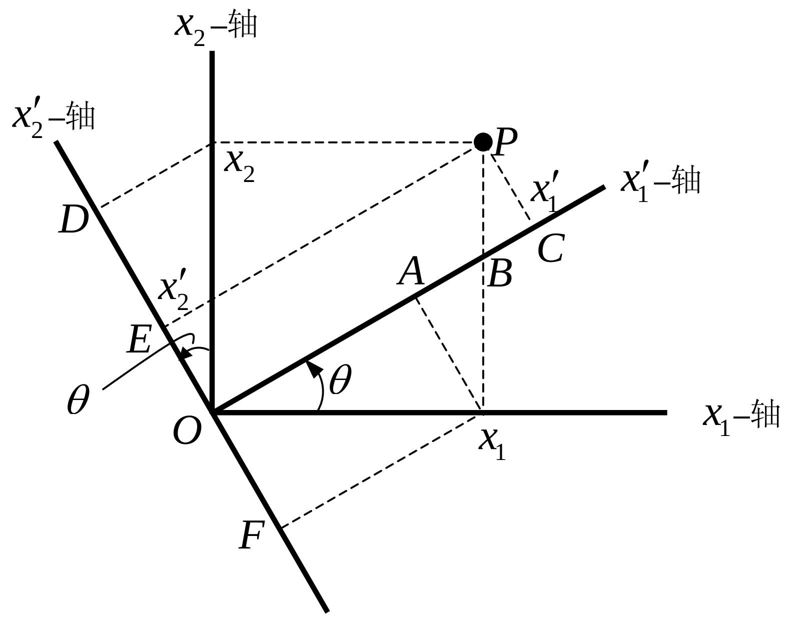
坐标变换

考虑三维空间中的一点P，在某个坐标系中P点的坐标为$\left(x_1, x_2, x_3\right)$。这里我们用$x_1$、$x_2$、$x_3$而不是$x$、$y$、$z$来标志坐标轴，主要是为了使得后面涉及求和运算的公式尽可能的简单，而且暂时我们只考虑笛卡尔坐标系。现在假设有一个新的坐标系，它由原来的坐标系作一个简单的转动得到。点P在新坐标系中的坐标记为$\left(x_1', x_2', x_3'\right)$。我们的问题是，这两组坐标间有什么联系？我们先考虑最简单的二维平面问题（如图）。



新的坐标x_1'等于x_1在x_1'–轴上的投影（OA）加上x_2在x_1'–轴上的投影（$AB+BC$），即

$$x_1' = x_1\cos\theta + x_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta$$

类似的，坐标x_2'等于两个投影之和：$x_2' = OD - DE$，但是这里DE也等于OF，因此

$$x_2' = x_1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + x_2\cos\theta = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$$

如果把x_i'–轴与x_j–轴之间夹角的余弦用下面的符号表示

$$\lambda_{ij} = \cos\left(x_i', x_j\right)$$

那么这两组坐标之间满足的关系可以写为

$$x_1' = \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2$$
$$x_2' = \lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2$$

推广到三维转动，我们有

$$x_i' = \lambda_{i1} x_1 + \lambda_{i2} x_2 + \lambda_{i3} x_3 = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} x_j, \quad i = 1,2,3$$

其反变换为

$$x_i = \lambda_{1i} x_1' + \lambda_{2i} x_2' + \lambda_{3i} x_3' = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ji} x_j', \quad i = 1,2,3$$

引入记号

$$\lambda = \left(\lambda_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

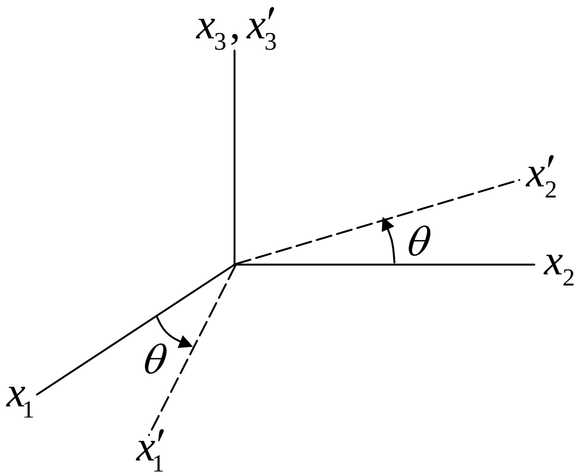
变换方程可以写为

$$\vec{x}' = \lambda \vec{x}, \quad \vec{x} = \lambda^T \vec{x}'$$

知道了两组坐标轴之间的方向余弦，那么任一点在两组坐标系中的坐标分量之间的关系就完全确定了。如此定义的矩阵称为变换矩阵，或者转动矩阵。其中第i行是新坐标系的x_i'轴相对于原来坐标系的三个方向余弦。

举一个例子，把一个坐标系绕着其第三个轴转动一个角度θ，此时空间任一点在新坐标系中的坐标由变换矩阵

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



所确定。这里是逆时针方向（右手法则）转动的。

变换矩阵的 9 个元素（9 个方向余弦）并不是完全独立的，其中一些可以由另外一些表示出来。实际上，9 个量中只有 3 个是独立的。这可以如下看出：从变换方程可以得到

$$\bar{x} = \lambda^T \bar{x}' = \lambda^T \lambda \bar{x}$$

这个方程对于空间中任意一点 P，从而对于任意三个数 x_i 都成立，因此

$$\lambda^T \lambda = I$$

类似的，可以得到

$$\lambda \lambda^T = I$$

它实际上也可以从第一个关系式推出，这个条件无非是讲矩阵是一个正交矩阵。写成分量形式就是

$$\lambda_{ik}\lambda_{jk} = \delta_{ij} = \lambda_{ki}\lambda_{kj}$$

9 个方向余弦之间满足 6 个关系，分别对应于(ij)取(11)、(22)、(33)、(12)、(13)和(23)。几何上这些关系来源于坐标系的三个坐标轴之间是相互垂直的，这样的坐标系称为正交系，而上面的条件称为正交性条件。

所以我们得到结论：每一个旋转都对应一个正交矩阵。那么反过来是否正确呢？也就是说，一个正交矩阵是否也与某个转动相联系呢？显然是这样的，只要把正交矩阵的第 i 行看作是新坐标系的 x_i' 轴相对于原来坐标系的三个方向余弦，那么这个正交矩阵就唯一地确定了一个直角坐标系，从而也就确定了从旧坐标系到新坐标系的转动。

但是，这里有一点小小的问题。正交矩阵的行列式可以取$+1$或者-1。后者如反演变换

$$\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

实际上，任何一个行列式等于-1的正交矩阵都可以由某个行列式等于$+1$的正

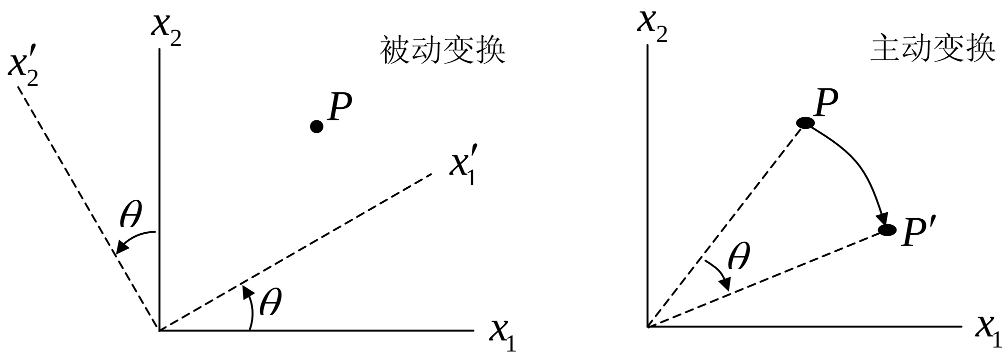
交矩阵乘上反演矩阵得到。而三维空间中的反演是不能通过简单旋转实现的（反演把右手系变为左手系，或者相反）。

值得指出的是：如果λ和μ都是特殊正交矩阵，它们分别对应于某个转动，那么$\lambda\mu$也对应于某个转动（因为也是正交矩阵），当然，$\mu\lambda$也对应于一个转动。但是，一般来讲，矩阵乘法是不满足交换律的，即$\lambda\mu \neq \mu\lambda$（通常说矩阵乘法是不可对易的），因此，转动通常也是不可交换的（如图）。

最后讲一点，前面我们讨论了坐标系旋转下，空间任何一点在新旧坐标系中的坐标分量是通过下式联系的

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} x_j$$

对于这同一个表达式，我们完全也可以从另一个角度加以解释：我们可以把坐标系看作是不动的，而是空间中的任一点（如P）按照相反的方向转过相同的角度得到一个新的点（如P'），那么点P'的坐标x_i'和点P的坐标x_j之间的联系也是由上式给出的。对旋转的这种看法称为主动的观点，而前面我们讨论的则是被动的观点。在数学上这两种观点式等价的，在物理上究竟采用哪种观点则要视具体情况而定，实际上，有时我们会同时采用这两种观点。



$$x_1' = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta$$
$$x_2' = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$