

# 城市交通网络的电路模拟及实际应用

张 朔

(中国科学技术大学物理系 学号 PB11203009)

**摘要:** 本文首次论证了电路与非合作性交通网络的等效性, 并通过构建相应电路来模拟城市交通网络模型, 普遍适用于多 O-D、大规模复杂路网的分析。特殊的, 交通网络中存在 Braess 悖论现象, 即在交通网络中增加一条道路反而会降低网络流通性能, 这在交通规划中是需要认真考虑的问题。本文对简单 Braess 模型进行了电路模拟分析, 检验已知的性质, 并对于复杂网络模型提出发现并避免 Braess 悖论的方法。

**关键词:** 电路模拟, 交通规划, Braess 悖论

在城市日益发展的今天, 交通规划受到越来越多的重视, 一个城市的交通规划优良与否, 直接决定着其通达与便捷程度, 而交通规划的重要体现就在于路网的设计上。在城市这个复杂而有序的空间系统中, 交通工具在道路网络中从起点到达终点, 其耗时时间取决于两点: 其一是每个路段的自身通行条件: 限速规定、拥堵情况、路面条件、道路长度与宽度等等, 其二是每个路段与其他路段的连接情况, 即网络的结构。为了合理设计并规划城市路网, 我们需要对现实情况进行模型的抽象化, 且抽象化的模型易于计算与研究。早在 1968 年 Dietrich Braess<sup>[1]</sup>就发现了一个看似矛盾的现象: 在交通网络中增加一条道路反而会增加网络中所有用户的出行时间。对于此悖论, 几十年来许多人进行了研究与讨论, 但都限于单 O (origin) -D (destination) 且简单网络, 其原因在于此模型的数学计算过于繁杂, 而对于更复杂的情形只有通过计算机进行辅助计算, 于是提出优良的模型来进行计算机模拟对于路网优化是很有必要的。

本文 1 部分将首次提出并论证通过电路模拟非合作性网络的方法, 并介绍在计算机上进行路网分析的操作, 在 2 部分将对于典型的 Braess 模型通过计算机进行电路分析, 验证其已经发现的部分性质, 其步骤可以推广到更复杂的模型来进行, 从而可以更方便的进行对 Braess 悖论的讨论。

## 1 交通网络的电路模型

### 1.1 交通路网的性质

为对交通网络进行模型等效, 我们首先应分析实际交通路网的性质。对于所研究的路网, 通过数学的抽象化以及一定的近似, 可以得出以下几点:

1. 路网属于非合作交通网络, 即所有车辆的驾驶者没有互相的信息交流, 每个人选择的路径都是以自己所需时间最短为优先的, 不顾总体是否达到时间最优化; 相反的, 合作交通网络是指有一信息中心控制着所有驾驶者, 通过分析

每个人的信息 (始末点, 道路情况等等), 以总系统所需时间最短为优先, 指导驾驶者驶往哪条道路, 但可能会牺牲一部分人的利益。考虑到现实情况, 目前还没有这样的控制中心, 短期内也不会存在, 因为它需要获取每个人的行驶信息, 由于这些信息过于时效性 (行驶者可能会有个体的信息改变), 稍有偏差就会分析结果与现实不符, 而且一部分人的出行时间会被牺牲, 由于个体的自私性, 最终还会回归到非合作性网络;

2. 为了清晰的表示路网结构和性质, 我们引入有向图 (Directed graphs) 来阐述, 下图即为一例子:

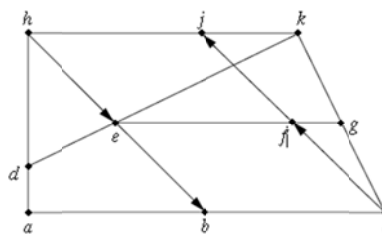


图 1

其中 a-k 称为节点, 代表道路中的路口, 连接节点的线段代表道路, 其中有的道路标有箭头, 即只能沿箭头方向行驶, 没标记的为双通道路, 为方便说明, 我们引入如下变量:

$\alpha$  表示图中的节点

$u$  表示图中的线段

$\varphi_u$   $u$  上的流量 (单位时间通过的车辆数)

$t_u$  通过  $u$  所需时间

3. 路网中每一驾驶者不重复通过同一道路, 即没有人“兜圈子”;

4. 路网中每条道路的流量都认为达到了动态平衡, 即不随时间改变, 对于实际情况可以认为是一系列平衡态随时间连续出现。易知, 研究模型的总流量也是与时间无关的;

5. 由于驾驶者都以自己的行驶时间最短为目标，故达到平衡后，对于一个新的驾驶者，他从起点到终点可以行驶的每条路线所需时间都相同（称为 Wardrop 用户均衡分配，在博弈论中属于非合作博弈中的 Nash 均衡解<sup>[2]</sup>）。原因是若不这样，则存在一条路线所需时间成本多于其它，在其上行驶的人必然会转移到其它路线，仍会达到用户均衡模式；

6. 通过对实际情况的近似，我们可以使用公式

$$t = \alpha + \beta\varphi$$

来描述通过每条道路所需时间和道路上流量的关系，其中 $\alpha$ 为道路上车辆极少，驾驶者不受其它车辆影响，单纯驶过道路所需时间，这个值通过统计得到，包括了大量车行驶的数据，合并了车速变化、路面不均匀、限速、等红灯等因素；而 $\beta$ 称为延迟参数，即在该道路上每增加单位流量时，所增加的出行时间，反映了道路拥堵的影响； $\varphi$ 为路段上的流量。

### 1.2 路网系统的等效电路

上小节已经给出了路网的抽象化模型，笔者通过类比思考，首次发现电路系统与路网系统有着良好的契合性，在数学层面上可以做到完全等价。下面将提出等效电路模型并分析可行性，我们做如下类比：

将描述交通网络的有向图看作一个电路系统的电路结构图，每条道路看成一条导线，每条道路的流量等效为导线上的电流强度，认为原网络的始末点为电路的电流输入点和输出点，变量的对应如下：

路网变量	电路变量
$t$	$U$ (电压降)
$\varphi$	$I$ (电流)
$\alpha$	$\varepsilon$ (电源)
$\beta$	$R$ (电阻)

表格 1

有向图与电路图的对应如下：

对于单通道路 AB：

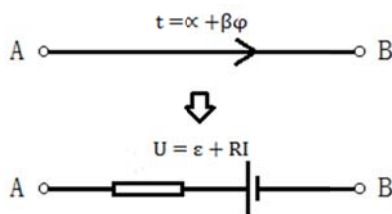


图 2

对于双通道路 AB，从 A 到 B 和从 B 到 A 是完全对称的，故可以将图 2 中的电路图取反向与原图并联，注意到道路的方向性，需要引入二极管来限定电流走向，最终有向图与电路图对应如下：

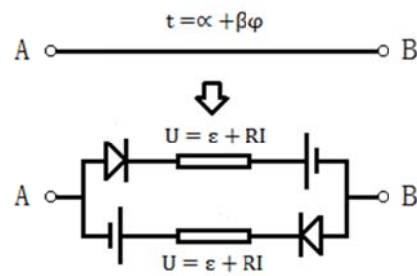


图 3

我们将分析定义的电路是否满足上文给出的交通路网的六点性质：

1. 路网属于非合作交通网络：在电路中载流体为电子，由电路的可叠加性可知，不同电子的宏观运动（沿各自导线路线运动）互不影响，这与交通网络的非合作性相符合；

2. 路网结构和性质可用有向图表示：电路同样可以用电路图这一特殊的有向图来描述，此点不再赘述；

3. 路网中每一驾驶者不重复通过同一道路：由环路定理，电流沿闭合电路环流一圈的电压降为零，在路网中表示为驾驶者绕一闭合道路循环行走所需时间为零，不需进行计算，即忽略车辆“兜圈子”的情形；

4. 路网中每条道路的流量都认为达到了动态平衡：如果限定了电流为稳恒的，那么也就认为路网中每条道路的流量都不随时间改变，达到了平衡；

5. 路网最终将达到用户均衡配流模式：在建立电路过程中实际已优先考虑了这一因素，认为从电流输入源 a 到电流输出源 b 的电压降为一定值，其实隐含了从不同路径从 a 到 b 的电压降相同，这在电路中是显而易见的，自然与交通网络中不同路径的时间成本相同所符合，这表明了电路中电流的分配实际上是 Nash 均衡解；

6. 通过每条道路的时间可以用  $t = \alpha + \beta\varphi$  表示：利用表格 1 中的变量替换，我们可以得到公式

$$U = \varepsilon + RI$$

这恰恰是基尔霍夫第二定律的形式，在图 2 和图 3 中我们可以看到相对应的元器件如何满足此式。

至此，我们已经从理论上寻找到了描述交通网络模型的电路，并且全方面符合普通路网模型的特征。

### 1.3 进行计算机模拟操作及实例分析

在成功的提出了路网的电路模型后，我们将利用它进行计算机模拟，实现对路网的分析。

本文分析电路所采用的工具是 NI Multisim 11.0 软件，为从所得结果判断两电路的优劣，在分析前需先考虑如下逻辑：

(1) 在交通网络规划中，假设有路网 1 和路网 2，分别存在  $n$  个和  $m$  个 0-D 对 (origin-destination pair)， $m > n$ ，分别为

$$\{a_{11}, b_{11}\}, \{a_{12}, b_{12}\}, \dots, \{a_{1n}, b_{1n}\}$$

$$\{a_{21}, b_{21}\}, \{a_{22}, b_{22}\}, \dots, \{a_{2m}, b_{2m}\}$$

认为所有道路上的流量为常量，不随时间变化。

经过排序，其中相同的始末点配对可表示为

$$\{a_i, b_i\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_i, b_i\} (0 < i \leq n)$$

(注意  $i$  若等于零，两个路网没有相同的始末点，那么两个路网的优劣分析将没有意义)

对于两电路，相同的始末点间的流量规定为相同，则定义

$t_k$  为路网 1 中从  $a_k$  到  $b_k$  的总时间

$t'_k$  为路网 2 中从  $a_k$  到  $b_k$  的总时间,  $k \in [1, i]$

认为路网 1 优于路网 2 的判断标准是:

对于  $\forall k \in [1, i]$ , 有

$$t_k \leq t'_k$$

(2) 在电路中，我们有相似的结构：假设有电路 1 和电路 2，分别有  $n$  个和  $m$  个电流流入点和流出点， $m > n$ ，分别为

$$\{a_{11}, b_{11}\}, \{a_{12}, b_{12}\}, \dots, \{a_{1n}, b_{1n}\}$$

$$\{a_{21}, b_{21}\}, \{a_{22}, b_{22}\}, \dots, \{a_{2m}, b_{2m}\}$$

认为所有电流都为稳恒的，不随时间变化。

经过排序，其中相同的流入流出点可表示为

$$\{a_i, b_i\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_i, b_i\} (0 < i \leq n)$$

(同样，如果  $i$  等于零，则两个电路没有比较的意义)

在电路分析中也可限定总电流一定，通过比较始末点的电势差来判别两电路的优劣，但实际操作不够简单，更方便的选择是始末点电压降恒定，即接入恒压源。对于两电路中相同的流入流出节点，接入相同的恒压源  $U_1, U_2, \dots, U_i$ ，于是我们定义

$I_k$  为电路 1 中从  $a_k$  到  $b_k$  的总电流

$I'_k$  为电路 2 中从  $a_k$  到  $b_k$  的总电流,  $k \in [1, i]$

认为路网 1 优于路网 2 的判断标准是:

对于  $\forall k \in [1, i]$ , 有

$$I_k \geq I'_k$$

于是由 (2) 中的分析，我们得到了通过计算机分析电路的判断方法，下面将举例演示具体操作:

考虑如下路网 A 和 B:

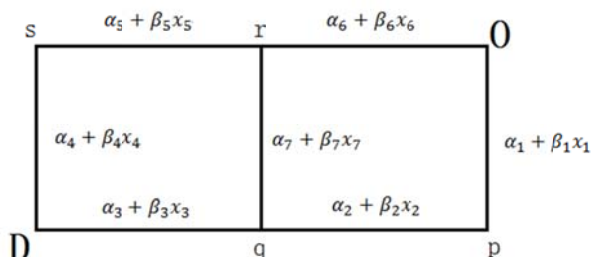


图 4: 路网 A 结构图

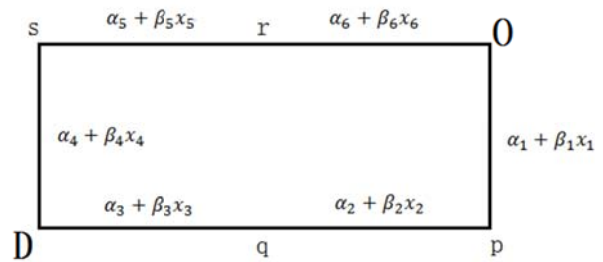


图 5: 路网 B 结构图

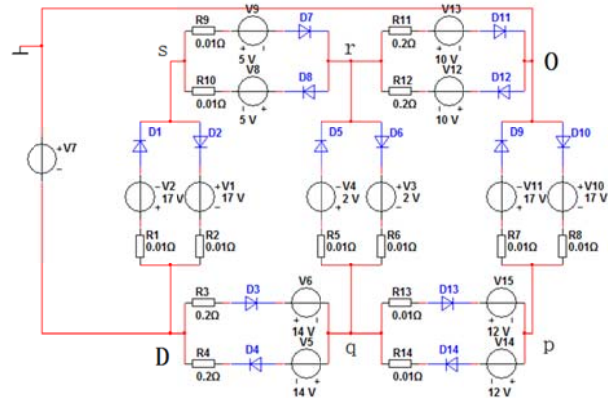
变量的值为:

编号	自由流出行时间 $\alpha$ (s)	延迟参数 $\beta$
1	17	0.01
2	12	0.01
3	14	0.2
4	17	0.01
5	5	0.01
6	10	0.2
7	2	0.01

表 2

其中 O 和 D 分别为起点和终点，所有道路为双向道路，路网 A 比路网 B 多了一条道路  $r_q$ ，需要研究的是增添的道路  $r_q$  是否对路网产生了优化。

首先利用 NI Multisim 11.0 分别画出路网 A 和 B 的等效电路图:



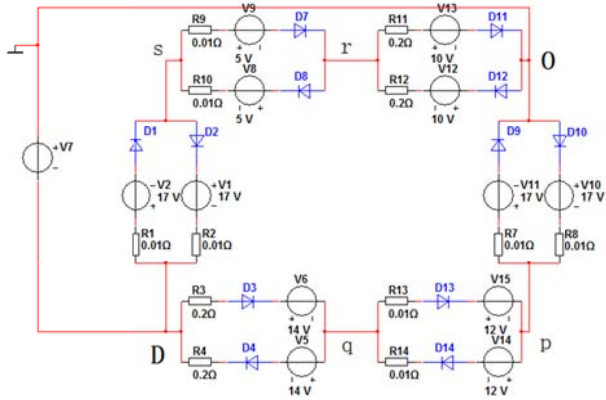


图 6: 路网 A、B 的等效电路图 A、B

通过软件中的“仿真”-“分析”-“DC Sweep”功能，以总电源的电压 V7 为自变量，输出电路 A、B 的总电流 I1、I2 随 V7 的变化曲线图，并加以讨论：

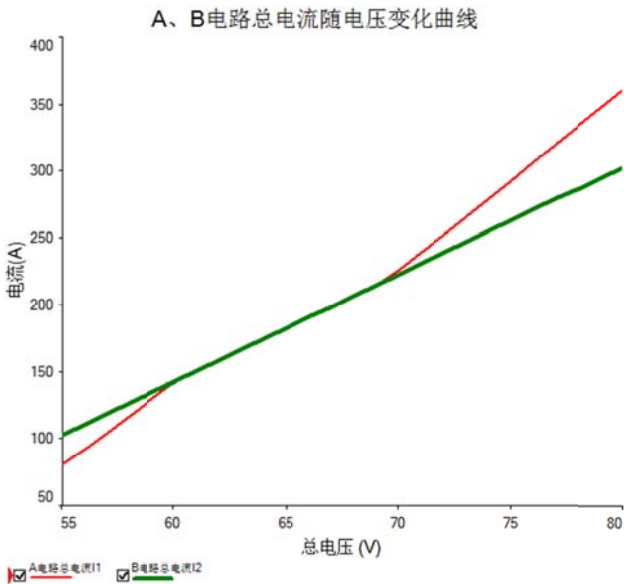


图 7

通过图 7 我们发现当电压  $U \in [55,60)$  时,  $I_1 < I_2$ ;  $U \in [60,69)$  时,  $I_1 = I_2$ ;  $U \in [69,80]$  时,  $I_1 > I_2$ . 转换成交通网络的语言为：

$\varphi \in [55,60)$  时, 路网 A 的流通性差于路网 B, 即新修一条道路不能起到缓解交通压力的效果, 反而会加剧交通拥堵;

$\varphi \in [60,69)$  时, 路网 A 的流通性等同于路网 B, 即新修一条道路对交通情况没有任何改变;

$\varphi \in [69,80]$  时, 路网 A 的流通性优于路网 B, 即新修的道路优化了原路网, 起到缓解交通压力的效果。

对于更复杂的路网, 可采取同样操作, 由于电路分析软件的强大性, 我们可以对大规模、多 O-D 路网进行分析讨论。

## 2 利用电路模拟分析 Braess 悖论

### 2.1 Braess 悖论的相关性质

上文在 1.1 小节中我们已经提及了实际交通网络的第一点性质：非合作性，即每个驾驶者从个人利益出发，选择自己出行成本最小的路径，而没有与他人进行信息交互，忽视了整体利益，Braess 悖论的产生便源于此。虽然 Braess 悖论乍看起来有悖常理，增加道路反而恶化了交通通达条件，但考虑到实际的用户均衡分配并非使整体最优化，每个人的自私性忽视了全体的利益。这在博弈论中表现为 Nash 平衡点不满足 Pareto 最优性，所以此悖论的出现并非那么令人费解。

随着城市路网拥挤的现象愈来愈严重，在尽可能的优化已有路网以及建设新路网的过程中，需要考虑到 Braess 悖论的影响。为此，利用上节提出的电路模拟方法，下面将分析前人已经进行的研究所得出的结论，充分展示电路模拟方法分析路网的适用性。首先将说明需要分析的性质：

(1) Dietrich Braess<sup>[3]</sup> (1968) 首次发现了 Braess 悖论，并给出了一个经典的 Braess 模型如下图：

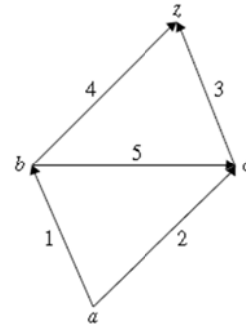


图 8

具体数据为

$$t_1(\varphi) = t_3(\varphi) = 10\varphi$$

$$t_2(\varphi) = t_4(\varphi) = 50 + \varphi$$

$$t_5(\varphi) = 10 + \varphi$$

Baress 对此模型进行了讨论，阐释了其中出现的悖论；

(2) ERIC I. PAS 和 SHARI L. PRINCIPIO<sup>[4]</sup> (1997) 通过一般化 Braess 给出的模型，构建了如下路网：

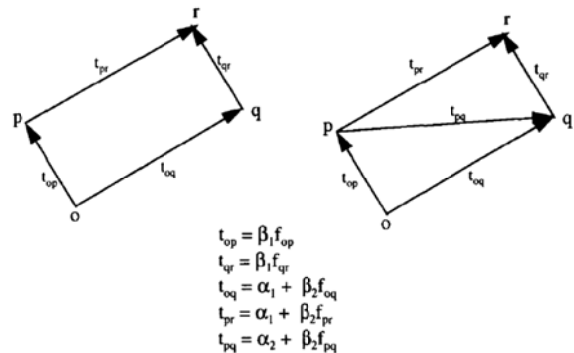


图 9

提出该悖论的出现与描述道路的变量  $\alpha$  和  $\beta$  以及总流量  $Q$

有关，并对于该简单模型给出了一般化的判断：

Situation	General expression
Braess' paradox does not occur because demand is too low.	$Q \leq \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{3\beta_1 + \beta_2}$
Braess' paradox occurs, but network expansion leads to improved system performance under marginal cost pricing.	$\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{3\beta_1 + \beta_2} < Q < \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2}$
Braess' paradox occurs, and network expansion does not lead to improved system performance even under marginal cost pricing.	$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} < Q < \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\beta_1 - \beta_2}$
Braess' paradox does not occur because demand is too high.	$Q \geq \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\beta_1 - \beta_2}$

表 3

下面我们将利用电流模拟方法验证以上结论。

### 2.2 对 Braess 悖论已知性质的电路模拟验证

(1) 对于 Braess 给出的模型，用 NI Multisim 11.0 做出电路图：

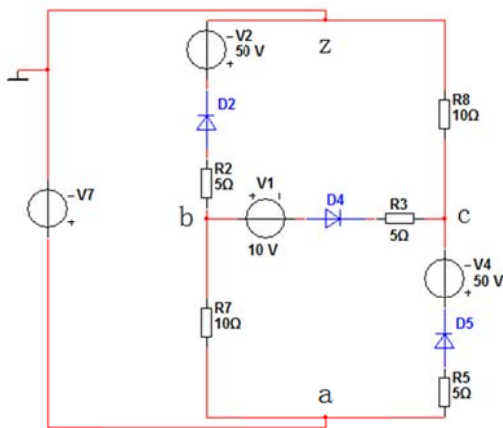


图 10 A 电路

去掉中间道路的模拟电路图为：

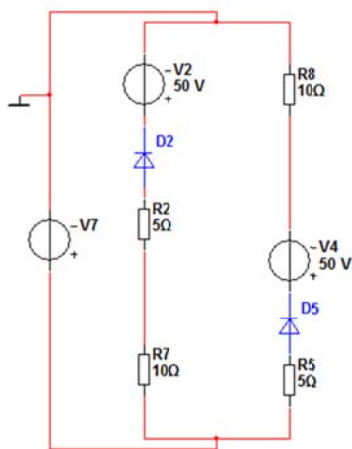


图 11 B 电路

Baress 模型的总流量为 6 个单位，对应电路表示为总电

流为 6 安培，通过改变电源电压，可以得到 A、B 电路总电流为 6 安培时，其电源的电压分别是 92.0V 和 83.0V，对应着时间成本为 92 和 83，这与 Baress 所得结果<sup>[3]</sup>相同；

(2) 对于 ERIC I. PAS 和 SHARI L. PRINCIPIO 得出的结论，下面将拿 Baress 最初的模型进行分析，而在 ERIC 和 SHARI 的原论文<sup>[4]</sup>中也将 Baress 模型进行了验证，我们会把结果进行比对。

首先论文中将 Baress 模型的总流量作为自变量，分析了每条路径分配的流量变化情况，做出曲线如下图：

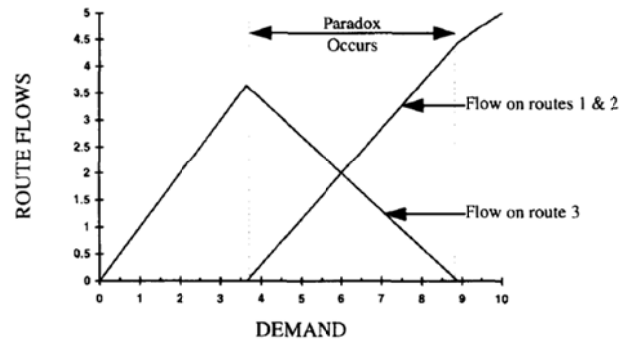


图 12

图 12 中横轴为总需求，即总流量，在电路模型中体现为总电流大小，横轴为三条路线上的流量，在图 10 中，路线 1 为 a-b-z，路线 2 为 a-c-z，路线 3 为 a-b-c-z，在电路模型中路线 1、2 的流量对应着 R5 或 R2 上的电流大小，路线 3 的流量对应着 R3 上电流的大小。利用 NI Multisim 11.0 软件，我们以总电流 I(V7) 为自变量，输出 I(R3)、I(R5) 随之变化的曲线图：

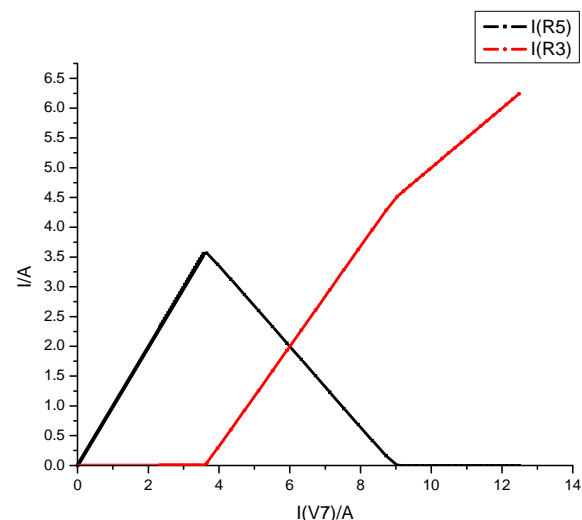


图 13

可以看到，图 12 和图 13 完全等同，这和预想的结果是一样的，体现了电路模型与路网模型的等价性。

我们再以总电源的电压 V7 为自变量，输出电路 A、B 的总电流 I1、I2 随 V7 的变化曲线图：

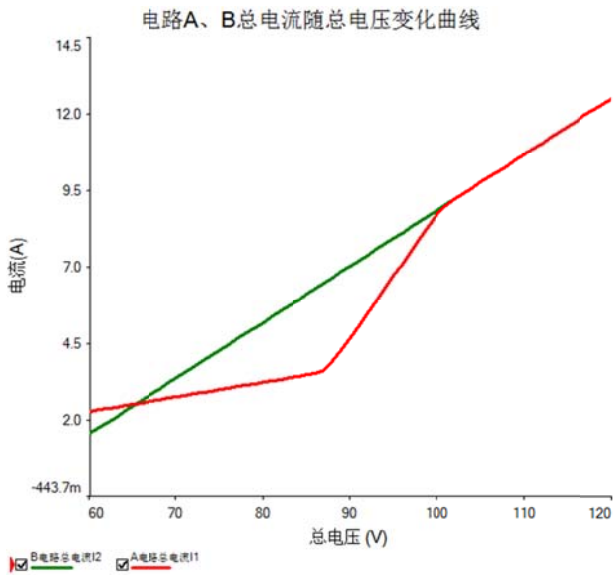


图 14

从图 14 可见，存在一段区域，有  $I_1 < I_2$ ，根据判断的标准，这一范围内存在 Braess 悖论。对曲线读取特殊点的坐标，发现存在 Braess 悖论的范围对应着电路总电流  $I \in (2.58, 8.89)$ ，即原路网的总流量  $Q \in (2.58, 8.89)$  时出现 Braess 悖论。原论文<sup>[4]</sup>中通过数学计算也得出了同样结果：

Situation	Braess' example (Braess, 1968)
Braess' paradox does not occur because demand is too low.	$Q \leq 2.58$
Braess' paradox occurs.	$2.58 < Q < 8.89$
Braess' paradox does not occur because demand is too high.	$Q \geq 8.89$

表 4

由此可见，利用电路模型分析 Braess 模型可以得到与数学计算相同的结果，且避免了繁琐的计算与分析。

### 2.3 复杂路网的推广研究

上一小节我们关于 Braess 原始模型对一些前人研究所得的结论进行了模拟与验证，可以发现：

由于 Braess 原始模型的简单性，通过单纯数学计算和利用电路模拟的工作量基本相同，而电路模拟也有缺点便是无法得到如表 3 中带有变量的判断式，只能对给出确切数据的路网进行分析。但这种缺点在分析复杂、多 0-D 路网的性质（例如是否存在 Braess 悖论）时并不重要，因为首先需要规定路网的结构，再计算得到关于路网每条道路变量的关系式（例如表 3 的形式），这在数学上和给出一电路结构，再利用基尔霍夫方程组进行变量的推导是等同的，如果路网或者电路很复杂，推导将相当繁琐（注意这并非是用已知数据进行计算）。即使得到了结果，如果路网结构有了改变，

还将重新进行推导。由此可见，在实际进行交通规划中，我们不需要对变量进行分析，只需要对经过统计调查所得的具体道路数据进行计算即可，电路法完全可以清晰、快速的进行处理。

在交通规划中，如果想要研究一般路网中的某条道路  $m$  是否造成 Braess 悖论，可以如下操作：

假设路网有  $n$  对起始点，先构建出相应电路，称原电路为 A 电路，将 A 删去  $m$  间导线及元件的电路为 B 电路，对电源进行编号

$$U_1, U_2, \dots, U_n$$

相应流过电源的电流为（带撇号的电流为 B 电路电流）

$$I_1, I_2, \dots, I_n \text{ 和 } I'_1, I'_2, \dots, I'_n$$

首先以 A、B 电路的  $U_1$  为自变量，输出  $I_1, I_2, \dots, I_n, I'_1, I'_2, \dots, I'_n$  随之变化的曲线图，类似于图 12，在图中两两电流相对应；

再以  $U_2$  为自变量，输出  $I_1, I_2, \dots, I_n, I'_1, I'_2, \dots, I'_n$  随之变化的曲线图；

.....

进行相同操作直到  $U_n$ 。

至此我们得到了  $n$  个曲线图，对于现实情况的  $I_1, I_2, \dots, I_n$  和  $I'_1, I'_2, \dots, I'_n$ ，可以在曲线图中读取对应的点，若有

$$I_i < I'_i (i \in [1, n])$$

则出现 Braess 悖论，需要考虑对相应路段进行优化。

### 3 反思与结语

1. 本文所提出的电路法模拟尚不成熟，还存在很多提升空间，比如可以编译软件进行模拟电路的批量绘图，否则对于复杂网络，输入其模拟电路亦较为繁琐；不过本文指出了一个新的分析路网的的方向，希望能有人对其进行完善，简化分析的复杂度；

2. 通过电学模型来进行交通网络的研究带给我们的启示是：要灵活运用不同学科的知识来对问题进行研究，物理模型也可以解决非物理模型，笔者相信一定还有很多需要人们发现的领域可以进行同类思考；

3. 关于本文的创作：在研究 Braess 悖论、考虑对城市交通路网的优化问题时，笔者联想到可以利用电磁学的电路模型对其类比。于是通过阅读诸多论文，我最终完善并论证了这一想法的可行性。在着手实施利用电路分析路网的操作时，笔者遭遇了诸多困难与弯路，于本文不一一言说，但研究过程的曲折加深了本人对理论的理解，磨练了进行研究所需要的坚韧精神，这才是进行本次电磁学小论文写作的涵义所在。

## 参考文献

- [1] Braess, D. Uebereinparadoxonaus der verkehrsplaning. *Unternehmenforschung*12, 258 - 268 (1968)
- [2] 董菁, 张佐. 非合作交通网络中的 Braess 悖论及其避免. *公路交通科技* 2004, 21(5)
- [3] Braess, D., Nagurney, A., Wakolbinger, T. On a paradox of traffic planning, Translation of the 1968 Article by Braess. *Trans. Sci.* 39, 446 - 450 (2005)
- [4] Eric I. Pas and Shari L. Principio. Braess' Paradox: Some New Insights. *Trans, m Res.-B*, Vol. 31. No. 3, pp. 265-276, 1997