\infty}^{t}i(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)d\xi$$

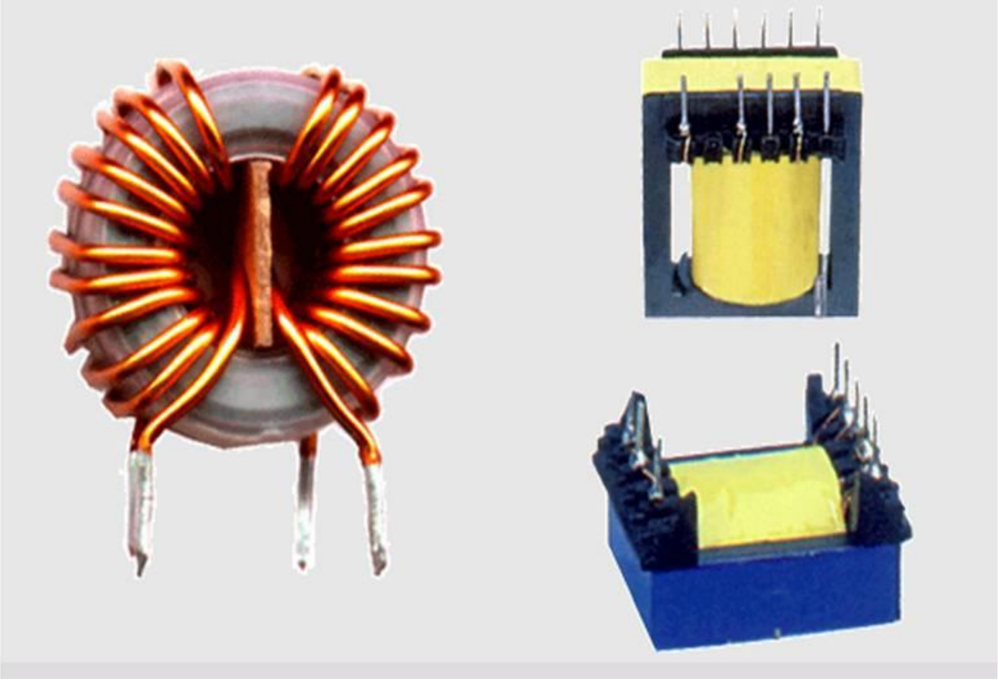
串联等效电容的倒数等于各电容的倒数之和。如图5.6(b)所示。

$$\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_N}$$

§ 5.2 电感元件

1 基本概念

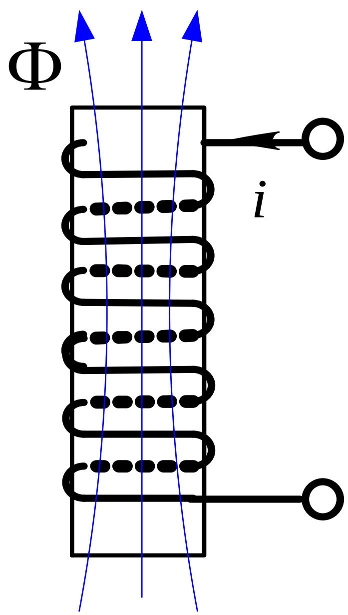
（1）实际电感线圈示例



§5.2 电感元件

（2）电感线圈原理

线圈中有电流 i 时，其周围即建立磁场，从而在线圈中形成与电流相交链的磁通 $\boldsymbol{\Phi}$，如图5.10所示。

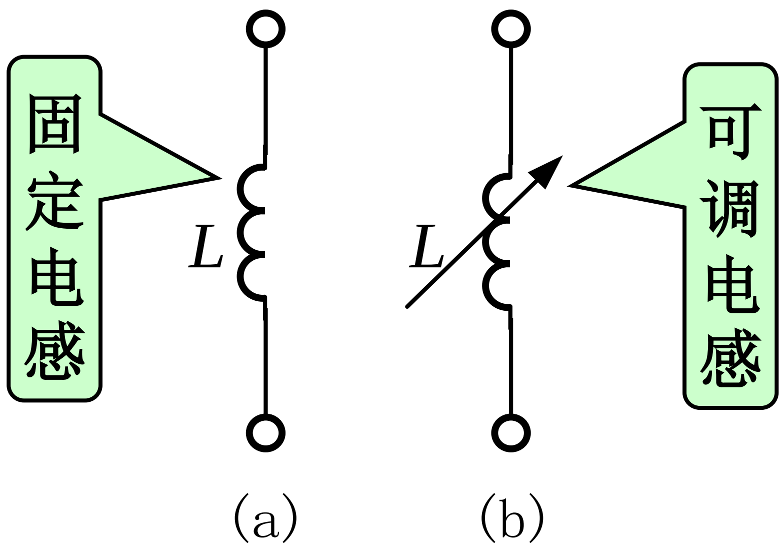


磁链ψ：磁通和

$\Psi = N\Phi$　单位：韦伯（**Wb**）

图5.10 电感线圈原理示意图

（3）电感的符号



2 线性电感定义

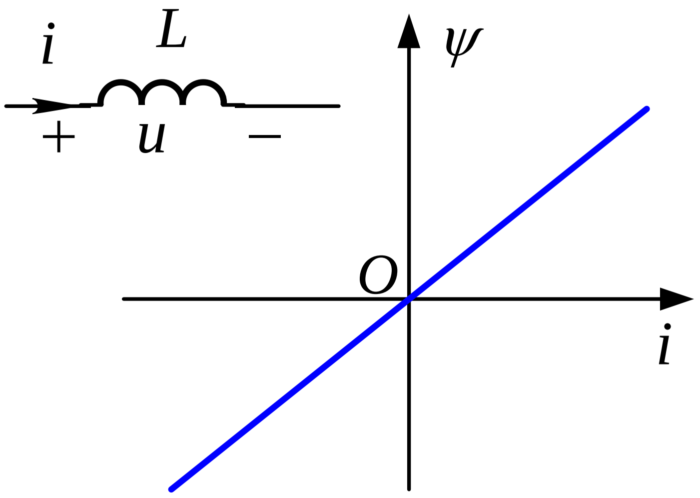
一个二端元件，在任一时刻，它的磁链 **Ψ**与电流 ***i*** 成正比：

$$\psi = Li$$

L:电感[系数]，单位:亨[利] (符号H)

韦安特性曲线

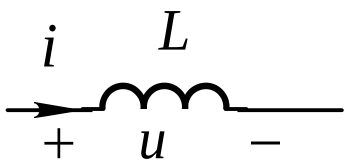
在电感的磁链与电流的参考方向符合右手螺旋法则时，线性电感磁链、电流关系曲线（韦安特性曲线）如图所示。



(c)

§5.2 电感元件

3 线性电感的电压电流关系：



$$u=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\quad\Longrightarrow$$ **（电感元件的VCR方程）**

即线性电感的端口电压与端口电流的时间变化率成正比，所以电感也属动态元件。

用电压表示电流：

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

上式表明，电感中某一瞬间的电流决定于此瞬间以前的全过程的电压，因此电感也属于记忆元件。

4 电感的功率和能量

线性电感吸收的功率为：

$$p = ui = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

截止到 t 时刻电感吸收的能量为:

$$w_{\mathrm{m}} = \int_{-\infty}^{t} p(\xi)\mathrm{d}\xi = L\int_{i(-\infty)}^{i(t)} i(\xi)\mathrm{d}i(\xi) = \frac{1}{2}Li^{2}\Big|_{i(-\infty)}^{i(t)}$$

$$= \frac{1}{2}Li^{2}(t) - \frac{1}{2}Li^{2}(-\infty) = \frac{1}{2}Li^{2}(t) = \frac{\psi^{2}}{2L}$$

上式说明电感吸收的总能量全部储存在磁场中，所以电感又是无损元件。

从全过程来看，电感本身不能提供能量，电感是无源元件。

5 电感的串并联

（1）电感的串联：

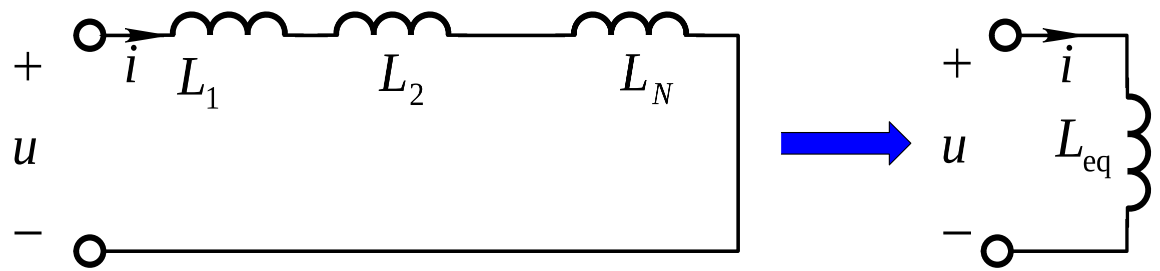


图5.12 电感的串联等效

等效电感等于各电感之和，即 $L_{eq}=L_1+L_2+\cdots+L_N$

（2）电感的并联：

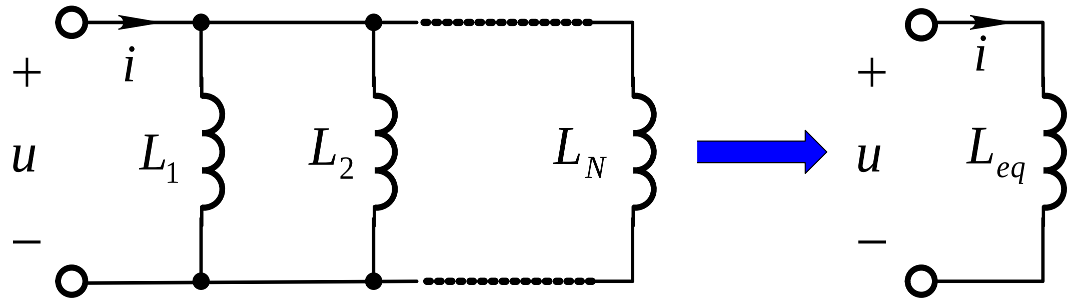
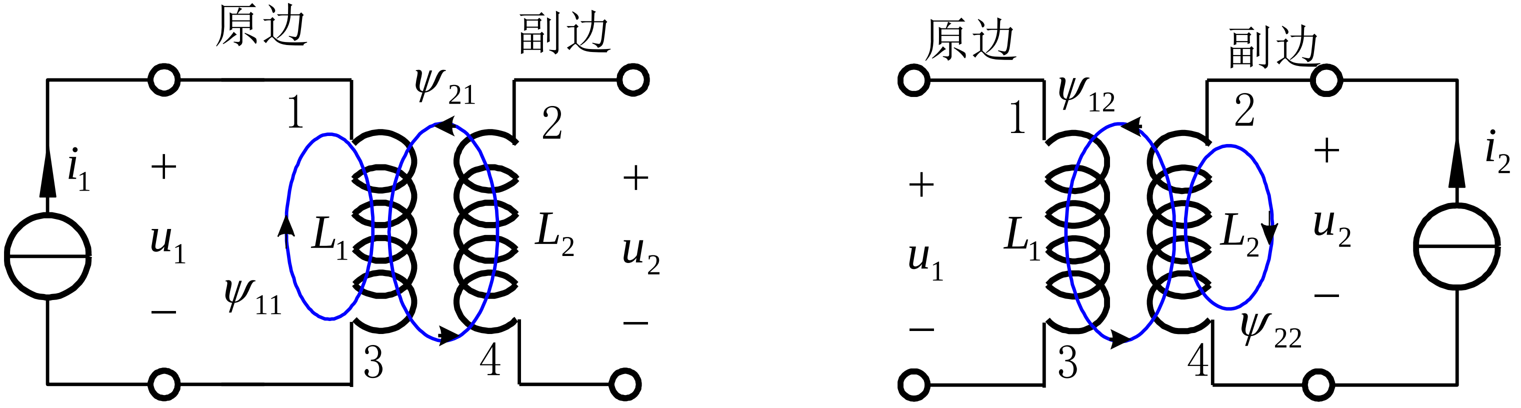


图5.13 电感的并联等效

等效电感的倒数等于各电感倒数之和，即 $\dfrac{1}{L_{eq}}=\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1}{L_2}+\cdots+\dfrac{1}{L_N}$

1 基本概念

当几个线圈之间存在着磁耦合，便形成了多端口电感。本节只讨论二端口电感，习惯上称为互感[元件]，如图5. 15所示。



(a)　　(b)

图5.15　两个线圈的磁耦合

	i_1	i_2
自感应磁链	ψ_{11}	ψ_{22}
互感应磁链	ψ_{21}	ψ_{12}

每一线圈的总磁链是自感磁链和互感磁链代数和。设电流与自感磁链的参考方向符合右手螺旋关系，则

$$\psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_{11} i_1 \pm L_{12} i_2$$

$$\psi_2 = \pm\psi_{21} + \psi_{22} = \pm L_{21} i_1 + L_{22} i_2$$

式中互感磁链前正负号，由自感磁链和互感磁链的方向而定，一致取 “ + ” ；否则取 “ – ”

L_{11}、L_{22} — 自感；简写成 L_1、L_2

L_{12}、L_{21} — 互感；一般实际线圈 $L_{12} = L_{21} = M$

简写成：

$$\psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2$$

$$\psi_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2$$

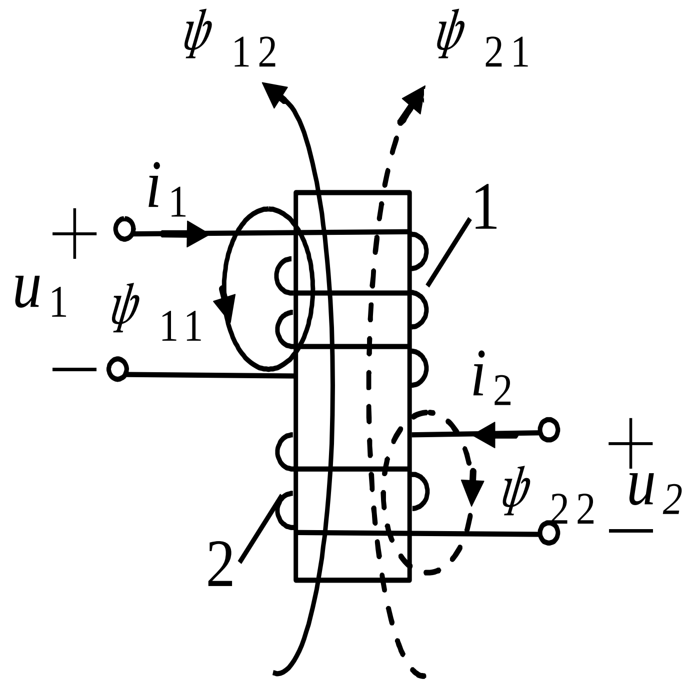


图 5.16a 互感

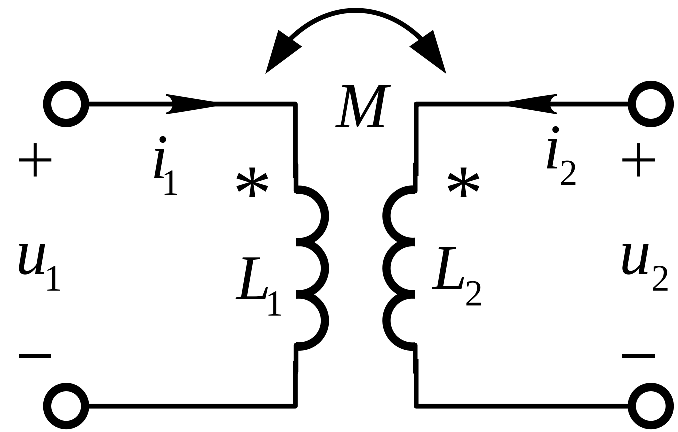


图5.16 b 互感元件的符号

在图5.16a中，可判断自感磁链和互感磁链的方向。

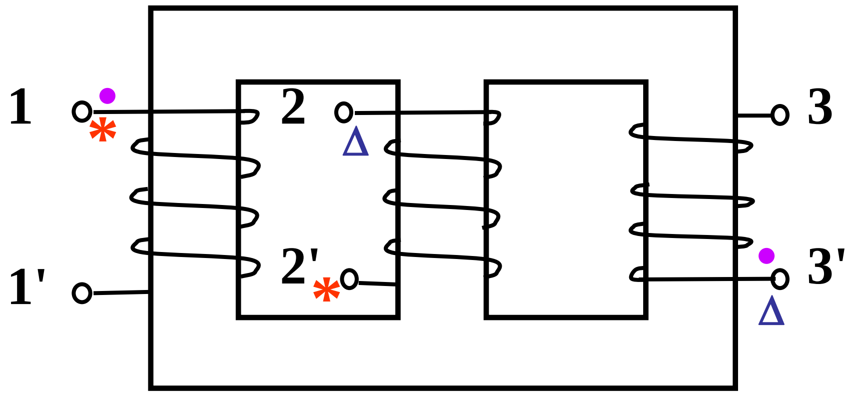
将实际线圈抽象成图5.16(b)所示的电路模型时，无法判断自感磁链和互感磁链的方向。

2 同名端：

当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入，所产生的磁场相互加强时，这两个对应端子称为同名端。

同名端用 “ * ” 表示。

例： 确定图示耦合线圈的同名端。



则1和2′、1和3′、2和3′互为同名端。

§ 5.3 耦合电感

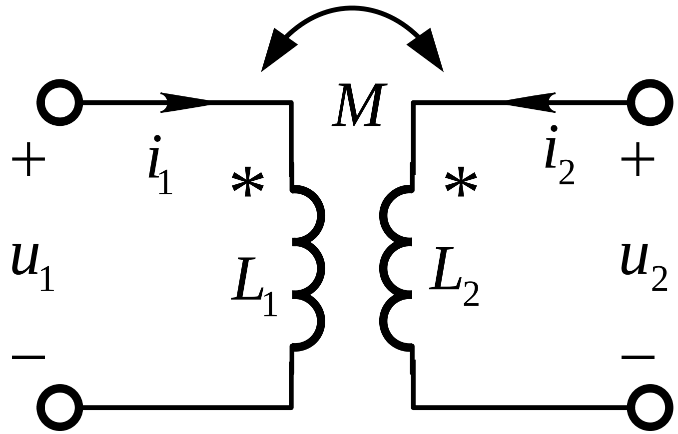


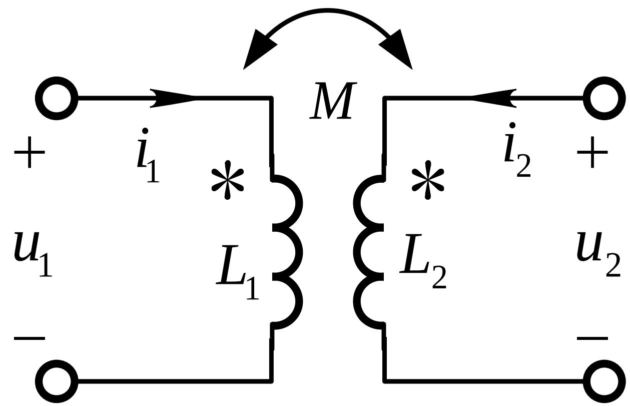
图5.16 b 互感元件的符号

当两个端口电流都流进（或流出）同名端，表示它们所激发的自感磁链和互感磁链方向一致，互感磁链前应取正号。

当两个电流的参考方向是从非同名端流入时，它们所激发的自感磁链与互感磁链方向相反，互感磁链前应取负号。

3 互感的电压电流关系

在端口电压、电流为关联参考方向，并且自感磁通与电流符合右手螺旋关系时，互感元件的电压电流方程为

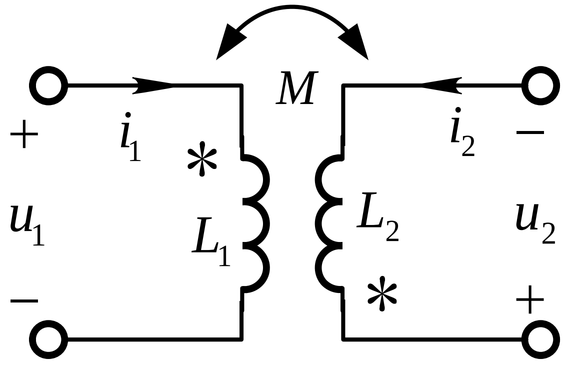


互感元件的符号

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} = L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = \dfrac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} = \pm M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

若式中 u_1、i_1 或 u_2、i_2 的参考方向相反，则 L_1 或 L_2 前应添入负号；若u_1、 i_2 或 u_2、 i_1 的参考方向相对星标 * 是相同的，则 M 前取正号，否则应取负号。

例1：列出图示两个互感元件的特性方程

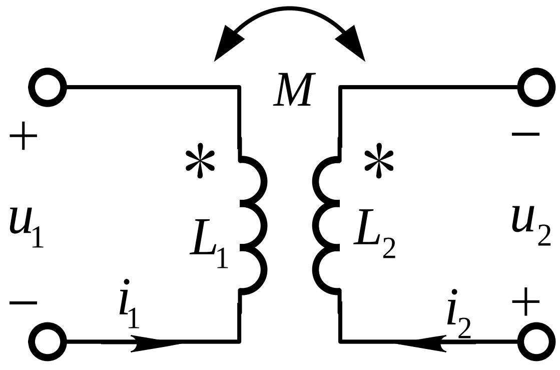


(a)

解：

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

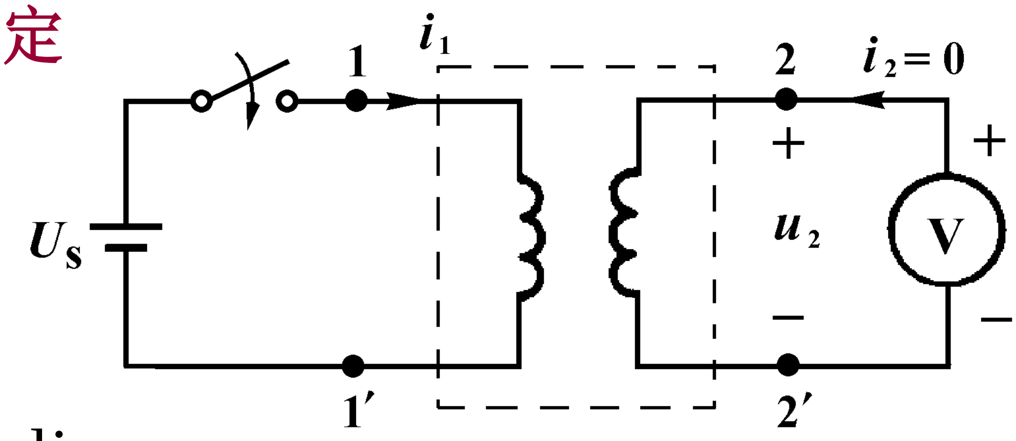


(b)

$$u_1 = -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

例2：同名端的实验测定



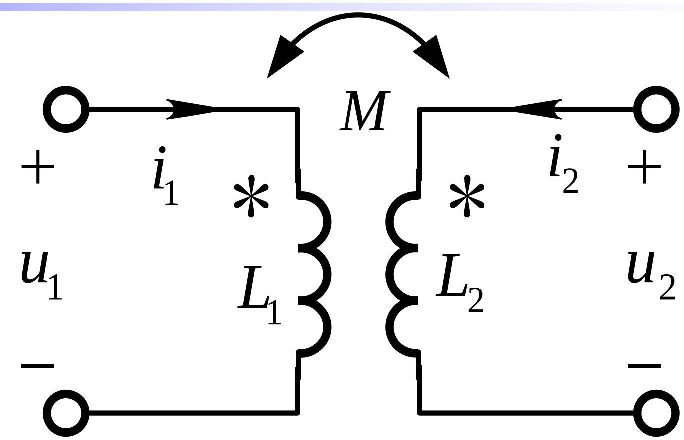
当开关闭合时： $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} > 0$

如果发现电压表指针正向偏转： $u_2 = M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} > 0$

说明 1和2是同名端。

当断开S时，如何判定？

4 互感的功率与能量



（1）功率

在关联参考方向下：

$$P = u_1 i_1 + u_2 i_2$$

$$= [L_1(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t) \pm M(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t)]i_1 + [\pm M(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t) + L_2(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t)]i_2$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_1 i_1^2) \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M i_1 i_2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_2 i_2^2)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2) = \frac{\mathrm{d}w_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$$

（2）能量

输入互感的总能量将全部转化为磁场能量，磁能

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \quad w_{\mathrm{m}} \geq 0$$

如果没有磁耦合，***M*=0**，磁能就是两个自感元件分别储能之和。存在磁耦合时，要增减一项$\boldsymbol{M i_1 i_2}$，增与减取决于互感的作用是使磁场增强还是使磁场减弱。

§ 5.3 耦合电感

5 含互感元件电路的联接

（1）互感元件的串联

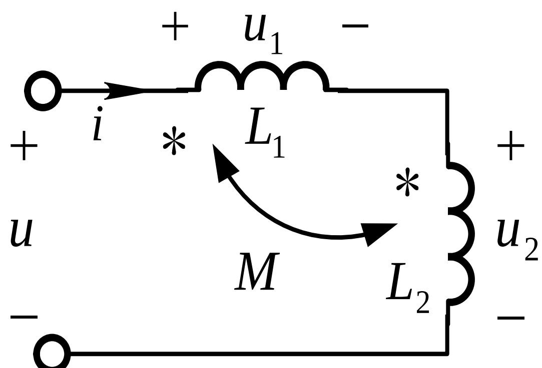


图5.18 a

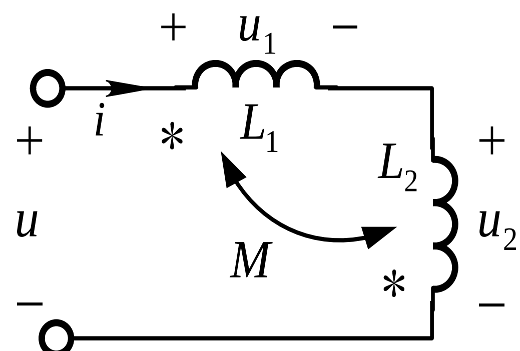


图5.18 b

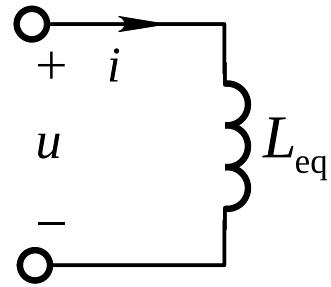


图5.18 c

电流从同名端流入 →正串(或顺接)

电流从异名端流入 →反串(或反接)

$$u = u_1 + u_2 = (L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \pm M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}) + (\pm M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}) = (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_{eq} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

由此可得串联等效电感如图5.18c所示，为 $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$

（2）互感元件的并联

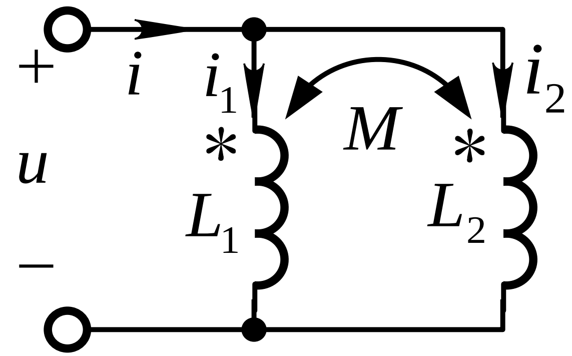


图5. 19(a) 互感两同名端并联电路

图5.19(a)表示两个同名端相接。为求其等效电路，分别列KCL和KVL方程：

$$u = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

$$u = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad (2)$$

$$i = i_1 + i_2 \qquad (3)$$

$$u = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

$$u = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad (2)$$

$$i = i_1 + i_2 \qquad (3)$$

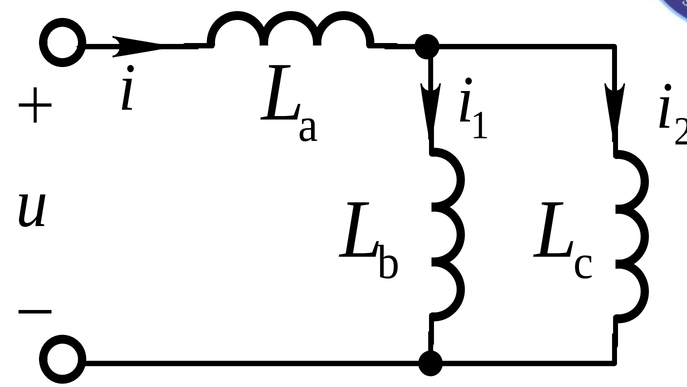


图5. 19(b)

（3）代入（1）得：$u = M \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (L_1 - M)\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_a \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_b \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$

（3）代入（2）得：$u = M \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (L_2 - M)\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_a \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_c \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$

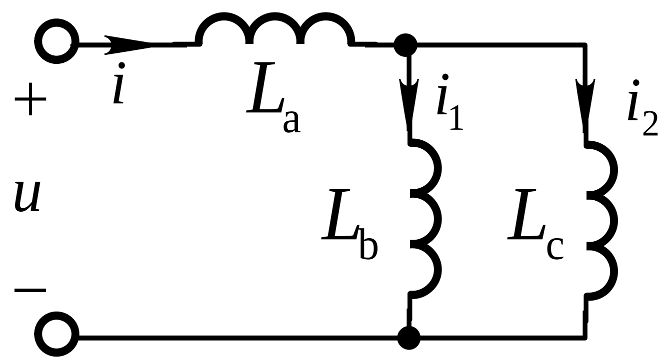
由此消去互感的等效电路如图5. 19(b)

图中各等效电感为

$$\left.\begin{aligned} L_a &= M \\ L_b &= L_1 - M \\ L_c &= L_2 - M \end{aligned}\right\} \quad (5.36)$$

§ 5.3 耦合电感

如无需计算电流 i_1、i_2，根据电感的串、并联等效，图5.19(b)可进一步等效成一个电感，如图5.19(c)，



(b)

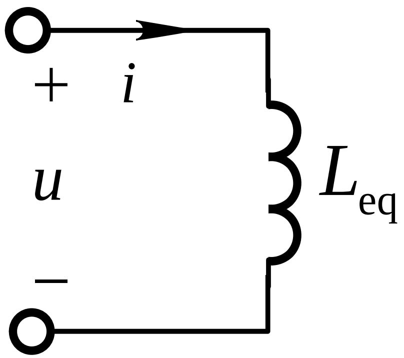


图5.19(c)

等效电感 $$L_{eq} = L_a + \frac{L_b L_c}{L_b + L_c} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

同理，异名端联接时的总等效电感为 $$L' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

（3）互感线圈的T型等效电路

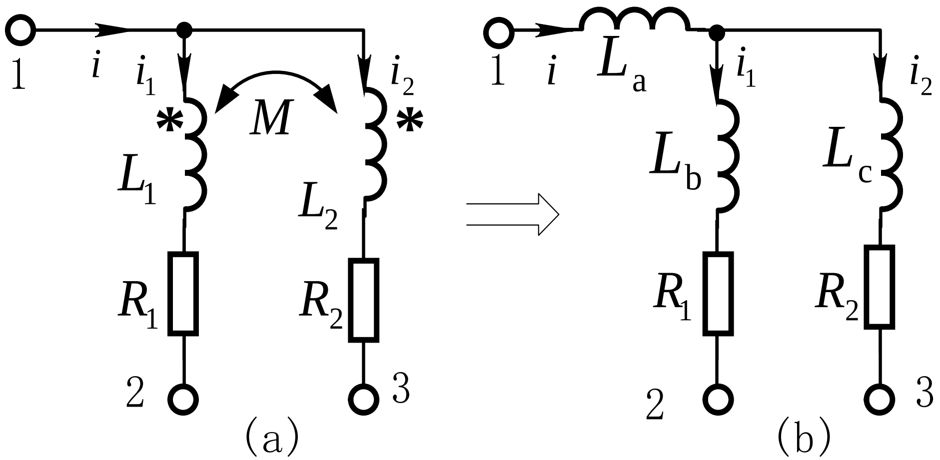


图5.20 互感的T型等效电路

在较接近实际的电路模型中两自感都含有串联电阻。

图5.20(b)中各等效电感为

$$\left.\begin{aligned} L_a &= M \\ L_b &= L_1 - M \\ L_c &= L_2 - M \end{aligned}\right\}$$

当公共端为异名端相接时，M<0；当公共端为同名端相接时，M>0

互感M的正负与电路中电流参考方向无关

6 耦合系数

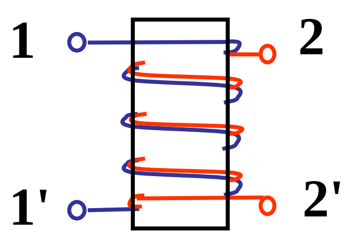
定义耦合系数 $k=\dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$ 用来衡量互感耦合的程度

对于实际的耦合线圈，无论何种联接关系，其等效电感均为正值。所以自感和互感满足如下关系

$$M\le\frac{1}{2}(L_1+L_2)\qquad M\le\sqrt{L_1L_2}$$

耦合系数满足 $k=\dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}\le 1$

$$0\le k\le 1\quad\begin{cases}k=0 & \text{两个线圈无耦合}\\ k=1 & \text{两个线圈全耦合}\end{cases}$$



$k\approx 1$

§ 5.4 理想变压器

1 理想变压器基本概念

理想变压器是实际电磁耦合元件的一种理想化模型，如图 5.22。

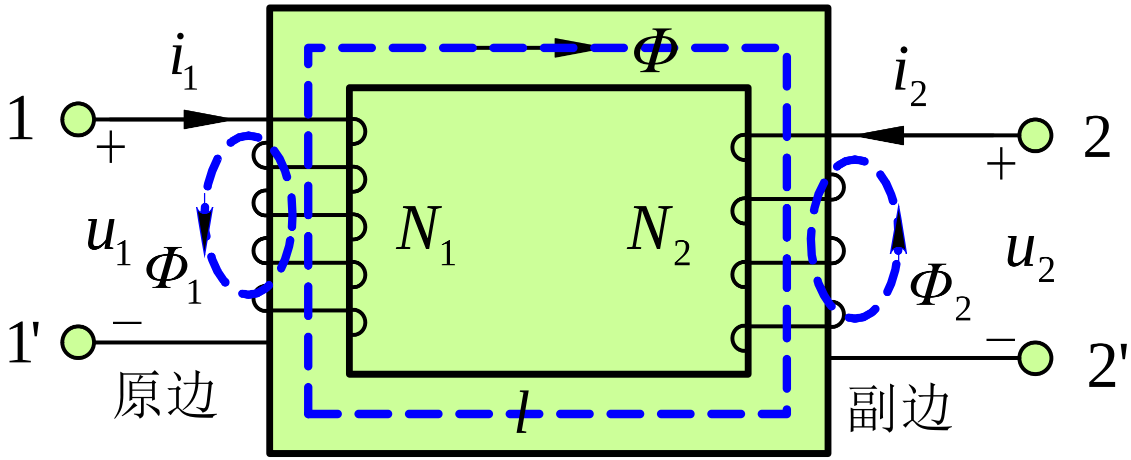


图5.22 变压器示意图

理想化认为

1) 铁心的磁导率 $\mu \to \infty$

2)每个线圈的漏磁通为零,即两个线圈为全耦合

3)线圈电阻为零, 端口电压等于感应电动势

4)铁心的损耗为零

相应有

$$\Psi_1 = N_1\Phi\,,\quad \Psi_2 = N_2\Phi$$

$$u_1 = \frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} = N_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,,\ u_2 = \frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} = N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$

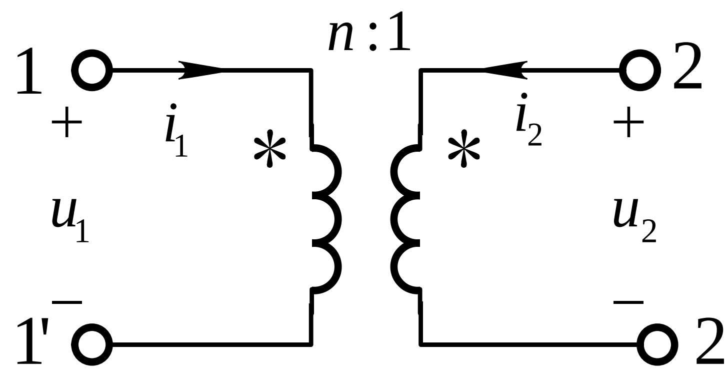


图5.23 理想变压器的符号

变比（匝数比）

由此得图5.23理想变压器的端口方程

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \text{ 或 } u_1 = n u_2 \qquad (5.45)$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n} \text{ 或 } i_1 = (-1/n)i_2 \qquad (5.47)$$

§ 5.4 理想变压器

理想变压器方程与 ***u***、***i*** 的参考方向和两线圈同名端位置有关，图 5.24 给出了一些同名端与理想变压器端口方程的关系示例。

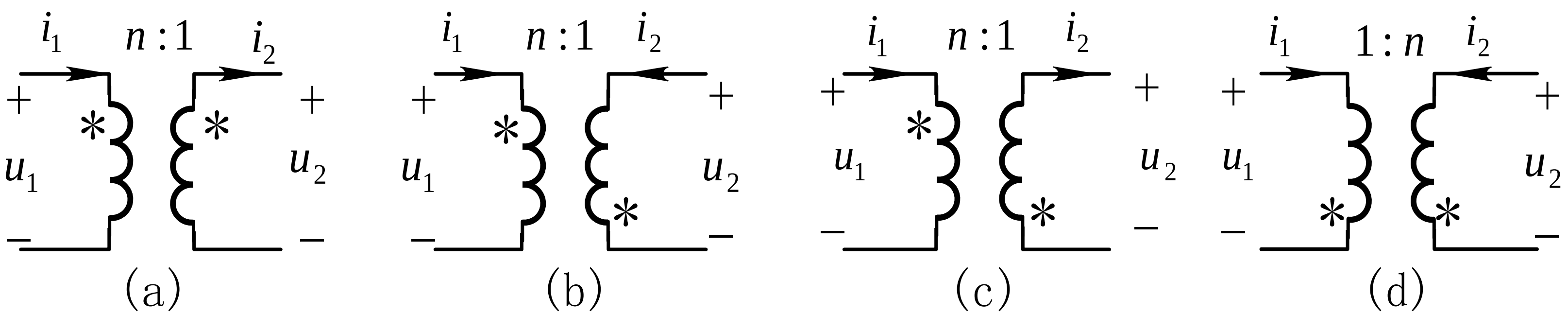


图5.24　同名端与理想变压器端口方程的关系示例

对应的特性方程分别为(注意符号)

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = \dfrac{1}{n} i_2 \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} u_1 = -nu_2 \\ i_1 = \dfrac{1}{n} i_2 \end{cases} \quad (b)$$

$$\begin{cases} u_1 = -nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases} \quad (c)$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{n} u_2 \\ i_1 = -ni_2 \end{cases} \quad (d)$$

2 理想变压器的性质

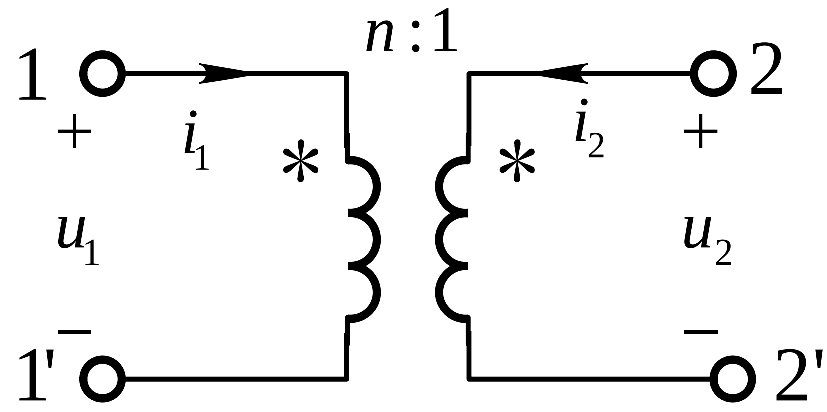


图5.23 理想变压器的符号

（1）功率性质

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (nu_2)(-\frac{i_2}{n}) + u_2 i_2 = -u_2 i_2 + u_2 i_2 = 0 \qquad (5.48)$$

说明：变压器元件不仅是无源的，而且每一瞬间输入功率等于输出功率，即传输过程中既无能量的损耗，也无能量的存储，属于非能元件。

（2）电阻变换性质

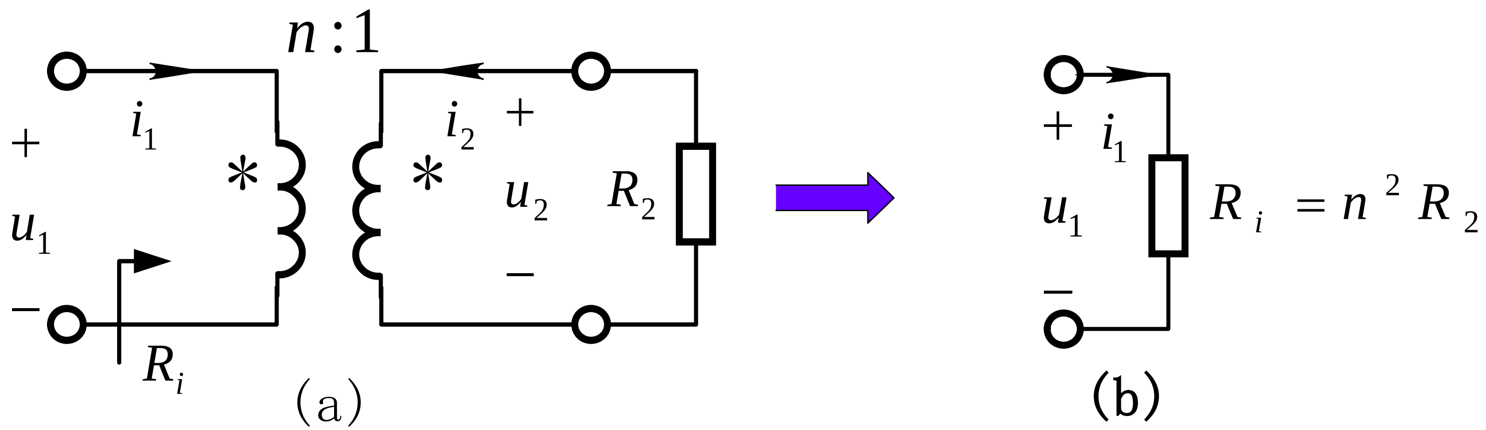


图 5.25 理想变压器的电阻变换

变压器输入端口等效电阻为

$$R_i = \frac{u_1}{i_1} = \frac{nu_2}{-i_2/n} = n^2 R_2$$

即当理想变压器输出端口接电阻 R_2 时，折算到输入端口的等效电阻为 $n^2 R_2$

小结

本节介绍电容元件、电感元件。它们是重要的储能元件。其端口电压、电流关系不是代数关系而是微分或积分关系，因此又称为动态元件。通过本章学习，应掌握电容元件、电感元件、互感元件的特性方程、能量计算及各种等效变换。此外还介绍理想变压器。