力学数学预备知识
微积分初步

微积分初步

- 微积分是物理学研究中所使用的重要数学工具之一，是由牛顿和莱布尼兹各自独立发现的。在力学中，利用微积分可非常方便地描述物理的运动；
- 在力学课的教学中将自始至终用微积分和矢量来描述物体的运动规律；
- 微积分是高等数学课的重要内容，但由于高等数学课的滞后，需要在力学课的学习之前补充微积分和矢量的概念.

一、函数、导数和微分

（一）变量、常量和函数

- **变量**：取值会发生变化的量，如时间、运动物体的位置、…
- **常量**：取值保持一定的量
- **函数**：设有两个相互关联的变量x和y，如果x在其取值范围内任取一数值时，y都有确定的值与之对应，则称y是x的函数，记为:$y=f(x)$
  - x:自变量
  - y:因变量
  - f(x)的定义域：自变量x的取值范围
  - 例：路程与时间 $s=s(t)$
- **复合函数**：若y是z的函数，$y=f(z)$，而z又是x的函数，$z=g(x)$，则称y是x的复合函数，记为：$y=\varphi(x)=f[g(x)]$
  - $z=g(x)$:中间变量
  - 例：$x=A\cos\omega t$, x是t的复合函数，中间变量为ωt

（二）导数

- **定义**：设函数：$y=f(x)$

$$x_0: y=f(x_0) \qquad x_0+\Delta x: y=f(x_0+\Delta x)$$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

  - $\Delta y/\Delta x$： 函数$y=f(x)$在$[x_0, x_0+\Delta x]$之间的**平均变化率**
  - 如果当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y/\Delta x$ 有极限，则称f(x)在x0处可导，并把该极限称为f(x)在x0处的导数（或微商）

$$f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}=\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

  - 如果在某一区间内f(x)处处可导，则对于区间内x的任一值，都有导数与之对应，➔导数是x的函数➔**导函数**

$$f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}=\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

  - 例：

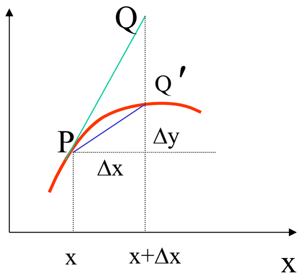
$$f(x)=e^x \qquad \Delta x<<1\Rightarrow e^{\Delta x}\approx 1+\Delta x+\cdots$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1)\approx e^x(1+\Delta x-1)=e^x\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^x\Delta x}{\Delta x}=e^x$$

- **导数的几何意义：**
  - 曲线y=f(x)在点x处的斜率
    - 如图所示：PQ为曲线在P点的切线，平均变化率$\Delta y/\Delta x$ 为割线PQ′的斜率，当Δx→0时,Q′点沿曲线无限接近P点,割线PQ′也无限接近切线PQ,因而,平均变化率趋近于切线的斜率,而根据定义,平均变化率的极限为函数f(x)在x点的导数

y=f(x)



- **二阶导数:**

✓如果函数*f(x)*的导数*f′(x)*对x可导,则*f′(x)*对x的导数叫作f(x)的二阶导数,记为:

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=y''=\frac{d}{dx}[f'(x)]$$

✓例:速度是坐标对时间的一阶导数,而加速度是坐标对时间的二阶导数

- **基本函数的导数**

$1.(c)'=0,(c\text{为常数})$

$2.(x^n)'=nx^{n-1}(n\text{为实数})$

$3.(\sin x)'=\cos x$

$4.(\cos x)'=-\sin x$

$5.(tgx)'=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

$6.(ctgx)'=-\csc^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}$

$7.(\lg_a x)'=(x\ln a)^{-1}$

$8.(\ln x)'=x^{-1}$

$9.(a^x)'=a^x\ln a$

$10.(e^x)'=e^x$

$11.(\arcsin x)'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1},(-1<x<1)$

$12.(\arccos x)'=-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1},(-1<x<1)$

$13.(arctgx)'=(1+x^2)^{-1},(-\infty<x<+\infty)$

$14.(arcctgx)'=-(1+x^2)^{-1},(-\infty<x<+\infty)$

- **导数的运算法则**
  - 假定u和v均为x的函数

$1.(u\pm v)'=u'\pm v'$

$2.(uv)'=u'v+v'u;$

$3.(cu)'=cu',(c\text{为常数})$

$4.\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2},(v\neq 0)$

$5.x=\varphi(y)$为$y=f(x)$的反函数时，

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)},\varphi'(y)\neq 0$$

$6.y=f(u),u=\varphi(x)$,即y为x的复合函数，$y=f[\varphi(x)]$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

- **函数的极值**
  - 如果函数f(x)在点x处取极大值或极小值,则在该点处f(x)对x的一阶导数为零
  - 利用导数求函数的极值:
    - f′(x)=0, 解出x;
    - 如果f″(x)<0,则f(x)在x处取极大值;
    - 如果f″(x)>0,则f(x)在x处取极小值;

- **函数的微分**

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\Rightarrow dy=f'(x)dx$$

  - dy: 函数y=f(x)在x点处的微分;
  - dx: 自变量x的微分;
  - dy与dx成正比;

二、不定积分

如果已知一个函数的导数，如何求这个函数？➔不定积分

- **原函数:**
  - 若函数F(x)对x的导数等于f(x)，即F′(x)=f(x)，则称F(x)为f(x)的一个原函数;
  - 若C为常数，F(x)是f(x)的原函数，则F(x)+C也是f(x)的原函数,即如果f(x)的原函数存在, 它就有无数个彼此间只差一个常数的原函数;
- **不定积分:**
  - f(x)的所有原函数叫作f(x)的不定积分,记为 $\int f(x)dx=F(x)+C$
    - ∫: 积分号
    - f(x): 被积函数
    - f(x)dx: 被积式
    - x:积分变量
    - C:积分常数
  - 含义:无穷多个x的函数,所有这些函数都只差一个常数,它们的导数都等于被积函数f(x);
  - 显然, 求不定积分是求导数的逆运算

- **不定积分的性质** $1.\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ $2.\int F'(x)dx = F(x)+C$

- **不定积分的基本公式, 其中C、a、n皆为常数**

$1.\int 0dx = C$

$2.\int adx = ax + C$

$3.\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$

$4.\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$5.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$

$6.\int e^x dx = e^x + C$

$7.\int \sin xdx = -\cos x + C$

$8.\int \cos xdx = \sin x + C$

$9.\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 xdx = tgx + C$

$10.\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 xdx = ctgx + C$

$11.\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

$12.\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

- **不定积分的运算规则**

$1.\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, (k \neq 0$为常数）

$2.\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3.变量变换：$u = u(x)$, $\int f(x)dx = \int g(u)du = F(u) + C = F[u(x)] + C$

  – 利用这些规则可以将复杂的不定积分计算简化为可利用上面的基本公式计算，特别是通过变量变换

三、定积分

- **概念：**
  – 质点位移的计算：如果已知作直线运动的质点的速度为***V(t)***,求t_1到t_2时间间隔质点的位移
  – 如果***v(t)=v***为常数（匀速直线运动）：位移＝$v \cdot (t_2 - t_1)$
  – 如果***v(t)***是随时间变化的，如何计算？

1. 把[t_1,t_2]区间分成n个相等的子区间 $\Delta t = \frac{t_2 - t_1}{n}$
2. 在Δt时间间隔内近似地认为质点做匀速直线运动，则质点在这段时间内的位移为

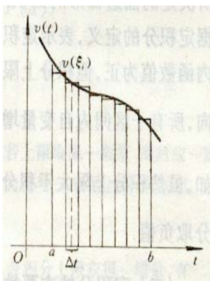
$$\Delta s_i = v(\xi_i)\Delta t$$

其中，ξ_i为子区间内的一点

3. 在[t_1,t_2]区间内的位移

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t$$

4. **n越大， Δt越小， s_n越接近位移的真实值s**



$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t$$ ←定积分

- **定积分的定义：**
  - 设函数f(x)在区间[a,b]上连续，用一系列分点

    $a=x_1<x_2<\ldots x_i<x_{i+1}<\ldots x_{n+1}=b$

    将区间[a,b]等分为n个子区间，在每一个子区间$[x_i, x_{i+1}]$上任取一点ξ_i(i=1,2,...,n)，当n→∞，即Δx→0时，和式

    $$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

    的极限叫作函数f(x)在区间[a,b]上的定积分，记为

    $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

    - ∫：积分号
    - **f(x):** 被积函数
    - **f(x)dx:** 被积式
    - **x:**积分变量
    - **[a,b]:**积分区间，**a:** 积分下限，**b:**积分上限

- **定积分的几何意义：**
  - 曲边梯形的面积，其值可正可负

- **定积分的性质：**

  $1.\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

  $2.k\int_b^a f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx,(k\neq 0)$

  $3.\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

  $4.[a,b]\to[a,c],[c,b]$

  $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

- **定积分与不定积分的关系→牛顿－莱布尼茨公式**
  - 设F(x)是函数f(x)在区间[a,b]上的一个原函数，即F′(x)=f(x)

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$