转动矩阵的几何意义

前面坐标变换一节中我们知道：转动与特殊正交矩阵是一一对应的。既然如此，那么对于任意给定的某一特殊正交矩阵（如λ），从它（代数概念）我们就应该可以知道有关转动（几何概念）的所有特征，譬如，这个矩阵能够告诉我们它所对应的转动绕着什么轴转过多大的角度。

从主动的观点考察这个问题会直观一些。我不加证明的给出特殊正交矩阵的一些性质：设λ是给定转动在某个坐标系（如$x_1x_2x_3$）中的矩阵（也就是说他是一个行列式等于 1 的正交矩阵，当然我们还要求它的元素都是实数），那么

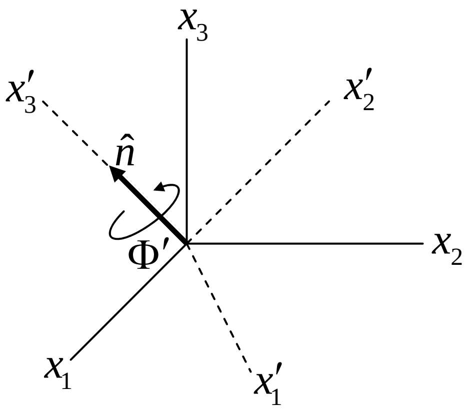
1. λ的本征值之模为1。
2. λ至少有一个本征值为$+1$，不妨令$\lambda_3=+1$，其归一化本征矢记为$\hat{n}$；另外两个本征值必可写为$\lambda_1=\exp(i\Phi)$和$\lambda_2=\exp(-i\Phi)$的形式。

从这些代数性质我们就可以得到下面的结论：

$\hat{n}$在λ代表的转动的转动轴上；Φ是转动角度的大小。

第一个结论是因为$\hat{n}$是λ的本征矢，$\lambda\hat{n}=\hat{n}$，它的几何意义是这个矢量在转动下是不变的，因此$\hat{n}$只能在转动轴上；对于第二个结论，我们可以这样来理解，假设这个转动表示所有矢量绕着$\hat{n}$轴转过一个角度Φ'（如图），我前面讲过主动意义下的转动是一个2阶张量，而λ则是这个张量在给定坐标系$x_1x_2x_3$中的分量矩阵。现在我们取一个新的坐标系$x_1'x_2'x_3'$，使其x_3'轴沿着$\hat{n}$的方向。当然，新坐标系可由原来坐标系作一个转动得到，不妨设转动矩阵为μ，即$x_i'=\mu_{ij}x_j$。在新坐标系中这个张量的分量是我们已经知道了的，它就是

$$\lambda'=\begin{pmatrix}\cos\Phi' & -\sin\Phi' & 0\\ \sin\Phi' & \cos\Phi' & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\tag{1}$$



$$x_i' = \mu_{ij} x_j$$

$$\lambda' = \begin{pmatrix} \cos\Phi' & -\sin\Phi' & 0 \\ \sin\Phi' & \cos\Phi' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mu\lambda\mu^T$$

而我们前面知道，2阶张量在不同坐标系中的分量相差一个相似变换，因此

$$\lambda' = \mu\lambda\mu^T \tag{2}$$

两边求迹便得到了我们的结论：

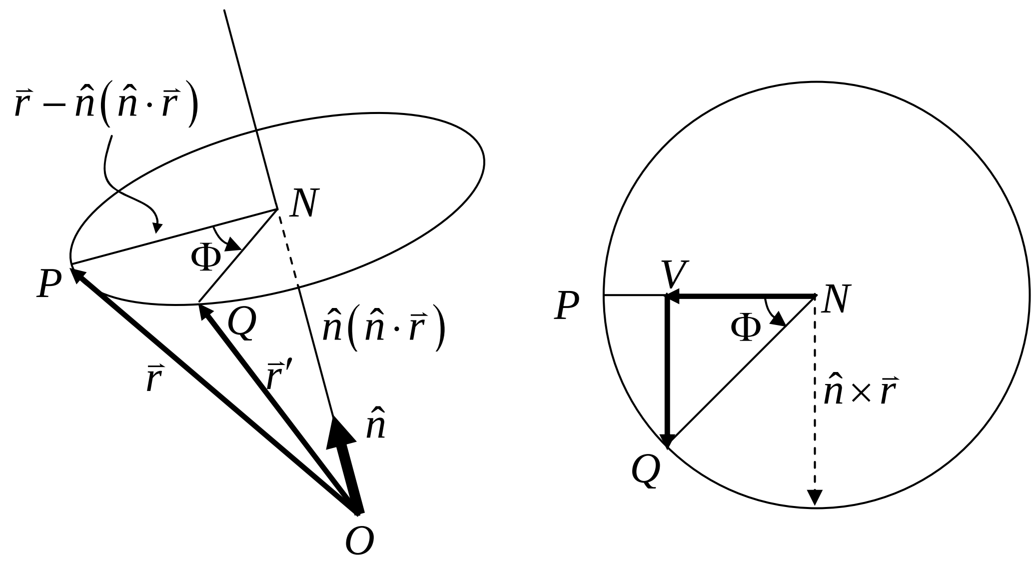
$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{tr}\,\lambda' & = & \mathrm{tr}\left(\mu\lambda\mu^T\right) & = & \mathrm{tr}\left(\mu^T\mu\lambda\right) & = & \mathrm{tr}\,\lambda \\ \| & & & & & & \| \\ \lambda'_{ii} & & & & & & \sum_{i=1}^{3}\lambda_i \\ \| & & & & & & \| \\ 1+2\cos\Phi' & & & = & & & 1+2\cos\Phi \end{array} \tag{3}$$

最后还有一个小小的问题没有解决，上面的分析实际上只能告诉我们转动轴所在的直线和转动角度的大小，仅仅这些还不能完全确定转动。实际上，这时有四种可能的转动：①绕$\hat{n}$轴转动Φ，②绕$\hat{n}$轴转动$-\Phi$（即绕$\hat{n}$轴顺时针转动Φ），③绕$-\hat{n}$轴转动Φ，以及④绕$-\hat{n}$轴转动$-\Phi$（即绕$-\hat{n}$轴顺时针转动Φ）。其中①和④、②和③实际上分别对应同一个转动。那么，λ究竟对应绕着$\hat{n}$轴还是绕着$-\hat{n}$轴逆时针转动角度Φ呢？这一点需要考察矩阵的具体形式才能回答，而无法通过本征值问题得到答案。事实上，当你把转动矩阵化为前面λ'的形式，那么就可以根据λ_{12}（或者λ_{21}）的正负号回答这个问题了。在习题中我请你思考另外一种更加简便的方法来确定转动角度的大小以及转动轴（连同其方向）。

下面我们用几何观点看一下一个矢量$\vec{r}$在绕着$\hat{n}$轴（逆时针方向）转动角度Φ后得到的新矢量$\vec{r}'$是什么。（也就是说，我们想知道如何用$\vec{r}$以及$\hat{n}$和Φ把$\vec{r}'$表示出来，当然，代数上它就是$\vec{r}'=\lambda\vec{r}$）。通过简单的几何分析可知：$\overrightarrow{OQ}$可以分解为相互垂直的两部分$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NQ}$，而$\overrightarrow{ON}$就是$\vec{r}'$（或者$\vec{r}$）在$\hat{n}$方向上的投影：$\overrightarrow{ON}=\hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)$。至于$\overrightarrow{NQ}$，我们也把它分解为相互垂直的两部分：$\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NV}+\overrightarrow{VQ}$，其中$\overrightarrow{NV}=\overrightarrow{NP}\cos\Phi$，而$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}=\vec{r}-\hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)$，另外一项$\overrightarrow{VQ}=\hat{n}\times\vec{r}\sin\Phi$。因此

$$\begin{aligned}\vec{r}'&=\hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)+\left[\vec{r}-\hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)\right]\cos\Phi+\hat{n}\times\vec{r}\sin\Phi\\&=\vec{r}\cos\Phi+\hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)\left(1-\cos\Phi\right)+\hat{n}\times\vec{r}\sin\Phi\end{aligned}\tag{4}$$

此式称为转动公式。前面我们提到过，一般来说，两次转动是不可交换的，你也可以从这个关系式看出这一点。



但是，对于一类特殊的转动，也就是当转动角度无限小时，任何两次相继的转动却是可以交换的。此时转动公式变为

$$\vec{r}'=\vec{r}+\hat{n}\times\vec{r}d\Phi\tag{5}$$

这里，我们用$d\Phi$代替Φ表示这是一个无限小的角度，并在转动公式右边只保留一阶项。你一定注意到了，这里我用的是“＝”而不是“≈”，事实上，这正

是“无限小”或者说微分的确切含义。

显然如果把一个矢量先绕着$\hat{n}_1$轴转过一个无限小角度$d\Phi_1$，再绕着另一个轴$\hat{n}_2$转过另一个无限小角度$d\Phi_1$与交换两次转动次序后得到的是相同的矢量。

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + \hat{n}_1 \times \vec{r} d\Phi_1 \\ \vec{r}'' &= \vec{r}' + \hat{n}_2 \times \vec{r}' d\Phi_2 = \left(\vec{r} + \hat{n}_1 \times \vec{r} d\Phi_1\right) + \hat{n}_2 \times \left(\vec{r} + \hat{n}_1 \times \vec{r} d\Phi_1\right) d\Phi_2 \\ &= \vec{r} + \hat{n}_1 \times \vec{r} d\Phi_1 + \hat{n}_2 \times \vec{r} d\Phi_2 \\ &= \vec{r} + \hat{n}_2 \times \vec{r} d\Phi_2 + \hat{n}_1 \times \vec{r} d\Phi_1 \end{aligned} \tag{6}$$

倒数第二个等号又用到了无限小这个假设。因此，我们经常讲无限小转动可以用一个矢量$\hat{n} d\Phi$来表示，从而我们可以把无限小转动公式写为

$$d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = d\vec{\Phi} \times \vec{r}, \quad d\vec{\Phi} \equiv \hat{n} d\Phi \left(= \overline{d\Phi}\right) \tag{7}$$

应该强调的是，这里尽管我们采用了符号$d\vec{\Phi}$，但它并不表示某个角度矢量$\vec{\Phi}$的微分，实际上并不存在这样的矢量，其确切含义是$\hat{n} d\Phi$。严格地讲，我们应该把它写成$\overline{d\Phi}$，而用$d\vec{\Phi}$表示仅仅是人们的一种喜好。另外，值得指出的是，上面的论述绝对不是无限小转动$\hat{n} d\Phi$是矢量的证明，要证明这一点，必须从矢量的定义出发。严格地讲，量$\hat{n} d\Phi$是一个赝矢量，也就是说无限小转动事实上是用一个 2 阶反对称张量来表示的。

如果我们把公式(7)两边除以dt，那么就得到

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\Phi}}{dt} = \hat{n} \frac{d\Phi}{dt} \tag{8}$$

从前面的推到知，这个关系式对于任何运动过程中保持长度不变的矢量都是成立的，因此，一般地，我们有

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \text{if } \left|\vec{\mathrm{G}}\right| = \text{const.} \tag{9}$$

附录 A：特殊正交矩阵λ的本征值之模为1

设a是λ的本征值（a可能是复数），而X则是相应的本征矢，即

$$\lambda X = aX \tag{A1}$$

将此式两边分别作共轭转置，得到

$$X^{\dagger}\lambda^{\dagger} = X^{\dagger}a^{\dagger} \tag{A2}$$

注意到λ是实正交矩阵，因而$\lambda^{\dagger} = \lambda^{T}$；而$a$则仅仅是一个数，因此$a^{\dagger} = a^{*}$。上式成为

$$X^{\dagger}\lambda^{T} = X^{\dagger}a^{*} \tag{A3}$$

将此式左乘(A1)，并利用λ的正交性（$\lambda^{T}\lambda = 1$），就得到

$$\left(|a|^{2} - 1\right)X^{\dagger}X = 0 \tag{A4}$$

因此

$$|a| = 1 \tag{A5}$$

即λ的本征值之模为1。

附录 B：特殊正交矩阵λ的三个本征值$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$必具有$(\exp(i\Phi),\exp(-i\Phi),+1)$的形式，即至少有一个本征值为$+1$，而另外两个本征值则互为共轭。

这是由于本征值方程$\det(\lambda - aI) = 0$是一个三次代数方程，它一般可以写为$a^{3} + f_{2}a^{2} + f_{1}a + f_{0} = 0$的形式，其中$f_0$、$f_1$、$f_2$是一些实常数。对于这样一个代数方程，我们知道如果它有三个根，而这三个根要么都是实数，要么如果有一个复数根的话，那么这个根的复共轭也仍然是方程的一个根。因此在我们的情形，本征值方程最多有两个互为共轭的复数根，另外一个根必为实数。考虑到λ的本征值之模为1并且λ的行列式（等于三个本征值的乘积），我们就

得出结论，如果这三个根都是实数，那么它只可能取$\left(+1,+1,+1\right)$或$\left(-1,-1,+1\right)$。如果有一个根是复数，那么本征值就只可能是$\left(\exp\left(i\Phi\right),\exp\left(-i\Phi\right),+1\right)$。$\left(+1,+1,+1\right)$相当于$\Phi=0$的情形，而$\left(-1,-1,+1\right)$则相当于$\Phi=\pi$的情形。

附录 C：从转动矩阵考察无限小转动和角速度

由于矢量只是转过一个无限小的角度，因此x_i'与x_i几乎是一样的，二者的差别仅仅是一个无限小的量，也就是说

$$x_i'=x_i+\varepsilon_{ij}x_j=\left(\delta_{ij}+\varepsilon_{ij}\right)x_j \tag{C1}$$

其中，ε_{ij}是一些无限小的数。上式用矩阵表示就是

$$\vec{r}'=\left(I+\varepsilon\right)\vec{r} \tag{C2}$$

即$\lambda=I+\varepsilon$，由于λ是一个正交矩阵，因此

$$\lambda\lambda^T=\left(I+\varepsilon\right)\left(I+\varepsilon\right)^T=1+\varepsilon+\varepsilon^T=I \tag{C3}$$

由此得到

$$\varepsilon^T=-\varepsilon \tag{C4}$$

即ε是一个反对称矩阵。因此，无限小转动完全由一个反对称张量所描述（λ的另一部分是对所有无限小转动来说都相同的单位张量），它与前面定义的矢量$d\Phi_i=n_i d\Phi$的关系是

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & 0 & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -d\Phi_3 & d\Phi_2 \\ d\Phi_3 & 0 & -d\Phi_1 \\ -d\Phi_2 & d\Phi_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{C5}$$

这里，取$\varepsilon_{12}=-d\Phi_3$而不是$\varepsilon_{12}=d\Phi_3$等等这样的对应是由于我们默认了物理上一个通常的约定：即将沿逆时针方向的主动转动定义为正的。