教学研究

时空对称性与守恒律(上篇)——牛顿力学

赵凯华

(北京大学 物理学院,北京 100871)

摘要:艾梅・内特宣称,每一对称性对应一守恒律.本文从时空平移和空间转动对称性导出牛顿力学中能量、动量、角动量三大守恒定律.

关键词:时空对称性;参考系;守恒定律

中图分类号:O 31 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-0712(2016)01-0001-03

在量子力学中对称性与守恒律之间的一般关系是直截了当的,内特(E.Nöther)早有论述.在经典力学中有关时空对称性与守恒律的关系,朗道(L.D.Landau)在他有名的理论物理系列教材的《力学》卷[1]中已有精辟的论证.该书是从作用量的变分出发的,根据惯性系时间平移、空间平移和空间转动对称性找出拉格朗日量函数的特点,对封闭系分别推演出能量、动量和角动量和三大守恒定律.用最小作用原理来论证不那么直观,本文将从牛顿力学的通常表述形式来论证这一问题.

宏观物体(包括可用牛顿力学处理的准宏观物体)之间的相互作用有弹性力、摩擦力、非理想气体分子间的相互作用力(如范德瓦尔斯力)、凝聚态物体的内应力,以及万有引力等.除万有引力外,前面各项从微观本质上看,都不外乎是电磁相互作用.在非相对论近似的牛顿力学中这些力都可看作是超距力或接触力,并表现在一个势函数 U 中(下文将引入一个包含速度的广义势函数,可将摩擦力纳入其中).本文将 U 中的外场部分 $U_{外}$ 视为系统所处时空性质的表示,在相对理论中,外场反映在时空度规里.取牛顿近似时,时空平直,外场化为势函数.本文讨论的是牛顿力学,外场的势函数似乎应不属于时空的性质,而时空总是平直的,即具有所有平移和转动的对称性,从而按照内特定理,三大守恒定律都成立,本文就没有什么可讨论的了.然而这里讨论的是非封闭系问题,所以才有外场.有外场时能量守恒定律的表现形式为:体系能量的增加等于外力的功.这一陈述通常称为“功能原理”,认为这里能量是不守恒的.狭义的“守恒”是能量不随时间变化.要想回到“守恒”的狭义概念,则需把外场算到时空的性质中,使时空成为不均匀的.这便是本文的作法.

一般说来,这个势函数 U 不仅依赖于时空坐标 $t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots$,还会与质点的速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots$ 有关.在非相对论情形下作用力与速度有关的情形有三:一是带电粒子在磁场中受到的洛伦兹力,二是在旋转参考系中的科里奥利力,三是摩擦力.运动电荷之间的洛伦兹相互作用力不是超距的,要通过与电磁场交换动量来实现,不能在牛顿力学中处理,我们留到本文下篇中讨论.不过带电粒子在外电磁场中受力的问题,可以在牛顿力学里讨论.旋转参考系可在考察之列.耗散力引起的能量转化超出力学范围,我们将不在这里讨论.

按照 Goldstein 的经典名著《Classical Mechanics》[2]中所说的,有些力与速度有关时,系统的总势函数要用一种广义势函数 U 来表示.第 i 个质点受的力 $\boldsymbol{F}_i$ 与 U 的关系是

$$\boldsymbol{F}_i=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right) \tag{1}$$

现把 U 分为与速度无关部分 U_0 和与速度有关部分 ΔU,即 $U=U_0+\Delta U$.对于在恒外磁场中的带电粒子,

$$\Delta U=-\sum_i q_i \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_i=\sum_i \frac{q_i}{2}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}_i \tag{2}$$

收稿日期:2015-10-09

作者简介:赵凯华(1930—),男,浙江杭州人,北京大学物理学院教授,2008 年获教育部物理基础教学指导委员会和中国物理学会教学委员会颁发的“物理教学杰出成就奖”.

对于在旋转参考系中的粒子，

$$\Delta U=-\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{v}_i \tag{3}$$

U_0 包含外场势和质点间的相互作用势，不仅通常的两体作用势，还有各种可能的多体作用势. 如果时间均匀，U 与 t 无关；如果空间均匀，则系统等时地整体平移而各质点的速度不变，函数 U 不变；如果空间对于某点各向同性，则系统等时地整体（包括各质点的速度）绕该点旋转任一角度，函数 U 不变.

设质点 i 的速度为 $\boldsymbol{v}_i$，其加速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}$ 由相互作用力 $\boldsymbol{F}_i$ 产生

$$\boldsymbol{F}_i=m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right) \tag{4}$$

1 能量守恒定律

将式(4)乘以 $\boldsymbol{v}_i=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}$，对所有质点求和

$$\sum_i m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}_i=-\sum_i\left[\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\right]\cdot\boldsymbol{v}_i \tag{5}$$

$$式(5)左端=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i^2\right)$$

是整个质点系统总动能的变化率. 势函数 U 的时间变化率为

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\sum_i\left[\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\right]+\frac{\partial U}{\partial t}=$$

$$\sum_i\left[\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i}\cdot\boldsymbol{v}_i+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\boldsymbol{v}_i\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\cdot\boldsymbol{v}_i\right]+\frac{\partial U}{\partial t}$$

$$式(5)右端=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U-\sum_i\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\boldsymbol{v}_i\right)+\frac{\partial U}{\partial t}$$

式(5)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i^2+U-\sum_i\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\boldsymbol{v}_i\right)=\frac{\partial U}{\partial t} \tag{6}$$

在具有时间均匀的条件下，$\frac{\partial U}{\partial t}=0$，式(6)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i^2+U-\sum_i\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\boldsymbol{v}_i\right)=0 \tag{7}$$

如果我们把 $U'=U-\sum_i\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\boldsymbol{v}_i$ 定义为系统的势能，将式(7)写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i^2+U'\right)=0 \tag{8}$$

这就是机械能守恒定律. 对于有外磁场或在旋转参考系的情形，从式(2)或式(3)可以看出，$\sum_i\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\boldsymbol{v}_i=\Delta U$，即 $U'=U-\Delta U=U_0$，它就是通常不依赖于速度的势能，其中包括静电势能或离心势能.（由于洛伦兹力和科里奥利力与速度垂直而不作功，对能量守恒没有影响.）

2 动量守恒定律

将式(4)移项后再对 i 求和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i\left(m_i\boldsymbol{v}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\right]=-\sum_i\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i} \tag{9}$$

设想所有质点作任何同一位移 $\delta\boldsymbol{l}$，将上式点乘以 $\delta\boldsymbol{l}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i\left(m_i\boldsymbol{v}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\right]\cdot\delta\boldsymbol{l}=-\sum_i\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i}\cdot\delta\boldsymbol{l} \tag{10}$$

另外，整个质点系统平移 $\delta\boldsymbol{l}$ 时引起 U 的变化为

$$\delta U=\sum_i\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\delta\boldsymbol{v}_i\right) \tag{11}$$

而 $\delta\boldsymbol{r}_i=\delta\boldsymbol{l},\quad\delta\boldsymbol{v}_i=0$

故 $\delta U=\sum_i\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i}\cdot\delta\boldsymbol{l}$

式(10)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i\left(m_i\boldsymbol{v}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\right]\cdot\delta\boldsymbol{l}=-\delta U \tag{12}$$

如果空间均匀，则 $\delta U=0$，于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i\left(m_i\boldsymbol{v}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\right]\cdot\delta\boldsymbol{l}=0$$

由于 $\delta\boldsymbol{l}$ 是任意的，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i\left(m_i\boldsymbol{v}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\right]=0 \tag{13}$$

如果我们把

$$\boldsymbol{p}_i\equiv m_i\boldsymbol{v}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i} \tag{14}$$

定义为质点 i 的广义动量，则式(13)可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\boldsymbol{p}_i=0 \tag{15}$$

这就是质点系统的动量守恒定律. 对于对磁场中的带电粒子，$\boldsymbol{p}_i=m_i\boldsymbol{v}_i+q_i\boldsymbol{A}$，这就是在磁场中的哈密顿正则动量. 只有磁场 $\boldsymbol{B}$ 均匀时，ΔU 才具有空间均匀性，这时系统的总正则动量守恒. 对于在旋转参考系中的质点，由于存在离心势，空间明显不均匀，动量不可能守恒.

3 角动量守恒定律

现在要考虑的是空间各向同性但不一定具有平移不变性的情形，假设空间对于某个不动点 O 各向同性. 我们取 O 为坐标原点，所有矢径都是从这里出发的，所有角动量也是相对这点而言的. 空间绕某个不动点的任何微转动，都可看作围绕某一瞬时轴的转动.（在理论力学教科书中，讨论刚体绕固定点转动时都证明了这一结论.）用矢量 $\delta\boldsymbol{\Omega}$ 来表示这个角

位移,矢量的方向就是瞬时轴的方向.微转动引起矢径的增量为

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}\tag{16}$$

这公式对所有质点的位矢 $\boldsymbol{r}_i$ 均适用,即 $\delta\boldsymbol{r}_i=\delta\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_i$

对于势函数 U 与速度有关的情况,式(4)移项后点乘以 $\delta\boldsymbol{r}_i$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\boldsymbol{v}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$$

两端各加一项 $-\dfrac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\delta\boldsymbol{v}_i$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\boldsymbol{v}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\delta\boldsymbol{v}_i=-\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\delta\boldsymbol{v}_i\right)\tag{17}$$

对所有质点求和,按式(11),右端等于 $-\delta U$

$$\sum_i\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\boldsymbol{v}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\delta\boldsymbol{v}_i\right]=-\delta U\tag{18}$$

式(18)左端第一项

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(m_i\boldsymbol{v}_i)}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\frac{\mathrm{d}(m_i\boldsymbol{v}_i)}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_i&=\\ \boldsymbol{r}_i\times\frac{\mathrm{d}(m_i\boldsymbol{v}_i)}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}&=\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}_i\times(m_i\boldsymbol{v}_i)]\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{v}_i\times(m_i\boldsymbol{v}_i)\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}&=\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}_i\times(m_i\boldsymbol{v}_i)]\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}&\end{aligned}\tag{19}$$

式(18)左端第三项中 $\delta\boldsymbol{v}_i=\dfrac{\mathrm{d}(\delta\boldsymbol{r}_i)}{\mathrm{d}t}=\delta\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_i$,于是二、三项为

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\delta\boldsymbol{v}_i&=\\ -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_i+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_i\right]&=\\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_i\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}_i\times\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}\right)&\end{aligned}\tag{20}$$

将式(19)、式(20)代入式(18),我们得到

$$\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{r}_i\times\left(m_i\boldsymbol{v}_i-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)\right]\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}=-\delta U,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}=-\delta U\tag{21}$$

式中 $\boldsymbol{p}_i$ 即式(14)中定义的广义动量.

在 U 与速度无关的情形下,$\boldsymbol{p}_i=m_i\boldsymbol{v}_i$,空间围绕 O 点球对称,δU 对于任意方向的 $\delta\boldsymbol{\Omega}$ 都等于 0,式(21)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\boldsymbol{r}_i\times(m_i\boldsymbol{v}_i)=0\tag{22}$$

这就是整个质点系统相对于 O 点的角动量守恒定律.

若 U 与速度有关,譬如有均匀恒定外磁场 $\boldsymbol{B}$,或者在恒定角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的转动参考系中,空间不可能相对于一点球对称,但绕 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向轴对称,这时对于沿此轴方向的任何转动 $\delta\boldsymbol{\Omega}$ 来说 $\delta U=0$,从而式(21)化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i\right)\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

或

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i\right)\cdot\boldsymbol{\omega}=0\tag{23}$$

式中 $\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i$ 可称为系统的广义角动量.在空间具有轴对称性的时候,只有广义角动量沿轴的分量守恒.

致谢:作者特别感谢陈熙谋教授和朱如曾教授在本文写作过程中提供的宝贵意见.

参考文献:

[1] 朗道,栗弗席兹.力学[M].5 版.北京:高等教育出版社,2007:第二章.

[2] Goldstein H. Classical Mechanics[M].2 ed. Addison-Wesley Pub Co,1980:1-5.

[3] A.P.弗伦奇.牛顿力学·第二册[M].郭敦仁、何成钧,译.北京:人民教育出版社,1982:147.

[4] 赵凯华,罗蔚茵.新概念物理教程·力学[M].北京:高等教育出版社,1995:第二章,2.1 节.

Spacetime symmetries and conservation laws (Ⅰ)

——Newtonian mechanics

ZHAO Kai-hua

(School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Emmy Nöther declared that to every kind of symmetry there is a corresponding conservation law. In the present paper, the conservation laws of energy, momentum and angular momentum in Newtonian mechanics are derived from the translational and rotational spacetime symmetries.

Key words: spacetime symmetries; frame of reference; conservation laws