文章编号：1007-9831（2009）06-0045-03

球、柱坐标系中的急动度

刘耀康

（四川建筑职业技术学院 计算机工程系，四川 德阳 618000）

摘要： 给出求球、柱坐标系中急动度的一种方法. 首先分别求出了2个坐标系各个单位矢量的导数与各单位矢量之间的关系，然后把2个坐标系的加速度对时间求导数，利用单位矢量导数与其的关系，导出这2种坐标系中的急动度的分量式.

关键词： 急动度；球坐标系；柱坐标系；单位矢量；加速度

中图分类号： O313　　　**文献标识码：** A

急动度（又叫加加速度）是位置矢量对时间的三阶导数或加速度的一阶导数，近来一些文献[1-3]相继进行了介绍或讨论. 这些文献中，急动度多在一维坐标系中求出. 本文给出在球坐标系和柱坐标系中求急动度的一种方法.

1　球坐标系中的急动度

文献[4]给出了球坐标系中的加速度和其单位矢量与直角坐标系的单位矢量的关系 $\bar{a}=a_r\hat{e}_r+a_\theta\hat{e}+a_\varphi\hat{e}_\varphi$，其中：

$$\begin{cases}a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\\ a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\\ a_\varphi=r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}\hat{e}_r=\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{j}+\cos\theta\,\hat{k}\\ \hat{e}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,\hat{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{j}-\sin\theta\,\hat{k}\\ \hat{e}_\varphi=-\sin\varphi\,\hat{i}+\cos\varphi\,\hat{j}\end{cases}\tag{2}$$

则球坐标系中的急动度为

$$\vec{j}=\dot{\vec{a}}=\dot{a}_r\hat{e}+a_r\dot{\hat{e}}+\dot{a}_\theta\hat{e}+a_\theta\dot{\hat{e}}+\dot{a}_\varphi\hat{e}_\varphi+a_\varphi\dot{\hat{e}}_\varphi\tag{3}$$

把式（1）中的加速度各分量对 t 求导，得

$$\begin{cases}\dot{a}_r=\dddot{r}-\dot{r}\dot{\theta}^2-2r\dot{\theta}\ddot{\theta}-\dot{r}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta-2r\dot{\theta}\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta-2r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin^2\theta\\ \dot{a}_\theta=r\dddot{\theta}+3\dot{r}\ddot{\theta}+2\ddot{r}\dot{\theta}-\dot{r}\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta-r\dot{\theta}\dot{\varphi}^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\\ \dot{a}_\varphi=r\dddot{\varphi}\sin\theta+3\dot{r}\ddot{\varphi}\sin\theta+3r\dot{\theta}\ddot{\varphi}\cos\theta+4\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+2\ddot{r}\dot{\varphi}\sin\theta-2r\dot{\theta}^2\dot{\varphi}\sin\theta\end{cases}\tag{4}$$

把式（2）中的各方向的单位矢量对 t 求导并与之比较，得

$$\begin{cases}\dot{\hat{e}}_r=\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta+\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi\\ \dot{\hat{e}}_\theta=-\dot{\theta}\,\hat{e}_r+\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\varphi\\ \dot{\hat{e}}_\varphi=-\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_r-\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta\end{cases}\tag{5}$$

将式（5）代入式（3），分别合并 $\hat{e}_r,\hat{e}_\theta,\hat{e}_\varphi$ 的系数得急动度 $\vec{j}$ 在球坐标系的分量

收稿日期：2009-07-10
作者简介：刘耀康（1949-），男，四川德阳人，副教授，从事大学物理教学及数值计算研究. E-mail：lyk558@tom.com

$\begin{cases} j_r = \dot{a}_r - a_\theta\dot{\theta} - a_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta \\ j_\theta = \dot{a}_\theta + a_r\dot{\theta} - a_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta \\ j_\varphi = \dot{a}_\varphi + a_r\dot{\varphi}\sin\theta + a_\theta\dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}$，再把式（1）、式（4）分别代入$\begin{cases} j_r = \dot{a}_r - a_\theta\dot{\theta} - a_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta \\ j_\theta = \dot{a}_\theta + a_r\dot{\theta} - a_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta \\ j_\varphi = \dot{a}_\varphi + a_r\dot{\varphi}\sin\theta + a_\theta\dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}$，并经过计算得

$$\begin{cases} j_r = \dddot{r} - 3(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\dot{\theta} - 3(\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\dot{\varphi}\sin^2\theta - 3r\dot{\theta}\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ j_\theta = r\dddot{\theta} + 3(\dot{r}\ddot{\theta} + \ddot{r}\dot{\theta}) - r\dot{\theta}^3 - 3(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\dot{\varphi}^2\cos\theta - 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\theta \\ j_\varphi = (r\dddot{\varphi} + 3\dot{r}\ddot{\varphi} + 3\ddot{r}\dot{\varphi} - r\dot{\varphi}^3 - 3r\dot{\theta}^2\dot{\varphi})\sin\theta + (3r\dot{\theta}\ddot{\varphi} + 6\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\ddot{\theta}\dot{\varphi})\cos\theta \end{cases} \qquad (6)$$

特别地，若$r = k_r t$，$\theta = k_\theta t$，$\varphi = k_\varphi t$，其中：k_r，k_θ，k_φ都是常数，即r, θ, φ都是t的线性函数，显然$\begin{cases} \dot{r} = k_r \\ \dot{\theta} = k_\theta \\ \dot{\varphi} = k_\varphi \end{cases}$，则有$\begin{cases} j_r = -3k_r k_\theta{}^2 - 3(k_r\sin\theta + rk_\theta\cos\theta)k_\varphi{}^2\sin\theta \\ j_\theta = -rk_\theta{}^3 - 3(k_r\sin\theta + r\cos\theta k_\theta)k_\varphi{}^2\cos\theta \\ j_\varphi = 6k_r k_\theta k_\varphi\cos\theta - r(k_\varphi{}^2 + 3k_\theta{}^2)k_\varphi\sin\theta \end{cases}$.

2 柱坐标系中的急动度

柱坐标系中的加速度和其单位矢量与直角坐标系的单位矢量的关系为$\vec{a} = a_\rho\hat{e} + a_\varphi\hat{e}_\varphi + \ddot{z}$，其中:

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j} \\ \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} \\ \hat{e}_z = \hat{k} \end{cases} \qquad (8)$$

则球坐标系中的急动度为

$$\vec{j} = \dot{\vec{a}} = \dot{a}_\rho\hat{e} + a_\rho\dot{\hat{e}} + \dot{a}_\varphi\hat{e}_\varphi + a_\varphi\dot{\hat{e}}_\varphi + \dddot{z} \qquad (9)$$

把式（7）中的加速度各分量对t求导，得

$$\begin{cases} \dot{a}_\rho = \dddot{\rho} - \dot{\rho}\dot{\varphi}^2 - 2\rho\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \\ \dot{a}_\varphi = \rho\dddot{\varphi} + 3\dot{\rho}\ddot{\varphi} + 2\ddot{\rho}\dot{\varphi} \\ a_z = \dddot{z} \end{cases} \qquad (10)$$

把式（8）中的各方向的单位矢量对t求导，得

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi \\ \dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\hat{e}_\rho \\ \dot{\hat{e}}_z = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

将式（11）代入式（9），分别合并$\hat{e}_\rho$，$\hat{e}_\varphi$，$\hat{k}$的系数得急动度$\vec{j}$在柱坐标系的分量$\begin{cases} j_\rho = \dot{a}_\rho - a_\varphi\dot{\varphi} \\ j_\varphi = \dot{a}_\varphi + a_\rho\dot{\varphi} \\ j_z = \dddot{z} \end{cases}$，再把式（10）代入并经过计算得

$$\begin{cases} j_\rho = \dddot{\rho} - 3(\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\dot{\varphi} \\ j_\varphi = \rho\dddot{\varphi} + 3\dot{\rho}\ddot{\varphi} + 3\ddot{\rho}\dot{\varphi} - \rho\dot{\varphi}^3 \\ j_z = \dddot{z} \end{cases} \qquad (12)$$

考虑到平面极坐标是球坐标中$\theta = \pi/2$的特例，可在式（6）中令$\theta = \pi/2$，再把j_r换成j_ρ，j_θ换成j_z即可得到式（12）.

特别地，$\rho = k_\rho t$，$\varphi = k_\varphi t$，$z = k_z t$，其中：k_ρ，k_φ，k_z都是常数，则$\begin{cases} j_\rho = -3k_\rho k_\varphi{}^2 \\ j_\varphi = -\rho k_\varphi{}^3 \\ j_z = 0 \end{cases}$.

3 结束语

急动度各分量的成分是以下 4 种情形之一：（1）各坐标对时间的三阶导数；（2）3 个坐标的一阶导数之积；（3）一个坐标的一阶导数与另一个坐标的一阶导数的二次方之积；（4）一个坐标的一阶导数与另一个坐标的二阶导数之积.

本文给出的是一个求速度、加速度、急动度的通用方法：若位置矢量 $\vec{r}=\sum_i f_i(q_1, q_2, q_3)\hat{e}_i$，其中 q_1, q_2, q_3 都是时间 t 的函数，则速度 $\dot{\vec{r}}=\sum_i(\dot{f}_i(q_1, q_2, q_3)\hat{e}_i+f_i(q_1, q_2, q_3)\dot{\hat{e}}_i)$，只要知道 $\dot{\hat{e}}_i=b_j\hat{e}_j+c_k\hat{e}_k$ 可求出 $\dot{\vec{r}}$ 即速度. 继续把 $\dot{\vec{r}}$ 对 t 求导不但可求出加速度和急动度，还可求出急动度的一、二阶导数，只是急动度的一、二阶导数更麻烦，有兴趣者不妨一试.

参考文献：

[1] 黄沛天. 从传统牛顿力学到当今猝变动力学[J]. 大学物理，2006，25（1）：1-3.
[2] 董水金，佘守宪. 关于加加速度的若干机械运动分析及 MATLAB 模拟[J]. 大学物理，2005，24（2）：57-62.
[3] 叶柏年. 点的加加速度[J]. 力学与实践，1988，10（5）：53-55.
[4] 刘耀康. 正交曲线坐标系中加速度的矩阵求法[J]. 大学物理，1996，15（8）：8-11.

The jerk in sperical and cylindrical coordinates

LIU Yao-kang

（Department of Computer Engineering，Sichuan Vocational College of Architecture，Deyang 618000，China）

Abstract： A method for the jerks in the spherical coordinate and the cylindrical coordinate was given. Firstly the relationships between identity vector and its derivative were found，and then the derivative of accelerations in the two coordinates were educed，the jerks in this two coordinates were deduced by using these relationships.

Key words： jerk；spherical coordinate；cylindrical coordinate；identity vector；acceleration

（上接第 44 页）

参考文献：

[1] 张兰知. 对重整热力学第二定律理论体系的不同看法[J]. 大学物理，2002（8）：34-35.
[2] 李平. 热学[M]. 北京：北京师范大学出版社，1987.
[3] 湛垦华，沈小峰. 普利高津与耗散结构理论[M]. 西安：陕西科学技术出版社，1982.
[4] 彼得·柯文尼，罗杰·海菲尔德. 时间之箭——揭开时间最大奥秘之科学旅程[M]. 江涛，向守平，译. 长沙：湖南科学技术出版社，2005.
[5] 伊·普利高津. 从存在到演化 自然科学中的时间及复杂性[M]. 曾庆宏，译. 上海：上海科学技术出版社，1986.
[6] 张兰知. 热力学第二定律的非对称性[J]. 大学物理，2001（3）：24-25.

The concrete thought on reclaiming width of the theory of the second law of thermodynamics

ZHANG Lan-zhi

（School of Science，Qiqihar University，Qiqihar 161006，China）

Abstract： The concrete thought on reclaiming width of the theory of the second law of thermodynamics is presented from entropy flowing，entropy bringing and the degradation of energy，the spread of entropy，negative entropy，the duality principle of entropy change in the open system，entropy world view，the arrow of time the natural disposition concept of the second law of thermodynamics.

Key words： the second law of thermodynamics；entropy；theory