第二章　守恒律

力学规律：$\dfrac{\partial L}{\partial q^{(\alpha)}}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^{(\alpha)}}=0 \quad (\alpha=1,2,\cdots,s)$

拉格朗日方程 $\Rightarrow$

1. 解方程得到运动规律；2. 得到守恒量。

广义坐标：$q_\alpha=q_\alpha(t)$　　广义速度：$\dot{q}_\alpha=\dot{q}_\alpha(t)$

由 $q_\alpha(t)$ 和 $\dot{q}_\alpha(t)$ 组成一些不随时间变化的量(守恒量)

守恒量 $\Rightarrow$ 求运动方程的解；分析解的性质。

§1.2.1　动量和能量

一 、循环坐标与广义动量

比较：拉格朗日方程
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

和牛顿方程
$$\frac{d}{dt}p_i=F_i$$

定义：$p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$　　——广义动量

$f_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}$　　——广义力

例子1：对在保守场中运动的单个质点，有

$$L = T - U = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m\dot{x}_i^2 - U$$ ——直角坐标系

广义动量 $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$ ——通常的动量

广义力 $f_i = \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ ——通常的力

例子2：对在有心力场中运动的质点，有

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)-U(r)$$ ——球坐标系

对应于广义坐标 φ 的广义动量：

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

广义力：
$$f_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

质点m到轴的垂直距离：$r\sin\theta$，则

$$I = m(r\sin\theta)^2$$ ——质点绕轴的转动惯量

于是对应于φ的广义动量可写为：

$$p_\varphi = I\dot{\varphi}$$ ——绕z轴的角动量

由拉格朗日方程得：

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = 0$$

——在有心力场中，绕任意选取的轴的角动量守恒。

广义动量 p_φ 守恒的原因：在拉格朗日函数L中不包含对应的广义坐标 φ。

（这只是从数学形式上的原因，物理上的原因？）

一般结论：如果在拉格朗日函数中不包含某一个广义坐标 q_α，则称这一广义坐标为**循环坐标**。**和循环坐标对应的广义动量守恒。**

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\Rightarrow\frac{dp_\alpha}{dt}=0\right)$$

二、能量

一般情况： $L = L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)$ ——显含时间变量t

例：处于随时间变化的外场中的系统，其拉格朗日

函数为 $L = T - U(q,t)$ ——L显含时间变量t

——系统与外力场的源必有能量交换，

系统不是保守系。

对保守系，L不明显含变量t，则 $L = L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))$ 。

$$\Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right)$$

拉格朗日方程：
$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha})$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{s}[\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha})\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d}{dt}(\dot{q}_\alpha)]=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)-L\right]=0$$

定义：
$$E=\sum_{\alpha=1}^{s}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha)-L$$
——机械能（能量）

显然：
$$\frac{dE}{dt}=0$$
——保守系统的能量守恒

在直角坐标系中，动能只是速度$\dot{x}_i$的函数，不是坐标的x_i函数，但在广义坐标中，动能$T=T(q_\alpha,\dot{q}_\alpha)$，则$L=T(q_\alpha,\dot{q}_\alpha)-U(q_\alpha)$。

动能T是广义速度$\dot{q}_\alpha$ 的二次齐次式。

例：有心力场中动能 $T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$

动能T是广义速度$\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}$ 的二次齐次式。

通常：动能都是广义速度的二次齐次式。

根据齐次函数的欧拉定理，如果 $f(u_1, u_2, \cdots, u_s)$ 是 s个变量 u_α 的n次齐次式，则

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} u_\alpha = nf$$

由于动能T是广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 的二次齐次函数，则有

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = 2T$$

而

$$E = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) - L$$

所以　$E = 2T - L = 2T - (L - U) = T + U$

——机械能等于动能与势能之和

结论：对于保守系统，在运动过程中，机械能保持不变。

§1.2.2 质点组的动量定理、质心

一、质点组的动量定理

在此：选笛卡儿坐标系。

设：力学系统——N个粒子，第a个粒子和第b个粒子

$(a \neq b)$之间的相互作用势能用U_{ab}表示。

$$U_{ab} = U_{ab}(r_{ab}) \qquad r_{ab} = \left|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right|$$

$$r_{ab} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

$$\frac{\partial r_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a} = \frac{\partial r_{ab}}{\partial x_a}\mathbf{i} + \frac{\partial r_{ab}}{\partial y_a}\mathbf{j} + \frac{\partial r_{ab}}{\partial z_a}\mathbf{k} = \frac{1}{r_{ab}}[(x_a - x_b)\mathbf{i} + (y_a - y_b)\mathbf{j} + (z_a - z_b)\mathbf{k}]$$

$$\frac{\partial r_{ab}}{\partial \mathbf{r}_b} = \frac{\partial r_{ab}}{\partial x_b}\mathbf{i} + \frac{\partial r_{ab}}{\partial y_b}\mathbf{j} + \frac{\partial r_{ab}}{\partial z_b}\mathbf{k} = -\frac{1}{r_{ab}}[(x_a - x_b)\mathbf{i} + (y_a - y_b)\mathbf{j} + (z_a - z_b)\mathbf{k}]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial r_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial r_{ab}}{\partial \mathbf{r}_b}$$

$$\frac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a}=\frac{dU_{ab}}{dr_{ab}}\frac{\partial r_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a} \qquad \frac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}_b}=\frac{dU_{ab}}{dr_{ab}}\frac{\partial r_{ab}}{\partial \mathbf{r}_b}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a}=-\frac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}_b}$$

令 $\mathbf{F}_{ab}=-\dfrac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a}$ ——质点b作用于质点a上的力

$\mathbf{F}_{ba}=-\dfrac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}_b}$ ——质点a作用于质点b上的力

则

$\mathbf{F}_{ab}=-\mathbf{F}_{ba}$ ——牛顿第三定律

设：作用在质点a上的力为

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_{a内} + \mathbf{F}_{a外}$$

$\mathbf{F}_{a内}$：系统内其它质点对a的内力之和；

$\mathbf{F}_{a外}$：系统外质点对a的合外力。

拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(a)}} = \frac{\partial L}{\partial x_i^{(a)}} \qquad \text{（直角坐标系）}$$

又

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(a)}} = m\dot{x}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$$

所以 $$\frac{dp_i^{(a)}}{dt} = F_i^{(a)} \quad (i = 1,2,3)$$

矢量式: $$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}_a = \mathbf{F}_{a内} + \mathbf{F}_{a外}$$

作和式: $$\sum_{a=1}^{N} \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_{a内} + \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_{a外}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N}\mathbf{p}_a = \sum_{a=1}^{N}\mathbf{F}_{a内} + \sum_{a=1}^{N}\mathbf{F}_{a外} = 0 + \sum_{a=1}^{N}\mathbf{F}_{a外} = \sum_{a=1}^{N}\mathbf{F}_{a外}$$

$\sum_{a=1}^{N}\mathbf{p}_a$：质点组的总动量；$\sum_{a=1}^{N}\mathbf{F}_{a外}$：系统所受合外力

则：$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\mathbf{F}$$ ——质点组的动量定理

若不存在外场，则 $U_{外}=0, \mathbf{F}=0$，有

$$\dot{\mathbf{P}}=0$$

——不受外力作用时质点组的总动量守恒

二、质心

动量守恒定律与能量守恒定律的成立不依赖于惯性系的选取。但：在不同惯性系中，动量和能量所取的值不同。

设：惯性系K、K'，其中K'相对K以速度$\mathbf{V}$运动。

$\mathbf{v}_a, \mathbf{v}'_a$：第$a$个质点对$K$、$K'$系的速度

$\mathbf{P}, \mathbf{P}'$：质点组对K、K'系的总动量

因为

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$$

所以 $$\mathbf{P}=\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}_a=\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}'_a+(\sum_{a=1}^{N} m_a)\mathbf{V}$$

即 $$\mathbf{P}=\mathbf{P}'+(\sum_{a=1}^{N} m_a)\mathbf{V}$$

若：

$$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{P}}{\sum_{a=1}^{N} m_a}=\frac{\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}_a}{\sum_{a=1}^{N} m_a}$$

则：

$$\mathbf{P}'=0$$

——在此惯性系中，质点组的总动量为零。此惯性系中称为**质心系**。

质心系中：质点组整体是静止的，但质点组中的质点有内部运动。

此时

$$\mathbf{P} = (\sum_{a=1}^{N} m_a)\mathbf{V} = M\mathbf{V}$$

$$M = \sum_{a=1}^{N} m_a$$ —质点组的总质量

V：质点组作为一个整体的速度

由

$$\mathbf{V}=\frac{\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}_a}{\sum_{a=1}^{N} m_a}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_a}{\sum_{a=1}^{N} m_a}\right)$$

定义：

$$\mathbf{R}_c=\frac{\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_a}{\sum_{a=1}^{N} m_a}$$

为质点组的**质心**

则：

$$\mathbf{V}=\frac{d\mathbf{R}_c}{dt}$$

即：质点组整体的运动速度就是质心的运动速度

且

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\frac{d}{dt}(M\mathbf{V})=M\frac{d\mathbf{V}}{dt}=M\frac{d^2\mathbf{R}_c}{dt^2}$$

——质心运动定理

三、能量的变换

设：E, E'分别为质点组在$\mathbf{K}$, $\mathbf{K}'$ 系的能量

则：

$$E=\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2+U=\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}m_a(\mathbf{v}'_a+\mathbf{V})^2+U$$

$$=\left(\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}m_a v'^2_a+U\right)+\frac{1}{2}MV^2+\left(\sum_{a=1}^{N}m_a\mathbf{v}'^2_a\right)\cdot\mathbf{V}$$

$$=E'+\frac{1}{2}MV^2+\mathbf{P}'\cdot\mathbf{V}$$

若 K'为特殊的惯性系——质心系，则

$$E=E'+\frac{1}{2}MV^2$$

其中 $$E'=\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}m_a v'^2_a+U$$ ——内能

——在K系中的能量等于在质心系中的能量加上质点组总质量附在质心上时质心在K系中的动能。

§1.2.3　守恒律与对称性的关系、角动量

对称性：

对称性的概念最初是在几何学中提出的：某个几何形体，如果按照某种操作规则改变一下它在空间的位置，它的几何形体与操作前的完全重合，就说该几何形体具有某种对称性。

对称性的推广：

如果某一物理定律或某物理量在某种变换下其形式或量值保持不变，则称这种变换具有不变性或协变性，或者说，这个定律或物理量对某种变换具有对称性或不变性。

已讲：　　　　　能量(机械能)守恒律 + 动量守恒律

守恒的原因：　**时间的均匀性**　　　　**空间的均匀性**

一、时间的均匀性与能量守恒

时间均匀性的涵义：

1. 假定系统处于变化的外场中，时间不是均匀的。即用不同的时刻作为计算时间的起点，所得到的运动方程不相同；以不同的时刻作为时间轴的原点对于研究系统的运动不等效；

2. 系统处于不变的外场中或不处于外场中，时间是均匀的。即以不同时刻作为计算时间的起点对于研究系统的运动是等效的。

时间不均匀:

$$L = L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t) \qquad L: 显含时间t$$

时间均匀:

$$L = L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)) \qquad L: 不显含时间t$$

此时

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

则 $$\frac{dL}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha$$

又：
$$E=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L$$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha)-\frac{dL}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha})\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha-\frac{dL}{dt}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha=0$$

——能量守恒

结论：**能量守恒是由时间的均匀性产生的。**

（能量守恒深刻的物理根源）

二、空间的均匀性与动量守恒

空间均匀性的涵义：

系统不处于外场中，空间是均匀的——无论选用空间哪一点作为坐标原点来研究系统的运动都是等效的。

设：一坐标系中，系统的拉格朗日为L，现将坐标系平移一个常矢量$\boldsymbol{\varepsilon}$，即选另一点作为坐标原点。

后果： 1. 系统中每个粒子的坐标改变 $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\delta \mathbf{r}_a = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (a = 1,2,\cdots N)$$

2. 系统的拉格朗日改变δL。

若：空间均匀，则： $\delta L = 0$

又 $L = L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a(t))$, $\delta \dot{\mathbf{r}}_a = 0$（坐标平移时，速度不变）

所以

$$\delta L = \sum_{a=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_a \right)$$

$$= \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0$$

拉格朗日方程： $$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = 0$$

作和： $$\sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} - \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = 0$$

而 $$\mathbf{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \qquad \mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$$

——系统的总动量守恒

结论：动量守恒是由空间的均匀性产生的。

空间均匀：坐标系平移，L不变；

时间均匀：时间轴平移，L不变。

时间和空间均匀性导致：拉格朗日L在时间平移和空间平移下的不变性。

对称性：系统对某种变换的不变性称为系统对这种变换的对称性。

结论：能量守恒是由于系统具有时间平移的对称性；
动量守恒是由于系统具有空间平移的对称性。

四、空间的各向同性与角动量守恒

空间各向同性的涵义：

在无外场或在有心力场中，空间的各个方向是等效。

系统具有转动对称性：将坐标系转动，拉格朗日不变。

问题：转动对称性导致什么守恒？

已知：无限小的角位移是矢量，有限角位移不是矢量。

设：坐标系绕空间任取的某一轴转动一个角度$\delta\varphi$，

用 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 表示这一角位移。

θ：**r**与$\delta\boldsymbol{\varphi}$ 之间的夹角，

r端点绕 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 轴转动的半径：$r\sin\theta$ ，则

$$\delta r = (r\sin\theta)\delta\varphi$$

又：$\delta\boldsymbol{\varphi}$ 很小，$\delta\mathbf{r}\perp\delta\boldsymbol{\varphi}$与**r** 组成的平面。考虑到$\delta\mathbf{r}$的大小、方向，有：

$$\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$$

上式对t求导：

$$\frac{d}{dt}\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

交换δ和$\frac{d}{dt}$的次序(δ、$\frac{d}{dt}$互相独立)，有：

$$\delta \dot{\mathbf{r}} = \delta \varphi \times \dot{\mathbf{r}}$$

物理上：体系旋转后速度发生了改变，此改变仅仅是由于体系的旋转引起的。

由转动产生的L的变化：

$$\delta L=\sum_{a=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}\cdot\delta\mathbf{r}_a+\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}\cdot\delta\dot{\mathbf{r}}_a\right)=\sum_{a=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}\cdot[\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_a]+\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}\cdot[\delta\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\mathbf{r}}_a]\right)$$

$$=\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_{a=1}^{N}\left(\mathbf{r}_a\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}+\dot{\mathbf{r}}_a\times\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}\right)\qquad[\because \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]$$

拉格朗日方程：

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}=0$$

$$\Rightarrow \quad \delta L = \delta\varphi \cdot \sum_{a=1}^{N}[\mathbf{r}_a \times \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}) + \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a})] = \delta\varphi \cdot \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{a}[\mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}]$$

$$= \delta\varphi \cdot \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{a}[\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a]$$

若系统具有转动对称性，则 $\delta L = 0$

即

$$\delta\varphi \cdot \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{a}[\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{a}[\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] = 0 \quad (\because \delta\varphi \neq 0)$$

令：$\mathbf{L}=\sum_{a=1}^{N}\mathbf{r}_a\times\mathbf{p}_a$——系统的角动量

则：$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=0$ ——**系统的角动量守恒**

结论：角动量守恒是由空间的各向同性产生的。

有时，系统并不具有完全的转动不变性，但有绕某个轴(如z轴)的转动不变性。此时，角动量L的z分量 L_z 守恒。

$$L_z=\sum_{a=1}^{N}[\mathbf{r}_a\times\mathbf{p}_a]_z=\sum_{a=1}^{N}(x_a p_{ya}-y_a p_{xa})$$

球坐标系下：

$$x_a = r_a \sin\theta_a \cos\varphi_a, \quad y_a = r_a \sin\theta_a \sin\varphi_a$$

$$p_{xa} = m_a \dot{x}_a, \quad p_{ya} = m_a \dot{y}_a$$

$$\Rightarrow$$

$$L_z = \sum_{a=1}^{N} \{ r_a \sin\theta_a \cos\varphi_a [m_a \dot{r}_a \sin\theta_a \sin\varphi_a + m_a r_a \cos\theta_a \dot{\theta}_a \sin\varphi_a + m_a r_a \sin\theta_a (\cos\varphi_a)\dot{\varphi}_a]\}$$

$$- r_a \sin\theta_a \sin\varphi_a [m_a r_a \cos\theta_a \dot{\theta}_a \cos\varphi_a + m_a \dot{r}_a \sin\theta_a \cos\varphi_a + m_a r_a \sin\theta_a (-\sin\varphi_a)\dot{\varphi}_a]$$

$$= \sum_{a=1}^{N} (m_a r_a^2 \sin^2\theta_a \dot{\varphi}_a \cos^2\varphi_a + m_a r_a^2 \sin^2\theta_a \dot{\varphi}_a \sin^2\varphi_a)$$

$$= \sum_{a=1}^{N} m_a r_a^2 \sin^2\theta_a \dot{\varphi}_a = \sum_{a=1}^{N} p_{\varphi a}$$

$p_{\varphi a}$ ： 广义动量