张量的定义

如果某个量在任一坐标系中由$\begin{cases} 1 = 3^0 \\ 3 = 3^1 \\ 9 = 3^2 \end{cases}$个分量描述，并且在坐标变换

$x_i' = \lambda_{ij} x_j$下，其中$\lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik}$，其分量如下变换：$\begin{cases} \phi' = \phi \\ A_i' = \lambda_{ij} A_j \\ T_{ij}' = \lambda_{ik}\lambda_{jl} T_{kl} \end{cases}$，则称

其为$\begin{cases} \text{标量} \\ \text{矢量} \\ \text{2 阶张量} \end{cases}$

类似地可定义更高阶的张量。标量又称为 0 阶张量，而矢量则又被称为 1 阶张量。矢量的分量变换规律与点的坐标的变换规律是相同的，我们可以将其用矩阵表示为

$$\vec{A}' = \lambda \vec{A}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}' = \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{pmatrix} \tag{1}$$

对于矢量除了用这里的列矩阵表示外，我们也经常用来 $\vec{A} = A_1\hat{x}_1 + A_2\hat{x}_2 + A_3\hat{x}_3 = A_i\hat{x}_i$。类似的，2 阶张量的分量变换规律也可以用矩阵表示为紧凑的形式：

$$T' = \lambda T \lambda^T \tag{2}$$

也就是说，2 阶张量在不同坐标系中的分量矩阵相差一个相似变换。对于更高阶的张量，通常我们都是用分量来表示的。

标量常见的例子如：质量、温度、圆周率、一个盒子中粉笔的数目，等等。最简单的矢量例子是粒子的位矢。下面举一个二阶张量的例子。

考虑一个线性映射T，它把任一矢量$\vec{A}$按照一定规则映射为另外一个矢量

$\vec{B}$，通常记为

$$T:\vec{A}\mapsto\vec{B}=T\left(\vec{A}\right) \tag{3}$$

这里线性是指$T\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=T\left(\vec{A}\right)+T\left(\vec{B}\right), T\left(a\vec{A}\right)=aT\left(\vec{A}\right)$。设在某一个坐标系中，$\vec{A}$用分量表示为$A_j\hat{x}_j$，由于映射是线性的，有

$$\vec{B}=T\left(\vec{A}\right)=T\left(A_j\hat{x}_j\right)=A_jT\left(\hat{x}_j\right) \tag{4}$$

由于$T\left(\hat{x}_j\right)$是某一个矢量，不妨设它在此坐标系中的第i个分量为T_{ij}，即$T\left(\hat{x}_j\right)=T_{ij}\hat{x}_i$，因此

$$\vec{B}=B_i\hat{x}_i=\left(T_{ij}A_j\right)\hat{x}_i \tag{5}$$

或者

$$B_i=T_{ij}A_j, \quad \left(\vec{B}=T\vec{A}\right) \tag{6}$$

我们有理由把T_{ij}称为线性映射T在相应坐标系中的分量，因为它完全确定了T对任何一个矢量的作用。下面我将证明T确实是一个二阶张量，也就是说，其分量满足相应的变换规律。假设有一个新的坐标系，它与原来坐标系由某个正交矩阵λ相联系$x_i'=\lambda_{ij}x_j$，在此坐标系中，矢量$\vec{B}$的分量矩阵为

$$\vec{B}'=\lambda\vec{B}=\lambda T\vec{A}=\left(\lambda T\lambda^T\right)\left(\lambda\vec{A}\right)=T'\vec{A}' \tag{7}$$

也就是说，在新的坐标系中映射T的分量矩阵为

$$T'=\lambda T\lambda^T \tag{8}$$

因此，所有从矢量到矢量的线性映射都是一个 2 阶张量。

最简单的线性映射是恒等映射$I:\vec{A}\to I\left(\vec{A}\right)=\vec{A}$，显然在任一坐标系中其分量矩阵都是单位矩阵$I_{ij}=\delta_{ij}$；主动意义下的转动也是这样一个线性映射，因此它也是一个二阶张量；后面我们还会看到，惯量张量将角速度映射为角动量，它也是一个 2 阶张量，而电磁学中的极化张量则将电场映射为极化强度。再比如矢量在空间某个方向$\hat{n}$上的投影$T:\vec{A}\mapsto\hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{A}\right)$。其分量为

$$T_{ij} = n_i n_j \tag{9}$$

如果在某个坐标系中$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$，那么

$$T = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{sin}} \tag{10}$$

在这里我们看到，$T_{ij} = T_{ji}$，而且你不难证明，如果一个张量的分量在某一坐标系中关于两个指标交换是不变的，那么这个性质在所有坐标系中也都是成立的，我们将这样的张量称为对称张量。类似的，如果$T_{ij} = -T_{ji}$，那么称张量是反对称的。一个有意思的结论是：反对称张量的独立分量个数则只有 3 个，恰好等于矢量分量的数目。实际上，这三个分量是可以构成一个矢量的，也就是说，它们与矢量的三个分量的变换规律（几乎）一样。为了看出这一点，我们引入一个很有用的记号：排列符号ε_{ijk}，其定义如下

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ is an even permutation of } (123) \\ -1 & (ijk) \text{ is an odd permutation of } (123) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{11}$$

它关于任意两个指标的交换都是反对称的

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj} \tag{12}$$

由排列符号的定义可知

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1 \\ \varepsilon_{122} &= \varepsilon_{222} = \varepsilon_{212} = 0, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

排列符号是一个很重要的性质，由定义可知

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ is an even permutation of } (lmn) \\ -1 & (ijk) \text{ is an odd permutation of } (lmn) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{13}$$

由此可得到排列符号的一些常用性质

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm}\end{vmatrix}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\\
&\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}=\delta_{il}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{jl}=3\delta_{il}-\delta_{il}=2!\delta_{il}\\
&\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2!\delta_{ii}=3!
\end{aligned}
\tag{14}
$$

此外，排列符号的另一些性质涉及行列式的计算，其中最常见的是下面两个关系式：

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}=\varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}=\det\lambda\\
&\varepsilon_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn}=\varepsilon_{lmn}\det A
\end{aligned}
\tag{15}
$$

这里A是某个3×3矩阵。

现在假设T是一个反对称张量，即$T_{ij}=-T_{ji}$，那么$C_i=\varepsilon_{ijk}T_{jk}$在新的坐标系中的分量就是

$$
\begin{aligned}
C_i'&=\varepsilon_{ijk}T_{jk}'=\varepsilon_{ijk}\lambda_{jm}\lambda_{kn}T_{mn}\\
&=\left(\det\lambda\right)\lambda_{il}\varepsilon_{lmn}T_{mn}=\left(\det\lambda\right)\lambda_{il}C_l
\end{aligned}
\tag{16}
$$

我们看到，与通常的矢量定义相比，这里多出了一个因子$\det\lambda$，其含义是：对于转动变换，C_i与矢量分量的变换规律相同，而对于空间反演，则多出了一个符号。我们将这样的矢量称为赝矢量，或物理上更经常地将其称为轴矢量，而有时也将像位矢这样真正的矢量称为极矢量。