用节点电压方法 求算电阻网格的等效电阻

2012级少年班学院 刘峻宇 赵文君
（按首字母顺序）
USTC东区
2013年.夏

contents

引言

我们经过大量的调研和缜密的思索，发现电路分析中的“节点电压方法”经（原创性的）改造后十分适合求解网格的等效电阻问题。于是，下面即将介绍这一算法，并且通过大量的例子，展示这种方法的威力。

众所周知，在恒定电流电路问题中，使用Kirchhoff定律无疑是非常简洁和方便的。但是对于离散网格的等效电阻问题，要统计出独立的支路和回路并逐一求解，直接使用定律或许较为困难。那么，能否避免这种繁杂的计算呢？

基本算法

现在我们要求节点 m ,n 之间的等效电阻。我们设外界向 m 输入 i 电流，再从 n 输出 i 电流。不妨认为输入为正，输出为负。显然此时其他的节点与外界无导线相连。于是电流分布为：

$$I_k=\begin{cases} i & k=m \\ -i & k=n \\ 0 & others \end{cases}$$

这表示任何一节点 k 被外界输入的电流大小。

基本算法

- 对于某个节点k，将所有与它直接相连的节点用k_1，k_2，……k_l表示，其中ℓ可能是自然数，也可能是正无穷。由Kirchhoff定律，我们有：

$$\sum_{p=1}^{l}\frac{\varphi_k-\varphi_{k_p}}{r_{k_p k}}=I_k$$

其中下标p遍历1,2，……ℓ

基本算法

- 不妨设一个电势基准点φ_1=0，则综合上面两个方程和电流分布方程可以列出方程组：

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^{l}\frac{\varphi_k-\varphi_{k_p}}{r_{k_p k}}=I_k \quad for\ every\ k \\ \varphi_1=0 \\ I_k=\begin{cases} i & k=m \\ -i & k=n \\ 0 & others \end{cases} \end{cases}$$

这就是所谓的“节点电压方程组”，如果它能唯一地解出m，n点的电势，则：

$$R_{mn}=\frac{1}{i}(\varphi_m-\varphi_n)$$

即为mn之间等效电阻。

基本算法

从上述算法的叙述过程可以保证它的正确性，但其完备性如何？也就是说，节点电压方程组能否唯一的解得m，n点的电势？再加强一些，节点电压方程组能否保证任何节点的电势都有唯一的解？

对于这个问题，在Kirchhoff定律诞生之初便有了解答，这就是：

基本算法

表征完备性的秩定理：

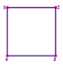
节点电压方程组有唯一的解。

这个定理的证明需要大量图论，拓扑学的概念和引理，来揭示所谓的“直接相连接的节点”的结构，并把它和方程组的秩联系起来。因此因篇幅所限，只作简单的介绍了。

早在1847年，拓扑学还没有被明确地界定为一门系统的数学学科，但天才的物理学家G.Kirchhoff以其超凡的数学能力和敏锐的物理直觉，凭借早期的，尚不甚清晰的拓扑学想法，探讨了线性分布 定律方程组的完备性问题，定义了节点，回路，独立网络，有向图等新的术语，并把他的成果写在了一篇名为《关于研究电流线性分布所得到的方程组的解》的论文中，这便是所谓的Kirchhoff定律的由来。十年后，Maxwell总结了Kirchhoff的成果，并给出了回路，支路电流法，节点电压法的秩定理的完满证明。这是现在所谓的“网络拓扑学”的基石之一。

随着拓扑学和线图理论的日趋完善，人们于20世纪重新表述了Kirchhoff定律。关于上述秩定理的若干引理，知识和严格证明，请参阅*J,C,Maxwell.Electricity and Magnetism.Oxford:Clarendon Press,3rd ed.,Vol.1,Ch.6,and Apendix,403-410,1892.*

简单情形示例



如图所示是一个平面正方形电阻网络，连线电阻均为r，求算任意两点间的电阻

解：建立电压方程：

$$\begin{cases} \frac{\varphi_1-\varphi_2}{r}+\frac{\varphi_1-\varphi_4}{r}=I_1 \\ \frac{\varphi_2-\varphi_1}{r}+\frac{\varphi_2-\varphi_3}{r}=I_2 \\ \frac{\varphi_3-\varphi_2}{r}+\frac{\varphi_3-\varphi_4}{r}=I_3 \\ \frac{\varphi_4-\varphi_1}{r}+\frac{\varphi_4-\varphi_3}{r}=I_4 \\ \varphi_1=0 \end{cases}$$

初始条件是：

$$I_k=\begin{cases} i & k=m \\ -i & k=n \\ 0 & others \end{cases}$$

从而：

$$R_{mn}=\frac{1}{i}(\varphi_m-\varphi_n)$$

由线性性，可设r，i=1。下面我们用matlab来求解这个方程组。

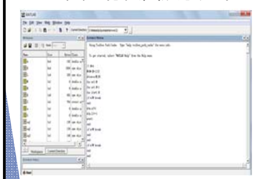
简单情形示例

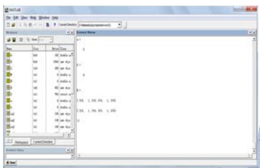
经过艰难的编写，我们给出的matlab代码如下：

```
N=4
M=N*(N-1)/2
A=zeros(M,N)
for m=1:M
for n=1:N-1
for l=n+1:N
if m>M break
end
A(m,n)=1
A(m,l)=-1
m=m+1
end
if m>M break
end
end
if m>M break
end
end
B=sym(A)
R=sym(zeros(1,M))
for i=1:M
syms u1 u2 u3 u4
u1=sym('0');
eq1=u1-u2+u1-u4-B(i,1);
eq2=u2-u1+u2-u3-B(i,2);
eq3=u3-u2+u3-u4-B(i,3);
eq4=u4-u1+u4-u3-B(i,4);
S=solve(eq1,eq2,eq3,eq4);
L=[u1,S.u2,S.u3,S.u4];
disp(L);
for j=1:4
if B(i,j)==1 a=j
end
end
for k=1:4
if B(i,k)==-1 b=k
end
end
R(i)=L(a)-L(b)
end
disp(R)
```

简单情形示例

其运行截图展示如下： 结果页：





简单情形示例

将结果整理成表格：

n m	1	2	3	4
1	0	3r/4	r	3r/4
2	3r/4	0	3r/4	r
3	r	3r/4	0	3r/4
4	3r/4	r	3r/4	0

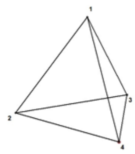
这表示对应标号两点间的等效电阻。

在有限网格问题中的应用

- Plato多面体网格电阻
  - 正四面体
  - 正六面体
  - 正八面体
  - 正十二面体
  - 正二十面体
- 足球形网格电阻

在有限网格问题中的应用

如图所示是一个正四面体电阻网络，连线电阻均为r，求算任意两点间的电阻。



在有限网格问题中的应用

Matlab代码：

```
N=4
M=N*(N-1)/2
A=zeros(M,N)
for m=1:M
for n=1:N-1
for l=n+1:N
if m>M break
end
A(m,n)=1
A(m,l)=-1
eq2=u2-u1+u2-u3+u2-u4-B(i,2);
eq3=u3-u1+u3-u2+u3-u4-B(i,3);
m=m+1
end
if m>M break
end
end
if m>M break
end
end
B=sym(A)
R=sym(zeros(1,M))
for i=1:M
syms u1 u2 u3 u4
eq2=u2-u1+u2-u3+u2-u4-B(i,2);
eq3=u3-u1+u3-u2+u3-u4-B(i,3);
eq4=u4-u1+u4-u2+u4-u3-B(i,4);
S=solve(eq1,eq2,eq3,eq4);
L=[u1,S.u2,S.u3,S.u4];
disp(L);
for j=1:4
if B(i,j)==1 a=j
end
end
for k=1:4
if B(i,k)==-1 b=k
end
end
R(i)=L(a)-L(b)
end
disp(R)
```

在有限网格问题中的应用

运行结果：

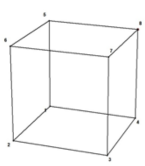
整理成下表：

m　n	1	2	3	4
1	0	r/2	r/2	r/2
2	r/2	0	r/2	r/2
3	r/2	r/2	0	r/2
4	r/2	r/2	r/2	0

back

在有限网格问题中的应用

如图所示是一个正六面体电阻网络，连线电阻均为r，求算任意两点间的电阻。



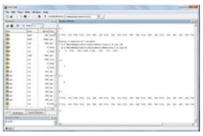
在有限网格问题中的应用

Matlab代码：

```
N=8
M=N*(N-1)/2
A=zeros(M,N)
for m=1:M
for n=1:N-1
for l=n+1:N
if m>M break
end
A(m,n)=1
A(m,l)=-1
m=m+1
end
if m>M break
end
end
if m>M break
end
end
B=sym(A)
R=sym(zeros(1,M))
for i=1:M
syms u1 u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8
u1=sym('0');
eq1=u1-u2+u1-u4+u1-u5-B(i,1);
eq2=u2-u1+u2-u3+u2-u6-B(i,2);
eq3=u3-u2+u3-u4+u3-u7-B(i,3);
eq4=u4-u1+u4-u3+u4-u8-B(i,4);
eq5=u5-u1+u5-u6+u5-u8-B(i,5);
eq6=u6-u2+u6-u5+u6-u7-B(i,6);
eq7=u7-u3+u7-u6+u7-u8-B(i,7);
eq8=u8-u4+u8-u5+u8-u7-B(i,8);
S=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8);
L=[u1,S.u2,S.u3,S.u4,S.u5,S.u6,S.u7,S.u8];
disp(L);
for j=1:8
if B(i,j)==1 a=j  end
end
for k=1:8
if B(i,k)==-1 b=k
end
end
R(i)=L(a)-L(b)
end
disp(R)
```

在有限网格问题中的应用

运行结果：



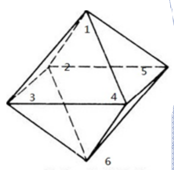
制表：

m n	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	7r/12	3r/4	7r/12	7r/12	3r/4	5r/6	3r/4
2	7r/12	0	7r/12	3r/4	3r/4	7r/12	3r/4	5r/6
3	3r/4	7r/12	0	7r/12	5r/6	3r/4	7r/12	3r/4
4	7r/12	3r/4	7r/12	0	3r/4	5r/6	3r/4	7r/12
5	7r/12	3r/4	5r/6	3r/4	0	7r/12	3r/4	7r/12
6	3r/4	7r/12	3r/4	5r/6	7r/12	0	7r/12	3r/4
7	5r/6	3r/4	7r/12	3r/4	3r/4	7r/12	0	7r/12
8	3r/4	5r/6	3r/4	7r/12	7r/12	3r/4	7r/12	0

back

在有限网格问题中的应用

如图所示是一个正八面体电阻网络，连线电阻均为r，求算任意两点间的电阻。



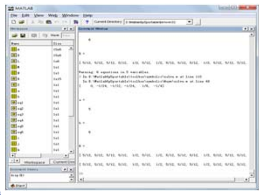
在有限网格问题中的应用

Matlab代码：

```
N=6
M=N*(N-1)/2
A=zeros(M,N)
for m=1:M
for n=1:N-1
for l=n+1:N
if m>M break
end
A(m,n)=1
A(m,l)=-1
m=m+1
end
if m>M break
End
end
if m>M break
end
end
B=sym(A)
R=sym(zeros(1,M))
for i=1:M
syms u1 u2 u3 u4 u5 u6
u1=sym('0');
eq1=u1-u2+u1-u3+u1-u4+u1-u5-B(i,1);
eq2=u2-u1+u2-u3+u2-u5+u2-u6-B(i,2);
eq3=u3-u1+u3-u2+u3-u4+u3-u6-B(i,3);
eq4=u4-u1+u4-u3+u4-u5+u4-u6-B(i,4);
eq5=u5-u1+u5-u2+u5-u4+u5-u6-B(i,5);
eq6=u6-u2+u6-u3+u6-u4+u6-u5-B(i,6);
S=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6);
L=[u1,S.u2,S.u3,S.u4,S.u5,S.u6];
disp(L);
for j=1:6
if B(i,j)==1 a=j
end
end
for k=1:6
if B(i,k)==-1 b=k
end
end
R(i)=L(a)-L(b)
end
disp(R)
```

在有限网格问题中的应用

运行结果：



制表：

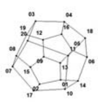
m n	1	2	3	4	5	6
1	0	5r/12	5r/12	5r/12	5r/12	r/2
2	5r/12	0	5r/12	r/2	5r/12	5r/12
3	5r/12	5r/12	0	5r/12	r/2	5r/12
4	5r/12	r/2	5r/12	0	5r/12	5r/12
5	5r/12	5r/12	r/2	5r/12	0	5r/12
6	r/2	5r/12	5r/12	5r/12	5r/12	0

back

在有限网格问题中的应用

如图所示是一个正十二面体电阻网络，连线电阻均为r，求算任意两点间的电阻。

由于点个数太多，导致情况较为复杂，一般情形下来简化的代码需要运行40min左右。因此，我们用对称性来简化。显然，每个点的地位相同，于是，对于给定的任意两个点，我们标其中一个点为“01”，在图中找到给定的另一个点，它的标号为“i”（如图所示的两位整数）。正二十面体也用同样的方法进行简化。



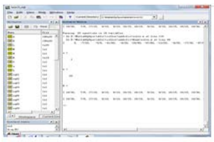
在有限网格问题中的应用

Matlab代码：

```
N=20
M=N*(N-1)/2
A=zeros(M,N)
for m=1:M
for n=1:N-1
for l=n+1:N
if m>M break
end
A(m,n)=1
A(m,l)=-1
m=m+1
end
if m>M break
end
end
if m>M break
end
end
B=sym(A)
R=sym(zeros(1,19))
for i=1:19
syms u01 u02 u03 u04 u05 u06 u07 u08 u09 u10
 u11 u12 u13 u14 u15 u16 u17 u18 u19 u20
u01=sym('0');
eq01=u01-u02+u01-u13+u01-u14-B(i,1);
eq02=u02-u01+u02-u15+u02-u172-B(i,2);
eq03=u03-u04+u03-u19+u03-u20-B(i,3);
eq04=u04-u03+u04-u16+u04-u18-B(i,4);
eq05=u05-u06+u05-u13+u05-u16-B(i,5);
eq06=u06-u05+u06-u14+u06-u18-B(i,6);
eq07=u07-u08+u07-u17+u07-u20-B(i,7);
eq08=u08-u07+u08-u15+u08-u19-B(i,8);
eq09=u09-u12+u09-u13+u09-u15-B(i,9);
eq10=u10-u11+u10-u14+u10-u17-B(i,10);
eq11=u11-u10+u11-u18+u11-u20-B(i,11);
eq12=u12-u09+u12-u16+u12-u19-B(i,12);
eq13=u13-u01+u13-u05+u13-u09-B(i,13);
eq14=u14-u01+u14-u06+u14-u10-B(i,14);
eq15=u15-u02+u15-u08+u15-u09-B(i,15);
eq16=u16-u04+u16-u05+u16-u12-B(i,16);
eq17=u17-u02+u17-u07+u17-u10-B(i,17);
eq18=u18-u04+u18-u06+u18-u11-B(i,18);
eq19=u19-u03+u19-u08+u19-u12-B(i,19);
eq20=u20-u03+u20-u07+u20-u11-B(i,20);
S=solve(eq01,eq02,eq03,eq04,eq05,eq06,eq07,eq08,eq09,eq10,eq11,eq12,eq13,eq14,eq15,eq16,eq17,eq18,eq19,eq20);
L=[u01,S.u02,S.u03,S.u04,S.u05,S.u06,S.u07,S.u08,S.u09,S.u10,S.u11,S.u12,S.u13,S.u14,S.u15,S.u16,S.u17,S.u18,S.u19,S.u20];
disp(L);
for j=1:20
if B(i,j)==1 a=j
end
end
for k=1:20
if B(i,k)==-1 b=k
end
end
R(i)=L(a)-L(b)
end
disp(R)
```

在有限网格问题中的应用

运行结果：



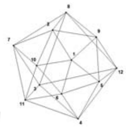
制表：

标号	R
01-02	19r/30
01-03	7r/6
01-04	17r/15
01-05	9r/10
01-06	9r/10
01-07	16r/15
01-08	16r/15
01-09	9r/10
01-10	9r/10
01-11	16r/15
01-12	16r/15
01-13	19r/30
01-14	19r/30
01-15	9r/10
01-16	16r/15
01-17	9r/10
01-18	16r/15
01-19	17r/15
01-20	17r/15

back

在有限网格问题中的应用

如图所示是一个正二十面体电阻网络，连线电阻均为r，求算任意两点间的电阻。



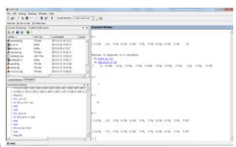
在有限网格问题中的应用

Matlab代码：

```
N=12
M=N*(N-1)/2
A=zeros(M,N)
for m=1:M
for n=1:N-1
for l=n+1:N
if m>M break
end
A(m,n)=1
A(m,l)=-1
m=m+1
end
if m>M break
end
end
if m>M break
end
end
B=sym(A)
R=sym(zeros(1,11))
for i=1:11syms u01 u02 u03 u04 u05 u06 u07 u08 u09 u10 u11 u12
u01=sym('0');
eq01=u01-u02+u01-u05+u01-u06+u01-u09+u01-u10-B(i,1);
eq02=u02-u01+u02-u07+u02-u08+u02-u09+u02-u10-B(i,2);
eq03=u03-u04+u03-u07+u03-u08+u03-u11+u03-u12-B(i,3);
eq04=u04-u03+u04-u05+u04-u06+u04-u11+u04-u12-B(i,4);
eq05=u05-u01+u05-u04+u05-u06+u05-u09+u05-u12-B(i,5);
eq06=u06-u01+u06-u04+u06-u05+u06-u10+u06-u11-B(i,6);
eq11=u11-u03+u11-u04+u11-u06+u11-u07+u11-u10-B(i,11);
eq12=u12-u03+u12-u04+u12-u05+u12-u08+u12-u09-B(i,12);
S=solve(eq01,eq02,eq03,eq04,eq05,eq06,eq07,eq08,eq09,eq10,eq11,eq12);
L=[u01,S.u02,S.u03,S.u04,S.u05,S.u06,S.u07,S.u08,S.u09,S.u10,S.u11,S.u12];
disp(L);
for j=1:12
if B(i,j)==1 a=j
end
end
for k=1:12
if B(i,k)==-1 b=k
end
end
R(i)=L(a)-L(b)
end
disp(R)
```

在有限网格问题中的应用

运行界面：



制表：

标号	R	标号	R
01-02	11r/30	01-08	7r/15
01-03	r/2	01-09	11r/30
01-04	7r/15	01-10	11r/30
01-05	11r/30	01-11	7r/15
01-06	11r/30	01-12	7r/15
01-07	7r/15		

back

在有限网格问题中的应用

试计算连线电阻均为r的“碳60结构”（足球形）任意两点间的等效电阻。

在有限网格问题中的应用

我们为了计算它，购买了一个足球，用记号笔对它进行标号如图所示。

在有限网格问题中的应用

Matlab代码：

```
N=60
M=N*(N-1)/2
A=zeros(N-1,N)
for m=1:M
for n=1:N-1
for l=n+1:N
if m>N-1 break
end
A(m,n)=1
A(m,l)=-1
m=m+1
end
if m>N-1 break
end
end
if m>N-1 break
end
end
B=sym(A)
R=sym(zeros(1,59)
)
```

```
syms u01 u02 u03 u04 u05 u06 u07 u08
u09 u10 u11 u12 u13 u14 u15 u16 u17 u18
u19 u20 u21 u22 u23 u24 u25 u26 u27 u28
u29 u30 u31 u32 u33 u34 u35 u36 u37 u38
u39 u40 u41 u42 u43 u44 u45 u46 u47 u48
u49 u50 u51 u52 u53 u54 u55 u56 u57 u58
u59 u60
u01=sym('0');
eq01=u01-u02+u01-u03+u01-u04-B(i,1);
eq02=u02-u01+u02-u07+u02-u09-B(i,2);
eq03=u03-u01+u03-u08+u03-u57-B(i,3);
eq04=u04-u01+u04-u05+u04-u59-B(i,4);
eq05=u05-u04+u05-u06+u05-u10-B(i,5);
eq06=u06-u05+u06-u07+u06-u13-B(i,6);
eq07=u07-u02+u07-u06+u07-u46-B(i,7);
eq08=u08-u03+u08-u09+u08-u31-B(i,8);
eq09=u09-u02+u09-u08+u09-u34-B(i,9);
eq10=u10-u05+u10-u11+u10-u60-B(i,10);
```

```
eq11=u11-u10+u11-u12+u11-u14-B(i,11);
eq12=u12-u11+u12-u13+u12-u16-B(i,12);
eq13=u13-u06+u13-u12+u13-u45-B(i,13);
eq14=u14-u11+u14-u15+u14-u48-B(i,14);
eq15=u15-u14+u15-u16+u15-u17-B(i,15);
eq16=u16-u12+u16-u15+u16-u43-B(i,16);
eq17=u17-u15+u17-u18+u17-u21-B(i,17);
eq18=u18-u17+u18-u19+u18-u47-B(i,18);
eq19=u19-u18+u19-u20+u19-u22-B(i,19);
eq20=u20-u19+u20-u21+u20-u25-B(i,20);
eq21=u21-u17+u21-u20+u21-u42-B(i,21);
eq22=u22-u19+u22-u23+u22-u52-B(i,22);
eq23=u23-u22+u23-u24+u23-u26-B(i,23);
eq24=u24-u23+u24-u25+u24-u29-B(i,24);
eq25=u25-u20+u25-u24+u25-u39-B(i,25);
eq26=u26-u23+u26-u27+u26-u53-B(i,26);
eq27=u27-u26+u27-u28+u27-u30-B(i,27);
eq28=u28-u27+u28-u29+u28-u32-B(i,28);
eq29=u29-u24+u29-u28+u29-u38-B(i,29);
eq30=u30-u27+u30-u31+u30-u56-B(i,30);
```

在有限网格问题中的应用

Matlab代码：

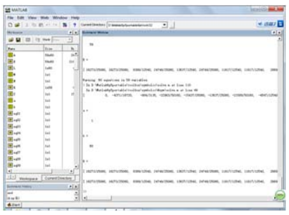
```
eq31=u31-u08+u31-u30+u31-u32-B(i,31);
eq32=u32-u28+u32-u31+u32-u33-B(i,32);
eq33=u33-u32+u33-u34+u33-u37-B(i,33);
eq34=u34-u09+u34-u33+u34-u35-B(i,34);
eq35=u35-u34+u35-u36+u35-u46-B(i,35);
eq36=u36-u35+u36-u37+u36-u41-B(i,36);
eq37=u37-u33+u37-u36+u37-u38-B(i,37);
eq38=u38-u29+u38-u37+u38-u39-B(i,38);
eq39=u39-u25+u39-u38+u39-u40-B(i,39);
eq40=u40-u39+u40-u41+u40-u42-B(i,40);
eq41=u41-u36+u41-u40+u41-u44-B(i,41);
eq42=u42-u21+u42-u40+u42-u43-B(i,42);
eq43=u43-u16+u43-u42+u43-u44-B(i,43);
eq44=u44-u41+u44-u43+u44-u45-B(i,44);
eq45=u45-u13+u45-u44+u45-u46-B(i,45);
eq46=u46-u07+u46-u35+u46-u45-B(i,46);
eq47=u47-u18+u47-u48+u47-u51-B(i,47);
eq48=u48-u14+u48-u47+u48-u49-B(i,48);
eq49=u49-u48+u49-u50+u49-u60-B(i,49);
eq50=u50-u49+u50-u51+u50-u55-B(i,50);
```

```
eq51=u51-u47+u51-u50+u51-u52-B(i,51);
eq52=u52-u22+u52-u51+u52-u53-B(i,52);
eq53=u53-u26+u53-u52+u53-u54-B(i,53);
eq54=u54-u53+u54-u55+u54-u56-B(i,54);
eq55=u55-u50+u55-u54+u55-u58-B(i,55);
eq56=u56-u30+u56-u54+u56-u57-B(i,56);
eq57=u57-u03+u57-u56+u57-u58-B(i,57);
eq58=u58-u55+u58-u57+u58-u59-B(i,58);
eq59=u59-u04+u59-u58+u59-u60-B(i,59);
eq60=u60-u10+u60-u49+u60-u59-B(i,60);
S=solve(eq01,eq02,eq03,eq04,eq05,eq06,eq07,
eq08,eq09,eq10,eq11,eq12,eq13,eq14,eq15,e
q16,eq17,eq18,eq19,eq20,eq21,eq22,eq23,eq2
4,eq25,eq26,eq27,eq28,eq29,eq30,eq31,eq32,
eq33,eq34,eq35,eq36,eq37,eq38,eq39,eq40,e
q41,eq42,eq43,eq44,eq45,eq46,eq47,eq48,eq4
9,eq50,eq51,eq52,eq53,eq54,eq55,eq56,eq57,
eq58,eq59,eq60);
```

```
L=[u01,S.u02,S.u03,S.u04,S.u05,S.
u06,S.u07,S.u08,S.u09,S.u10,S.u11
,S.u12,S.u13,S.u14,S.u15,S.u16,S.u
17,S.u18,S.u19,S.u20,S.u21,S.u22,
S.u23,S.u24,S.u25,S.u26,S.u27,S.u
28,S.u29,S.u30,S.u31,S.u32,S.u33,
S.u34,S.u35,S.u36,S.u37,S.u38,S.u
39,S.u40,S.u41,S.u42,S.u43,S.u44,
S.u45,S.u46,S.u47,S.u48,S.u49,S.u
50,S.u51,S.u52,S.u53,S.u54,S.u55,
S.u56,S.u57,S.u58,S.u59,S.u60];
disp(L);
for j=1:60
if B(i,j)==1 a=j
end
end
for k=1:60
if B(i,k)==-1 b=k
end
end
R(i)=L(a)-L(b)
end
disp(R)
```

在有限网格问题中的应用

运行结果：



在有限网格问题中的应用

制表：

01-41	1502r/1045
01-42	37859r/25080
01-43	4588r/3135
01-44	35369r/25080
01-45	32519r/25080
01-46	3733r/3135
01-47	36769r/25080
01-48	35369r/25080
01-49	33133r/25080
01-50	6767r/5016
01-51	1502r/1045
01-52	4588r/3135
01-53	35369r/25080
01-54	32519r/25080
01-55	1312r/1045
01-56	3733r/3135
01-57	24749r/25080
01-58	13637r/12540
01-59	24749r/25080
01-60	2669r/2280

在有限网格问题中的应用

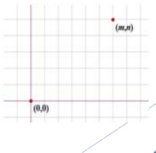
这就是对应标号的等效电阻的值。我们可以根据对称性来直接验证计算的正确性。

在无限网格问题中的应用

对于全空间无限网格而言，由于节点有无数多个，因此对应的节点电压方程组也有无数个未知数。这样的问题的一般解法，通常是通过Fourier分析来寻找精确解，再通过表征完备性的秩定理来保证正确性的。下面我们在节点电压法的框架下，重新严格地讨论这一方法，并且给出大量的原创性结果。

在无限网格问题中的应用

平面上的无限正方形电阻网格如下图所示，连线电阻均为r，求任意两点的等效电阻。



在无限网格问题中的应用

解：如图所示，我们把两个点中的任一点设为原点，沿着方格的边界建立坐标系，用坐标系中的整点来表示网络的节点，设另一个点的坐标为(m,n)。根据节点电压方法，对平面上的任意节点(k,l)，设电压为$\varphi_{k,l}$。

建立电压方程：

$$\frac{\varphi_{k,l}-\varphi_{k,l+1}}{r}+\frac{\varphi_{k,l}-\varphi_{k,l-1}}{r}+\frac{\varphi_{k,l}-\varphi_{k+1,l}}{r}+\frac{\varphi_{k,l}-\varphi_{k-1,l+1}}{r}=I_{k,l}\ \ for\ all\ (k,l)\ on\ R^2$$
$$\varphi_{0,0}=\tilde{\varphi}$$

其中 $\tilde{\varphi}$ 是某个给定的已知常量，我们把它作为电势的基准点。

即：

$$\varphi_{k,l}-\frac{1}{4}(\varphi_{k+1,l}+\varphi_{k-1,l}+\varphi_{k,l+1}+\varphi_{k,l-1})=\frac{r}{4}I_{k,l}\ \ \ for\ all\ (k,l)\ on\ R^2$$
$$\varphi_{0,0}=\tilde{\varphi}$$

在无限网格问题中的应用

初始条件为：

$$I_{k,l}=\begin{cases} I & (k,l)=(0,0) \\ -I & (k,l)=(m,n) \\ 0 & others \end{cases}$$

这样，原问题即转化成了无限个线性方程，无限个未知数的代数求解。这乍一看似乎很困难，然而我们可以通过某些手段来找到这个解。

我们设定：映照：$F:\mathrm{R}^2\mapsto C_\infty$ 满足 $F(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k,l}e^{i(kx+ly)}$

这个定义是形式的，也就是说，先不考察它的收敛性。

接着，我们在电压方程两边乘 $e^{i(kx+ly)}$ 并对一切k,l求和，即：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k,l}e^{i(kx+ly)}=\frac{1}{4}(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k+1,l}e^{i(kx+ly)}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k-1,l}e^{i(kx+ly)}+$$
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k,l+1}e^{i(kx+ly)}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k,l-1}e^{i(kx+ly)})+\frac{r}{4}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}I_{k,l}e^{i(kx+ly)}$$

在无限网格问题中的应用

很容易注意到一个小技巧，这就是：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k+1,l}e^{i(kx+ly)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k+1,l}e^{i[(k+1)x+ly]}e^{-ix}=e^{-ix}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k+1,l}e^{i[(k+1)x+ly]}$$

由于是对 R^2 求和，因此：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k+1,l}e^{i[(k+1)x+ly]}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k,l}e^{i(kx+ly)}=F(x,y)$$

于是有：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k+1,l}e^{i(kx+ly)}=e^{-ix}F(x,y)$$

同理：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k-1,l}e^{i(kx+ly)}=e^{ix}F(x,y)$$
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k,l+1}e^{i(kx+ly)}=e^{-iy}F(x,y)$$
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_{k,l-1}e^{i(kx+ly)}=e^{iy}F(x,y)$$

在无限网格问题中的应用

这可以直接从里面解出 F，即：

$$F=\frac{Ir}{2}\cdot\frac{1-e^{i(mx+ny)}}{2-\cos x-\cos y}$$

注意到分母可能为 0，但由于 F 是扩充复数，所以不会引起矛盾。

既然求出了 F，根据 *Fourier* 展开公式就自然的确定了系数：

$$\varphi_{k,l}=\mathrm{Re}[\frac{1}{4\pi^2}\iint_{[-\pi,\pi]^2}F(x,y)e^{-i(kx+ly)}dxdy]=\frac{Ir}{8\pi^2}\iint_{[-\pi,\pi]^2}\frac{\mathrm{Re}(e^{-i(kx+ly)}-e^{i(mx+ny)}e^{-i(kx+ly)})}{2-\cos x-\cos y}dxdy$$
$$=\frac{Ir}{8\pi^2}\iint_{[-\pi,\pi]^2}\frac{\cos(kx+ly)-\cos(mx-kx+ny-ly)}{2-\cos x-\cos y}dxdy$$

在无限网格问题中的应用

而

$$\varphi_{0,0}=\frac{Ir}{8\pi^2}\iint_{[-\pi,\pi]^2}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\cos x-\cos y}dxdy$$
$$\varphi_{m,n}=-\frac{Ir}{8\pi^2}\iint_{[-\pi,\pi]^2}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\cos x-\cos y}dxdy$$

记所求的等效电阻是$R^{(m,n)}$，以与下标相区别，那么

$$R^{(m,n)}=\frac{\varphi_{0,0}-\varphi_{m,n}}{I}=\frac{r}{4\pi^2}\iint_{[-\pi,\pi]^2}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\cos x-\cos y}dxdy$$

这就是（0,0）与（m,n）间等效电阻的解。 □

在无限网格问题中的应用

结论 1：用 *Mathematica* 符号计算来求解这个积分的精确值。

由于表达式很复杂，使用 *Fubini* 定理，消去其中一个变元，直接得到：

$$\frac{r}{4\pi^2}\iint_{[-\pi,\pi]^2}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\cos x-\cos y}dxdy=\frac{r}{\pi}\int_{[0,\pi]}\frac{d\beta}{\sinh|\alpha|}(1-e^{-|n\alpha|}\cos(m\beta))$$

其中 $\alpha=\ln(2-\cos\beta+\sqrt{\cos^2\beta-4\cos\beta+3})$

这样，就将二重积分化为了一重积分。

由线性性，我们只考虑 r 前面的系数，去掉 r 就可以了。

在无限网格问题中的应用

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	0	$\frac{1}{2}$	$2-\frac{4}{\pi}$	$\frac{17}{2}-\frac{24}{\pi}$	$40-\frac{368}{3\pi}$	$\frac{401}{2}-\frac{1880}{3\pi}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi}$	$\frac{46}{3\pi}-4$	$\frac{80}{\pi}-\frac{49}{2}$	$\frac{6646}{15\pi}-140$
2	$2-\frac{4}{\pi}$	$-\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi}$	$\frac{8}{3\pi}$	$\frac{1}{2}+\frac{4}{3\pi}$	$6-\frac{236}{15\pi}$	$\frac{97}{2}-\frac{2236}{15\pi}$
3	$\frac{17}{2}-\frac{24}{\pi}$	$\frac{46}{3\pi}-4$	$\frac{1}{2}+\frac{4}{3\pi}$	$\frac{46}{15\pi}$	$\frac{24}{5\pi}-\frac{1}{2}$	$\frac{998}{35\pi}-8$
4	$40-\frac{368}{3\pi}$	$\frac{80}{\pi}-\frac{49}{2}$	$6-\frac{236}{15\pi}$	$\frac{24}{5\pi}-\frac{1}{2}$	$\frac{352}{105\pi}$	$\frac{1}{2}+\frac{40}{21\pi}$
5	$\frac{401}{2}-\frac{1880}{3\pi}$	$\frac{6646}{15\pi}-140$	$\frac{97}{2}-\frac{2236}{15\pi}$	$\frac{998}{35\pi}-8$	$\frac{1}{2}+\frac{40}{21\pi}$	$\frac{1126}{315\pi}$

这就是m,n取一些特定值时的等效电阻的精确值。由此可以看出，当m=1，n=0时，电阻为原电阻的一半，这和对称性给出的初等结果是一样的。

在无限网格问题中的应用

结论 2：围绕这个积分的一些定理如下：

下面的定理是关于这个积分的数学结论。其严格证明放在附录中以便查阅。其中有不少内容是原创的。

定理 2.1（对易性）：$R^{(m,n)}=R^{(n,m)}$。

定理 2.2（轴上表达式的简化）：

$$R^{(n,0)}=\frac{r}{\pi}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{1-\cos(2mx)}{\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$$

$$R^{(0,n)}=\frac{r}{\pi}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{1-\cos(2nx)}{\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}}dx\text{。}$$

定理 2.3（无界性）：

积分：$R^{(m,n)}=\frac{r}{4\pi^2}\iint_{[-\pi,\pi]^2}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\cos x-\cos y}dxdy$ 对于 $(m,n)\in\square^2$ 没有上界

定理 2.4：（均值定理）：

$$R^{(m,n)}=\frac{1}{4}(R^{(m+1,n)}+R^{(m-1,n)}+R^{(m,n+1)}+R^{(m,n-1)})\text{。}$$

在无限网格问题中的应用

(3) R^3 中的无限立方体网格，任意一条线的电阻均为 r，以任一点为原点，沿着边建立 R^3 正交系，那么原点与任一点（m,n,l）的等效电阻：

$$R^{(m,n,l)}=\frac{r}{8\pi^3}\iiint_{[-\pi,\pi]^3}\frac{1-\cos(mx+ny+lz)}{3-\cos x-\cos y-\cos z}dxdydz\text{。}$$

对于(3)有一个与二维情况不同的地方需要交代，那就是 R^3 中的等效电阻所取的值域是有界的，因为：

$$R^{(m,n,l)}=\frac{r}{8\pi^3}\iiint_{[-\pi,\pi]^3}\frac{1-\cos(mx+ny+lz)}{3-\cos x-\cos y-\cos z}dxdydz<\frac{r}{8\pi^3}\iiint_{[-\pi,\pi]^3}\frac{1}{3-\cos x-\cos y-\cos z}dxdydz$$

而由数学知道，后者是有限的。 如下：

```
In[1]:= NIntegrate[1 / (3 - Cos[x] - Cos[y] - Cos[z]), {x, -π, π}, {y, -π, π},
  {z, -π, π}]
Out[1]= 125.38
integer part | digits | root approximant | precision | more...
```

上面是 *Mathematica* 对此的数值积分，精确到 0.01。

在无限网格问题中的应用

下面一张图更能反映着两个积分的重要区别。

```
In[1]:= NIntegrate[1 / (2 - Cos[x] - Cos[y]), {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}]
NIntegrate::inumri :
 The integrand 1/(2 - Cos[x] - Cos[y]) has evaluated to Overflow, Indeterminate, or Infinity for all sampling
  points in the region with boundaries {{0., 9.35762×10^-14}, {0, 1}}. >>
In[3]:= NIntegrate[1/(3 - Cos[x] - Cos[y] - Cos[z]), {x, -π, π}, {y, -π, π}, {z, -π, π}]
Out[3]= 125.38
```

在无限网格问题中的应用

也就是说，对于 R^3 中的无限立方体网格，笔者证明了任何两个点的等效电阻值，不论它们相距多远，总是小于125.39r。这与二维情况的无界性完全不同，是相当不可思议的。

写在最后

思考题 2：本文讨论的结论是否可以反过来证明一些数学中较为困难的积分恒等式和不等式？比如，一维的无限电阻网格建系类似于无限大平面网络问题，那么如果证明了：

$$R^{(m)}=\frac{r}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\frac{1-\cos(mx)}{1-\cos x}dx$$

又由物理显然知道：

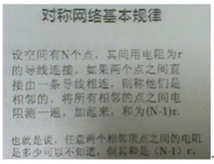
$$R^{(m)}=mr$$

那么是否就简洁地证明了几百年前的难题（*Fourier* 积分定理）：

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin mx}{\sin x}\right)^2=m\pi \ ?$$

写在最后

思考题 3：我国著名物理学家叶邦角教授曾提出过所谓的"对称网络基本规律"，这甚至成为了高中物理学竞赛的必备定理之一：


对称网络基本规律

设空间有N个点，其间用电阻为r的导线连接。如果两个点之间直接由一条导线相连，则称他们是相邻的。将所有相邻的点之间电阻测一遍，加起来，和为(N-1)r.

也就是说，任意两个相邻顶点之间的电阻是多少可以不知道，但其和是（N-1）r.

那么，用本文介绍的方法该如何证明，和更加深入的探讨它？

写在最后

思考题 5：本文计算了 R^3 中的无限立方体网格的电阻上界。但这只是一个放缩估计。由数学中实数空间的完备性断言上确界必然存在，试问它是多少？它是否是无限网格的各点在离原点距离趋于无穷时的极限？

思考题 6：本文的几个无穷网格示例，其等效电阻值沿坐标的单调性如何？

附录

由于 $R^{(0,0)}=0$，求和得到：

$$R^{(m,0)}>\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{2q-1}$$，其中 $m>1$

当 m 趋于正无穷时，后面的级数因调和性而发散，因此：

$$R^{(+\infty,0)}=+\infty$$

这保证了定理的成立。

定理 2.4：直接代入 $R^{(m,n)}=\frac{r}{4\pi^2}\iint_{[-\pi,\pi]^2}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\cos x-\cos y}dxdy$ 即可验证它是显然的。

参考资料

[1].G. Venezian.''On the resistance between two points on a grid,''Am.J.Phys.62,1000-1004.1994
[2].石长春,李翌,张霖涛,等."平面无穷网络的等效电阻:上[J],"大学物理,1995,14(12),42.
[3].石长春,李翌,张霖涛,等."平面无穷网络的等效电阻:续[J],"大学物理,1996,15(1),40-41.
[4].Krzysztof Giaro."A network of Resistors in Young Physicists Rearsearch Paper," M.Warazmoalnstytut Ftzyki pan,1998.27-34.
[5].G,Kirchhoff."Ueber die auflosung der Gleichungen aufwelche man bei der Untersuchungen der linear Verteilung galvanischer strome gefuhrt wird,"Gesammelte Abhandlungen 22-33,Annalen der Physik Vol.72(1847).497-508.
[6].J,C,Maxwell.Electricity and Magnetism.Oxford:Clarendon Press,3rd ed.,Vol.1,Ch.6,and Apendix,403-410,1892.
[7].胡友秋,程福臻,叶邦角.电磁学与电动力学[上册].科学出版社.2008.89-114.