张量初步与转动惯量张量

叶邦角

中国科学技术大学 物理学院

The School of Physical Science, USTC

一、矢量代数与张量初步

- **矢量定义** $\vec{A} = A\hat{A},\quad A = \left|\vec{A}\right|,\quad \hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{A}$

直角坐标系中 $\vec{A} = A_z\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \vec{e}_i \qquad A = \left|\vec{A}\right| = \left(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} A_i^2}$$

- **矢量的基本运算**

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = AB\cos\theta \qquad \vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\vec{e}_n = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

矢量代数中的两个重要公式

混合积 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

双重矢量积 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})b-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

矢量微分

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\hat{A}\frac{dA}{dt}+A\frac{d\hat{A}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt}=\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}$$

注意顺序
不能颠倒

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$$

并矢与张量 $\vec{A}\vec{B}$ （一般 $\vec{A}\vec{B} \neq \vec{B}\vec{A}$ ）

$$\overleftrightarrow{T} = \vec{A}\vec{B} = \sum_{i,j=1}^{3} A_i B_j \vec{e}_i \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

$\vec{e}_i \vec{e}_j$ 为单位并矢，张量的基（9个分量）

矢量与张量的矩阵表示

$$\vec{A} = \sum A_i \vec{e}_i, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \qquad A = (A_1, A_2, A_3)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_1, A_2, A_3) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$$

$$\overleftrightarrow{T} = \vec{A}\vec{B}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{E} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **张量的运算**

$$\overleftrightarrow{T} + \overleftrightarrow{V} = \sum_{i,j} (T_{ij} + V_{ij}) \vec{e}_i \vec{e}_j$$

$$\vec{A}\vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{A}\left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right) = \vec{A}\left(\vec{C} \cdot \vec{B}\right) = \vec{A}\vec{C} \cdot \vec{B}$$

$$= \left(\vec{C} \cdot \vec{B}\right)\vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{B}\vec{A}$$

$$= \left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right)\vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{C}\vec{A}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{A}\vec{B}=\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}=\vec{B}\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)=\vec{B}\vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$\begin{cases}\vec{A}\vec{B}\times\vec{C}=\vec{A}\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) & \text{并矢}\\ \vec{C}\times\vec{A}\vec{B}=\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\vec{B} & \text{并矢}\end{cases}$$

两并矢的一次点乘

$$\vec{A}\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\vec{D}\right)=\vec{A}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{D}\neq\vec{C}\vec{D}\cdot\vec{A}\vec{B}$$

两并矢的二次点乘

$$\vec{A}\vec{B}:\vec{C}\vec{D}=\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)$$

单位张量与矢量、张量的点乘

$$\overleftrightarrow{E}\cdot\vec{C}=\vec{C}\cdot\overleftrightarrow{E}=\vec{C}$$

$$\overleftrightarrow{E}\cdot\vec{A}\vec{B}=\vec{A}\vec{B}\cdot\overleftrightarrow{E}=\vec{A}\vec{B}$$

二、转动惯量张量

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i \qquad \vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_i$$

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)=\sum_{i=1}^{N}m_i[\vec{r}_i^{\,2}\,\vec{\omega}-(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i]$$

$$\vec{\omega}=\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\omega_i=\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i(\vec{e}_i\cdot\vec{\omega})=\sum_{i=1}^{3}[\vec{e}_i\,\vec{e}_i]\cdot\vec{\omega}$$

$$(\vec{r}_i\cdot\omega)\vec{r}_i=r_i(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})=[\vec{r}_i\vec{r}_i]\cdot\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} [m_i r_i^2 \sum_{j=1}^{3} (\vec{e}_j \, \vec{e}_j) \cdot \vec{\omega} - m_i \vec{r}_i \vec{r}_i \cdot \vec{\omega}]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} [m_i r_i^2 \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \, \vec{e}_j - m_i \vec{r}_i \vec{r}_i] \cdot \vec{\omega}$$

$$= \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}$$

$$\overleftrightarrow{I} = \sum_{i=1}^{N} [m_i r_i^2 \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \, \vec{e}_j - m_i \vec{r}_i \vec{r}_i]$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(z^2+x^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$L_x = [\sum m(y^2+z^2)]\omega_x + [-\sum mxy]\omega_y + [-\sum mxz]\omega_z$$

$$L_y = [-\sum myx]\omega_x + [\sum m(z^2+x^2)]\omega_y + [-\sum myz]\omega_z$$

$$L_z = [-\sum mzx]\omega_x + [-\sum mzy]\omega_y + [\sum m(x^2+y^2)]\omega_z$$

转动惯量张量

$$I=\begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myz & \sum m(z^2+x^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

定义: I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} 为刚体对三个坐标轴*x*,*y*,*z*的转动惯量，I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} 为惯量积。

三、惯量主轴

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

上式表明：角动量并不和角速度成正比。此时，刚体绕某一轴转动时，会在另一轴的方向上产生角动量(绕不同轴的转动相互关联)

绕任意轴转动，角动量一般不和角速度共线。

但：绕某些特殊轴转动，**L**可能与 ω共线。

此时，$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$ 。 目的：找到这些轴。

$$\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} = I\vec{\omega} \Rightarrow \begin{cases} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z = I\omega_x \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z = I\omega_y \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z = I\omega_z \end{cases}$$

——关于 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 的线性齐次方程组

非零解条件

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0$$

I有三个正实根： $\boxed{I_i \quad (i=1,2,3)}$

由I_i的三组解 $\boxed{\boldsymbol{\omega}^{(i)} \quad (i=1,2,3)}$

三组解ω_i的方向决定了角动量与角速度共线的三个方向。这三个方向称为刚体的**惯量主轴**。

$\boldsymbol{I_i}$： 沿主轴方向的转动惯量。

三个相互垂直的惯量主轴 $\boxed{\boldsymbol{\omega}^{(i)} \quad (i=1,2,3)}$ 上，以三个本征值$\boldsymbol{I_i}$ 为半轴作出的椭球，称为刚体的**惯量椭球**。它就是转动惯量矩阵的本征椭球。

若选相互垂直的三个惯量主轴作坐标轴，则：
所有的惯量积都为零(为什么？因为惯量主轴选择就是对惯量张量的对角化)。此时，转动惯量张量具有对角形式

$$I=\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

以惯量主轴作坐标轴，则

$$L_i=\sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j$$

$$L_1=I_1\omega_1,\ L_2=I_2\omega_2,\ L_3=I_3\omega_3$$

一般情况：求惯量主轴要求解本征值方程

$$\overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$$

但：对于具有对称性的刚体，容易找到惯量主轴。

【例】刚体是一个边长为*a*、*b*、*c*的质量均匀分布的长方体，则通过长方体中心的惯量主轴方向就是*a*、*b*、 *c*的方向。

【例】椭球刚体的惯量主轴就是就是椭球的3个对称轴。

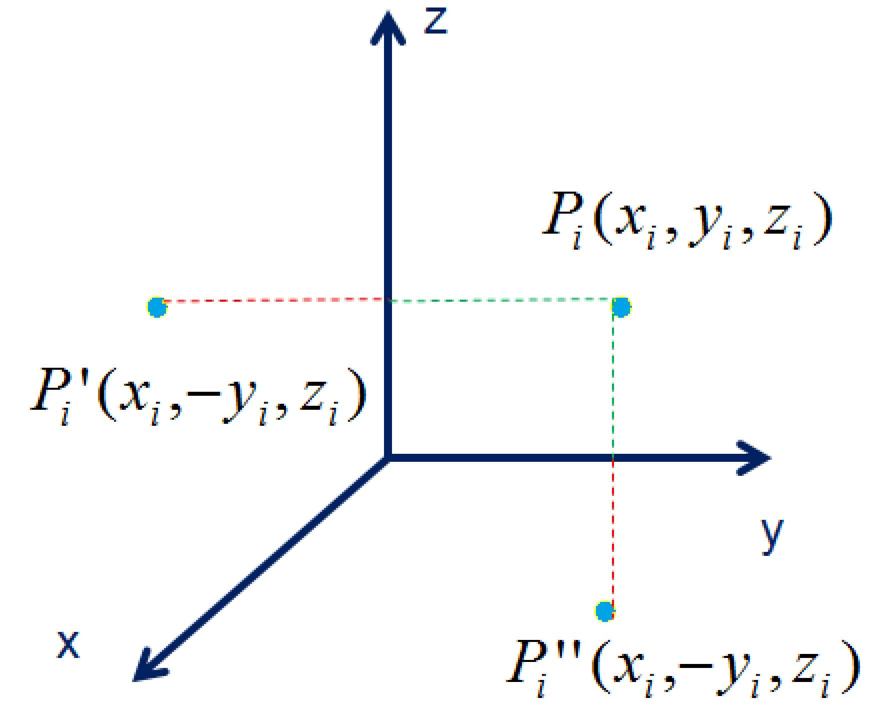
四、惯量主轴的求法

1. 对称分析法

质量分布均匀且具有几何对称性的刚体，可通过对称分析找到惯量主轴.

若刚体具有一对称轴，取为z轴. 质量为m的两个质点必可成对分别位于

$$P_i(x_i, y_i, z_i)$$
$$P_i'(x_i, -y_i, z_i)$$



$$I_{xy}=\sum_i m_i x_i z_i = 0$$

$$I_{zx}=\sum_i m_i z_i x_i = 0$$

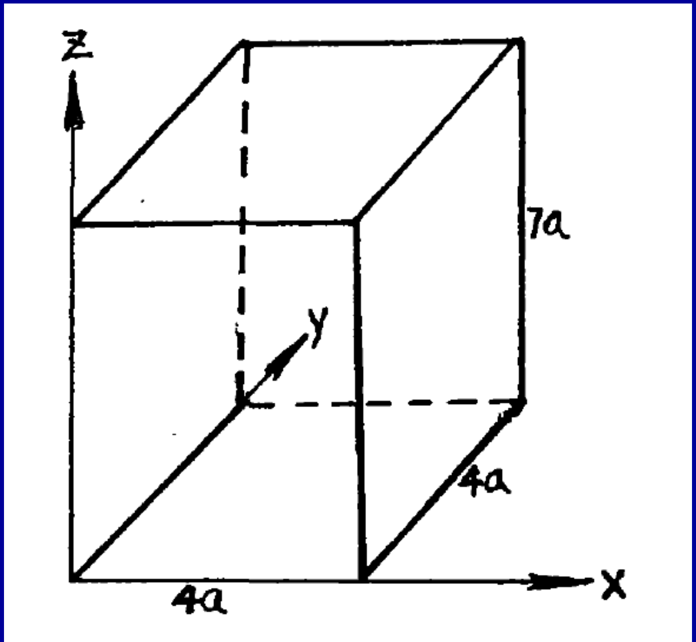
$$I_{zy}=\sum_i m_i z_i y_i = 0$$

可见OZ轴为一主轴．一般地说，刚体的对称轴为轴上任一点的惯量主轴．

2. 代数分析法

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-I \end{vmatrix}=0$$

【例】 均匀质量的长方体，三个边长分别为 4a、4a、7a，质量为 M(如图)，求它对原点的主惯量和惯量主轴.



【解】 刚体的密度为： $\rho = \dfrac{M}{V}$

$$I_{xx} = \int_V \rho(y^2 + z^2)dV = \frac{65}{3}Ma^2$$

$$I_{yy} = \int_V \rho(x^2 + z^2)dV = \frac{65}{3}Ma^2$$

$$I_{zz} = \int_V \rho(x^2 + y^2)dV = \frac{32}{3}Ma^2$$

$$I_{xy} = \int_V \rho xydV = 4Ma^2$$

$$I_{yz} = \int_V \rho yzdV = 7Ma^2$$

$$I_{xz} = \int_V \rho xydV = 7Ma^2$$

惯量矩阵为:

$$I=\frac{1}{3}Ma^2\begin{pmatrix}65 & -12 & -21\\ -12 & 65 & -21\\ -21 & -21 & 32\end{pmatrix}$$

特征方程为:

$$\begin{vmatrix}\frac{65}{3}Ma^2-\lambda & -4Ma^2 & -7Ma^2\\ -4Ma^2 & \frac{65}{3}Ma^2-\lambda & -7Ma^2\\ -7Ma^2 & -7Ma^2 & \frac{32}{3}Ma^2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

解之得：$\lambda_1=\frac{11}{3}Ma^2, \lambda_2=\frac{74}{3}Ma^2, \lambda_3=\frac{77}{3}Ma^2.$

将解代回方程：

$$\left.\begin{aligned}(I_{xx}-\lambda)x-I_{xy}y-I_{xz}z=0\\-I_{yx}x+(I_{yy}-\lambda)y-I_{yz}z=0\\-I_{zx}x-I_{zy}y+(I_{zz}-\lambda)z=0\end{aligned}\right\}$$

对应 λ_1 得 $x:y:z=1:1:2$，

则知主轴 ox' 的方向余弦为$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

对应 λ_2 得 $x:y:z=-1:-1:1$.

则知主轴 oy' 的方向余弦为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

对应 λ_3 得 $x:y:z=1:-1:0$，

则知主轴 oz' 的方向余弦为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$.