第 17 卷第 3 期
2001 年 9 月

微 波 学 报
JOURNAL OF MICROWAVES

Vol. 17 No. 3
Sep. 2001

两种正交曲线坐标系单位矢量间的一般表达式*

General Expressions Between Unit Vectors of Two Curvilinear Orthogonal Coordinate Systems

易辉跃　唐　斌　晏才宏　周希朗
(上海交通大学电子工程系, 上海 200030)

YI Huiyue, TANG Bin, YAN Caihong, ZHOU Xilang
(*Department of Electronic Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

【摘要】 本文采用不同的分析思路, 导出了曲线坐标系与直角坐标系单位矢量间简明的解析关系, 并推广到更一般的情况— 任何两种正交曲线坐标系单位矢量间的关系。只要一种正交曲线坐标系与直角坐标系或另一种正交曲线坐标系坐标间的单值关系已知, 利用这些关系式即可得到正交曲线坐标系与直角坐标系或另一种正交曲线坐标系单位矢量间的关系。利用文献上已有的正交曲线坐标系坐标间的单值关系, 文中提供了正交曲线坐标系与直角坐标系及圆柱坐标系单位矢量间的变换矩阵, 进而可得任何两种正交曲线坐标系单位矢量间的关系。

关键词: 正交曲线坐标系, 单位矢量, 变换矩阵

Abstract: Concise expressions between unit vectors of curvilinear orthogonal coordinate systems and those of cartesian coordinate system were derived in terms of different analytical ideas. These expressions were expanded to more general relations between unit vectors of two curvilinear orthogonal coordinate systems. With the help of these expressions, relations between unit vectors of a curvilinear orthogonal coordinate system and those of cartesian coordinate system or another curvilinear orthogonal coordinate system can easily be obtained as long as the single-value relations between these two coordinates are known. By means of the relations between curvilinear orthogonal coordinates provided by other authors, the transformation matrixes between unit vectors of curvilinear orthogonal coordinate systems and those of cartesian coordinate system or another curvilinear orthogonal coordinate system were given.

Key terms: Curvilinear orthogonal coordinate, Unit vector, Transformation matrix

一、引　　言

众所周知, 根据求解实际电磁场边值问题的需要, 人们已引出了十多种正交曲线坐标系, 给出了多种正交曲线坐标系的坐标与直角坐标系、圆柱坐标系等坐标间的关系, 并提供了各种坐标系的度量因子(拉梅系数) [1], 为在不同坐标系下求解电磁场问题提供了方便。然而, 由于常见的电磁场边值问题多在三种坐标系(直角坐标系、圆柱坐标系和圆球坐标系) 下求解, 因此正交曲线坐标系下的矢量分析也多围绕常见的三种坐标系展开, 椭圆柱坐标系等十多种坐标

* 收稿日期: 2001- 04- 08; 定稿日期: 2001- 07- 30。

系中的矢量分析则用得不很多。因正交曲线坐标系中矢量间的关系与其单位矢量间的关系密切, 故两种正交曲线坐标系下单位矢量间的关系在矢量分析有重要的作用。本文欲以正交曲线坐标系与直角坐标系单位矢量间关系式的推导为基础, 采用不同分析思路, 导出多种正交曲线坐标系与直角坐标系单位矢量间关系的表达式, 并将此推导思路推广到更一般情况—— 任意两种正交曲线坐标系(除直角坐标系外) 单位矢量间的一般表达式。

二、理论分析

2.1 正交曲线坐标系与直角坐标系单位矢量间的关系

假设在一种正交曲线坐标系中, p 点的坐标为(u_1, u_2, u_3), p 点在直角坐标系下的坐标为(x, y, z), 正交曲线坐标系中各坐标间满足右手螺旋关系, 且有以下的单值函数关系

$$\begin{array}{lcl} u_1 = g_1(x, y, z) & & x = G_1(u_1, u_2, u_3) \\ u_2 = g_2(x, y, z) & \text{或} & y = G_2(u_1, u_2, u_3) \\ u_3 = g_3(x, y, z) & & z = G_3(u_1, u_2, u_3) \end{array} \tag{1}$$

则正交曲线坐标系单位矢量 $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ 和直角坐标系单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 间的对应关系可表示为

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{vmatrix} \tag{2}$$

其中 M 为变换矩阵。M 可采用几何投影法、方向导数法导出。若坐标间满足较为简单的几何关系, 则采用这两种方法推导较为方便。但当坐标间的几何关系不太明确时, 采用上述方法则难以奏效。为此本文采用以下两种推导方法。

2.1.1 偏导数公式法

若设 p 点与坐标原点间的位置矢量为 $\vec{r}$, p 点的微分矢移为 $d\vec{l}$, 则在直角坐标系下, 位置矢量 $\vec{r}$ 可表示为

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \tag{3}$$

而正交曲线坐标系下, 微分矢移 $d\vec{l}$ 为

$$d\vec{l} = d\vec{r} = dl_1\hat{u}_1 + dl_2\hat{u}_2 + dl_3\hat{u}_3 = \hat{u}_1 h_1 du_1 + \hat{u}_2 h_2 du_2 + \hat{u}_3 h_3 du_3 \tag{4}$$

其中 h_1, h_2, h_3 分别为相应坐标系的度量因子, 它们一般是坐标的函数。若将上式写成增量形式, 则为

$$\Delta\vec{r} = \hat{u}_1 h_1 \Delta u_1 + \hat{u}_2 h_2 \Delta u_2 + \hat{u}_3 h_3 \Delta u_3 \tag{5}$$

保持 u_2 和 u_3 为常数(即 $\Delta u_2 = 0 = \Delta u_3$), 则

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta u_1} = \hat{u}_1 h_1 \tag{6}$$

对上式取极限, 则有

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1} \tag{7}$$

类似地, 可得到 $\hat{u}_2$ 和 $\hat{u}_3$ 的表达式, 从而得

$$\hat{u}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{8}$$

2.1.2　全微分公式法

思路 I:

因 p 点的微分矢移可表示为

$$d\vec{l}=d\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}du_3 \tag{9}$$

又考虑到式(1)及式(3), 于是 $\vec{r}$ 关于 u_1 的偏导数为

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}=x\frac{\partial\hat{x}}{\partial u_1}+\hat{x}\frac{\partial x}{\partial u_1}+y\frac{\partial\hat{y}}{\partial u_1}+\hat{y}\frac{\partial y}{\partial u_1}+z\frac{\partial\hat{z}}{\partial u_1}+\hat{z}\frac{\partial z}{\partial u_1} \tag{10}$$

因 $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ 是常矢量, 故有

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}=\hat{x}\frac{\partial x}{\partial u_1}+\hat{y}\frac{\partial y}{\partial u_1}+\hat{z}\frac{\partial z}{\partial u_1} \tag{11}$$

又因

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}\right|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}\right|^{1/2}=\left|\left|\frac{\partial x}{\partial u_1}\right|^2+\left|\frac{\partial y}{\partial u_1}\right|^2+\left|\frac{\partial z}{\partial u_1}\right|^2\right|^{1/2} \tag{12}$$

所以

$$\hat{u}_1=\frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}\right|}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial u_1}\hat{x}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial u_1}\hat{y}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial z}{\partial u_1}\hat{z} \tag{13}$$

$\hat{u}_2$ 和 $\hat{u}_3$ 的表达式可类似得到, 于是, 其一般式为

$$\begin{aligned}\hat{u}_i&=\frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\right|}=\frac{1}{h_i}\frac{\partial x}{\partial u_i}\hat{x}+\frac{1}{h_i}\frac{\partial y}{\partial u_i}\hat{y}+\frac{1}{h_i}\frac{\partial z}{\partial u_i}\hat{z}\\&=\frac{\dfrac{\partial G_1}{\partial u_i}\hat{x}+\dfrac{\partial G_2}{\partial u_i}\hat{y}+\dfrac{\partial G_3}{\partial u_i}\hat{z}}{\left|\sum_{k=1}^{3}\left|\dfrac{\partial G_k}{\partial u_i}\right|^2\right|^{1/2}}\qquad(i=1,2,3)\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $x=G_1, y=G_2, z=G_3$, 而 $h_i=\left|\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial G_k}{\partial u_i}\right|^2\right|^{1/2}$。

思路 II:

正交曲线坐标系下, 若微分矢移 $d\vec{l}$ 只沿 u_1 方向, 即 $du_2=0=du_3$, 则

$$\hat{u}_1=\frac{1}{h_1}\frac{d\vec{l}}{du_1}=\frac{\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz}{h_1du_1} \tag{15}$$

又由多元函数的全微分公式, 有

$$\begin{aligned}dx&=\frac{\partial x}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial x}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial x}{\partial u_3}du_3=\frac{\partial G_1}{\partial u_1}du_1\\dy&=\frac{\partial y}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial y}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial y}{\partial u_3}du_3=\frac{\partial G_2}{\partial u_1}du_1\\dz&=\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial z}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial z}{\partial u_3}du_3=\frac{\partial G_3}{\partial u_1}du_1\end{aligned} \tag{16}$$

将上式代入式(15)可得

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial G_1}{\partial u_1}\hat{x} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial G_2}{\partial u_1}\hat{y} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial G_3}{\partial u_1}\hat{z} \tag{17}$$

类似地, 若微分矢移 $d\vec{l}$ 只沿 u_2 或 u_3 方向, 则可得到 $\hat{u}_2$ 和 $\hat{u}_3$, 其一般式即为式(14)。利用上述公式可得多种正交曲线坐标系与直角坐标系单位矢量间的关系, 如表 1 所示。

表 1　正交曲线坐标系与直角坐标系单位矢量间的关系(仅提供变换矩阵)

曲线坐标系 (u_1, u_2, u_3)	两者坐标间的关系 (文献[1])	单位矢量间的变换矩阵 M
圆柱坐标系 (r, φ, z)	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $z = z$	$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
圆球坐标系 (R, θ, φ)	$x = R\sin\theta\cos\varphi$ $y = R\sin\theta\sin\varphi$ $z = R\cos\theta$	$\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$
椭圆柱坐标系 (ξ, η, z)	$x = p\cosh\xi\cos\eta$ $y = p\sinh\xi\sin\eta$ $z = z$	$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}\sinh\xi\cos\eta}{\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} & \frac{\sqrt{2}\cosh\xi\sin\eta}{\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\cosh\xi\sin\eta}{\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} & \frac{\sqrt{2}\sinh\xi\cos\eta}{\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
抛物柱坐标系 (ζ, ψ, z)	$x = \frac{1}{2}(\zeta^2 - \psi^2)$ $y = \zeta\psi$ $z = z$	$\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \psi^2}}\begin{vmatrix} \zeta & \psi & 0 \\ -\psi & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\zeta^2 + \psi^2} \end{vmatrix}$
旋转抛物柱面坐标系 (ζ, ψ, φ)	$x = \zeta\psi\varphi$ $y = \zeta\psi\sqrt{1 - \varphi^2}$ $z = \frac{1}{2}(\zeta^2 - \psi^2)$	$\begin{vmatrix} \frac{\psi\varphi}{\sqrt{\zeta^2 + \psi^2}} & \frac{\psi\sqrt{1 - \varphi^2}}{\sqrt{\zeta^2 + \psi^2}} & \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \psi^2}} \\ \frac{\zeta\varphi}{\sqrt{\zeta^2 + \psi^2}} & \frac{\zeta\sqrt{1 - \varphi^2}}{\sqrt{\zeta^2 + \psi^2}} & -\frac{\psi}{\sqrt{\zeta^2 + \psi^2}} \\ \sqrt{1 - \varphi^2} & -\varphi & 0 \end{vmatrix}$
双极坐标系 (ξ, θ, z)	$x = \frac{a\sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\theta}$ $y = \frac{a\sin\theta}{\cosh\xi - \cos\theta}$ $z = z$	$\begin{vmatrix} \frac{1 - \cos\theta\cosh\xi}{\cosh\xi - \cos\theta} & \frac{\sin\theta\sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\theta} & 0 \\ \frac{-\sin\theta\sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\theta} & \frac{\cos\theta\cosh\xi - 1}{\cosh\xi - \cos\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

注: 因椭球坐标系和锥面坐标系与直角坐标系间的关系及度量因子的表达式较复杂, 无法包括在表中, 故被略去。

2.2　两种正交曲线坐标系单位矢量间的关系

设一种正交曲线坐标系中 p 点的坐标仍为 (u_1, u_2, u_3), 度量因子为 h_1, h_2, h_3; 另一种正交曲线坐标系中 p 点的坐标为 (u'_1, u'_2, u'_3), 度量因子为 h'_1, h'_2, h'_3, 两正交曲线坐标系中各坐

标间满足右手螺旋关系, 且有以下的单值函数关系

$$\begin{aligned} u'_1 &= k_1(u_1, u_2, u_3) & \qquad & u_1 = K_1(u'_1, u'_2, u'_3) \\ u'_2 &= k_2(u_1, u_2, u_3) & \text{或} \qquad & u_2 = K_2(u'_1, u'_2, u'_3) \\ u'_3 &= k_3(u_1, u_2, u_3) & \qquad & u_3 = K_3(u'_1, u'_2, u'_3) \end{aligned} \tag{18}$$

则一种正交曲线坐标系单位矢量 $\hat{u}'_1, \hat{u}'_2, \hat{u}'_3$ 和另一种正交曲线坐标系单位矢量 $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ 间的对应关系具有式(2)相同的形式。在两种正交曲线坐标系下, p 点的微分矢移 $d\vec{l}$ 分别为

$$d\vec{l} = d\vec{r} = \hat{u}_1 h_1 du_1 + \hat{u}_2 h_2 du_2 + \hat{u}_3 h_3 du_3 = \hat{u}'_1 h'_1 du'_1 + \hat{u}'_2 h'_2 du'_2 + \hat{u}'_3 h'_3 du'_3 \tag{19}$$

将式(15)~(17)推广, 有

$$\hat{u}'_1 = \frac{1}{h'_1}\frac{d\vec{l}}{du'_1} = \frac{h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3}{h'_1 du'_1} = \frac{h_1}{h'_1}\frac{\partial K_1}{\partial u'_1}\hat{u}_1 + \frac{h_2}{h'_1}\frac{\partial K_2}{\partial u'_1}\hat{u}_2 + \frac{h_3}{h'_1}\frac{\partial K_3}{\partial u'_1}\hat{u}_3 \tag{20}$$

类似地可得 $\hat{u}'_2, \hat{u}'_3$ 的表达式, 一般地, 有

$$\hat{u}'_i = \frac{h_1}{h'_i}\frac{\partial K_1}{\partial u'_i}\hat{u}_1 + \frac{h_2}{h'_i}\frac{\partial K_2}{\partial u'_i}\hat{u}_2 + \frac{h_3}{h'_i}\frac{\partial K_3}{\partial u'_i}\hat{u}_3 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{21}$$

利用上述公式可得多种正交曲线坐标系与圆柱坐标系单位矢量间的关系, 如表 2 所示。

表 2　正交曲线坐标系与圆柱坐标系单位矢量间的关系(仅提供变换矩阵)

曲线坐标系 (u'_1, u'_2, u'_3)	两者坐标间的关系(文献[1])	单位矢量间的变换矩阵
圆球坐标系 (R, θ, φ)	$r = R\sin\theta$ $\varphi = \varphi$ $z = R\cos\theta$	$\begin{vmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
旋转抛物柱面坐标系 (ζ, ψ, φ)	$r = \zeta\psi$ $\varphi = \varphi$ $z = \frac{1}{2}(\zeta^2 - \psi^2)$	$\begin{vmatrix} \frac{\psi}{\sqrt{\zeta^2+\psi^2}} & 0 & \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\psi^2}} \\ \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\psi^2}} & 0 & -\frac{\psi}{\sqrt{\zeta^2+\psi^2}} \\ 0 & \sqrt{1-\varphi^3} & 0 \end{vmatrix}$
长旋转椭球坐标系 (ξ, θ, φ)	$r = a\sinh\xi\sin\theta$ $\varphi = \varphi$ $z = a\cosh\xi\cos\theta$	$\begin{vmatrix} \frac{\cosh\xi\sin\theta}{\sqrt{\cosh^2\xi-\cos^2\theta}} & 0 & \frac{\sinh\xi\cos\theta}{\sqrt{\cosh^2\xi-\cos^2\theta}} \\ \frac{\sinh\xi\cos\theta}{\sqrt{\cosh^2\xi-\cos^2\theta}} & 0 & -\frac{\cosh\xi\sin\theta}{\sqrt{\cosh^2\xi-\cos^2\theta}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
扁椭球坐标系 (ξ, θ, φ)	$r = a\cosh\xi\cos\theta$ $\varphi = \varphi$ $z = a\sinh\xi\sin\theta$	$\begin{vmatrix} \frac{\sinh\xi\cos\theta}{\sqrt{\cosh^2\xi-\cos^2\theta}} & 0 & \frac{\cosh\xi\sin\theta}{\sqrt{\cosh^2\xi-\cos^2\theta}} \\ -\frac{\cosh\xi\sin\theta}{\sqrt{\cosh^2\xi-\cos^2\theta}} & 0 & \frac{\sinh\xi\cos\theta}{\sqrt{\cosh^2\xi-\cos^2\theta}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

续表 2

曲线坐标系 (u'_1, u'_2, u'_3)	两者坐标间的关系 (文献[1])	单位矢量间的变换矩阵
双球坐标系 (ξ, θ, φ)	$r = \dfrac{a\sin\theta}{\cosh\xi - \cos\theta}$ $\varphi = \varphi$ $z = \dfrac{a\sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\theta}$	$\begin{vmatrix} -\dfrac{\sinh\xi\sin\theta}{\cosh\xi - \cos\theta} & 0 & \dfrac{1 - \cosh\xi\cos\theta}{\cosh\xi - \cos\theta} \\ \dfrac{\sinh\xi\cos\theta - 1}{\cosh\xi - \cos\theta} & 0 & -\dfrac{\sinh\xi\sin\theta}{\cosh\xi - \cos\theta} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
双环坐标系 (ξ, θ, φ)	$r = \dfrac{a\sin\theta}{\cosh\xi - \cos\theta}$ $\varphi = \varphi$ $z = \dfrac{a\sin\xi}{\cosh\xi - \cos\theta}$	$\begin{vmatrix} \dfrac{1 - \cosh\xi\cos\theta}{\cosh\xi - \cos\theta} & 0 & -\dfrac{\sinh\xi\sin\theta}{\cosh\xi - \cos\theta} \\ -\dfrac{\sinh\xi\sin\theta}{\cosh\xi - \cos\theta} & 0 & \dfrac{\cosh\xi\cos\theta - 1}{\cosh\xi - \cos\theta} \\ 0 & \dfrac{r(\cosh\xi - \cos\theta)}{a\sinh\theta} & 0 \end{vmatrix}$

为导出任何两种曲线坐标系单位矢量间的关系, 以某种曲线坐标系的单位矢量构成的矢量(记为 $\hat{\boldsymbol{A}}_3$) 为中介, 根据其他任何两种曲线坐标系单位矢量构成的矢量(记为 $\hat{\boldsymbol{A}}_1$、$\hat{\boldsymbol{A}}_2$) 与中介矢量间的关系, 可导出任何两种曲线坐标系单位矢量间的关系, 即

$$\hat{\boldsymbol{A}}_1 = M_1\hat{\boldsymbol{A}}_3 \tag{22}$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}_2 = M_2\hat{\boldsymbol{A}}_3 \tag{23}$$

其中 M_1、M_2 分别为第 1 种和第 2 种曲线坐标系与第 3 种曲线坐标系间的变换矩阵。于是, 由式(22) 和(23), 得

$$\hat{\boldsymbol{A}}_2 = M_2M_1^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}_1 = M_2M'_1\hat{\boldsymbol{A}}_1 \tag{24}$$

其中 M'_1 为 M_1 的转置矩阵。

作为例子, 不妨取第 1、第 2 与第 3 种曲线坐标系分别为圆柱、圆球与直角坐标系, 由表 1 中第一栏的变换矩阵可得圆柱坐标系与直角坐标系间单位矢量的关系为

$$\begin{vmatrix} \hat{r} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{z} \end{vmatrix} = M_1\begin{vmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{vmatrix} \tag{25}$$

而由表 1 中第二栏的变换矩阵可得圆球坐标系与直角坐标系间单位矢量的关系为

$$\begin{vmatrix} \hat{R} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{vmatrix} = M_2\begin{vmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{vmatrix} \tag{26}$$

将式(25) 和(26) 提供的关系代入式(24), 即得

$$\begin{vmatrix} \hat{R} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \hat{r} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{z} \end{vmatrix} = M\begin{vmatrix} \hat{r} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{z} \end{vmatrix} \tag{27}$$

其中变换矩阵 M 即为表 2 中第一栏的变换矩阵。这样, 由表 1 及表 2 中任何两种曲线坐标系

与直角坐标系或圆柱坐标系单位矢量间的关系, 通过式(24) 的矩阵运算即可推得任何两种正交曲线坐标系单位矢量间的关系。

三、结 语

本文采用不同的分析思路, 导出了曲线坐标系与直角坐标系单位矢量间简明的解析关系, 并将其解析表达式推广到更一般的情况—— 任何两种正交曲线坐标系单位矢量间的关系。这些表达式推导过程简捷, 数学概念清晰, 对无法利用几何投影法直接求单位矢量间关系的坐标系更显其优点。利用文献上已有的正交曲线坐标系坐标间的单值关系, 文中提供了正交曲线坐标系与直角坐标系以及两种正交曲线坐标系单位矢量间的变换矩阵。这些结果可直接用于不同坐标系间的矢量分析, 这是因为不同坐标系中矢量的各分量间满足的关系式与单位矢量间满足的关系式在形式上完全相同(即变换矩阵相同) 。

参 考 文 献

〔1〕 P . M . Morse , H . Feshbach . Methods of Theoretical Physics (Part I). New York: McGraw-Hill Com., 1953.

〔2〕 林为干, 符果行, 邬琳若, 刘仁厚著. 电磁场理论(第二版) . 北京: 人民邮电出版社, 1996.

易辉跃 1971 年, 1992 年毕业于西安电子科技大学电子工程系, 现在上海交通大学攻读硕士学位。主要研究方向为电磁场与微波技术、智能天线。

唐 斌 1968 生, 1989 年毕业于西安电子科技大学电子工程系, 现在上海交通大学攻读博士学位。主要研究方向为电子对抗中的阵列信号处理。

中国电子学会电磁波波速专家工作组第二次全体会议在北京大学举行

2001 年 7 月 20 日, 在北京大学电子学系举行了中国电子学会电磁波波速专家工作组(The Scientists Work Team of Electro-magnetic Wave Velocity, Chinese Institute of Electronics) 第二次全体会议。会议由专家工作组组长黄志洵教授主持, 中国电子学会副秘书长李志武研究员参加了会议。

会议的一项重要内容是讨论国内至今尚属空白的超光速、超慢光速的实验方案。近年来, 玻色-爱因斯坦凝聚(BEC) 和电磁诱导透明(EIT) 技术在国际上迅速发展。1999 年, 在美国工作的丹麦女科学家 Lene Hau 所报导的超慢光速实验, 正是运用 BEC 和 BIT 取得的成果。正常色散时折射率函数 $n(\omega)$ 在中心频率处的斜率大小将决定波速减慢的程度。本次会议选在北大电子学系举行, 正是考虑到该系王义遒、陈徐宗研究组业已掌握了铯原子磁光阱(MOT) 和铯原子光学粘团技术, 在冷原子方面达到几 μk 的水平, 并对 BEC 开展了理论研究。工作组委员陈徐宗教授在他的报告“光在原子样品中传播速度研究的若干问题”中叙述了国际上的发展和国内(包括本研究组) 的情况。委员们还参观了实验室中的激光冷却实验系统, 对其表示了很大兴趣。大家对陈教授的工作给予肯定, 并呼吁北京大学和国家有关方面给予更多更大的支持。

此外, 会议就中国科学院电子学研究所和工作组 10 月初邀请旅美青年科学家王力军博士回国讲学一事进行讨论。2000 年 7 月 20 日, 国际著名刊物《Nature》发表了王力军的论文“辅助增益的超光速传播”。此后, 引起各国科学界的普遍关注。2000 年底, 美国《Science News》将该实验评为当年物理学十大新闻之一。会议认为, 讲学内容涉及到一些科学界广泛关注的问题, 反映了国际上科学研究的前沿; 组织此次讲学活动, 对于国内的与电磁波波速相关的研究会有较大的促进作用; 因此, 要认真准备并组织好这项活动。会议对王力军提出的两个报告题目(“反常色散与反常群速度”、“量子光学干涉实验与量子通信”) 表示认可。

(本刊编辑部)