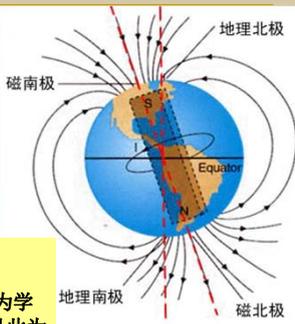


地磁场产生机制的探究

地空学院 李晓磊 蔡界

引言：地球具有一个适宜的**磁场**，对保护生命不受来自太阳的高能带电粒子与射线破坏起到了至关重要的作用。



地磁场成因机制的学说中
自发电机学说是目前最为学术界所接受的学说，以下我将以此为基础，探究一种**可能机制**描述46亿年前地磁场产生的过程。

要点：

- 一、物质流切割磁感线产生感应电流
- 二、初始感应电流产生磁场 \vec{B}' 的分布
- 三、地磁场自激正反馈机制的构成

一.物质流切割磁感线产生感应电流

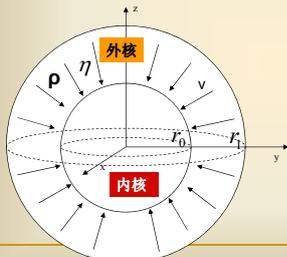
物质流切割磁感线产生感应电流

目标：开始瞬间**感应电流密度**在极坐标下**分布函数**

$$\vec{j}(r, \theta, \varphi)$$

一.物质流切割磁感线产生感应电流

能量来源——物质流



力平衡方程：

$$\frac{GM(m - \rho V)}{r^2} - \eta v = 0$$
 特别的：

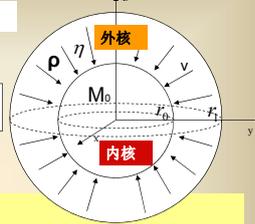
$$\frac{GM_0(m - \rho V)}{r_0^2} - \eta v_0 = 0$$
 质量：

$$M = M_0 + \int_{r_0}^r 4\pi r^2 \rho dr$$

$$= M_0 + \frac{4}{3}\pi \rho (r^3 - r_0^3)$$

一.物质流切割磁感线产生感应电流

能量来源——物质流



由上三式可得：

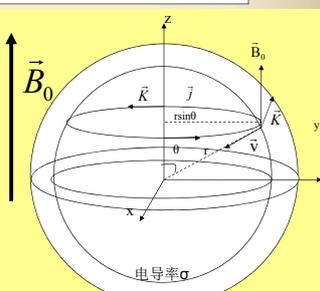
$$v(r) = \left(1 - \frac{4\pi \rho r_0^3}{3M_0}\right) \frac{r_0^2 v_0}{r^2} + \frac{4\pi \rho r_0^2 v_0}{3M_0} r \quad (*)$$

一、物质流切割磁感线产生感应电流

“种子” —— **星际磁场** \vec{B}_0
or **太阳磁场**

物质流向地心运动会切割磁感线，产生感应电流。

由 $\vec{K} = \vec{v} \times \vec{B}_0$
 $K = B_0 v \sin \theta$
和欧姆定律微分形式
 $\vec{j} = \sigma \vec{K}$
得： $j = \sigma B_0 v \sin \theta$



电导率 σ

一、物质流切割磁感线产生感应电流

将(*)代入 $j = \sigma B_0 v \sin \theta$

得极坐标下 **感应电流密度** 大小在 **外核处** 分布：

$$j(r, \theta, \varphi) = \sigma B_0 \left[\left(1 - \frac{4\pi\rho r_0^3}{3M_0}\right) \frac{r_0^2 v_0}{r^2} + \frac{4\pi\rho r_0^2 v_0}{3M_0} r \right] \sin \theta$$

$(r_0 < r < r_1)$

方向为 $\hat{\varphi}$ 方向

要点：

- 一、物质流切割磁感线产生感应电流
- 二、初始感应电流产生磁场 \vec{B}' 的分布
- 三、地磁场自激正反馈机制的构成

二、初始感应电流产生磁场的分布

感应电流产生磁场
磁感应强度 \vec{B}' 分布

目标：

- (1) 求外核区 \vec{B}' 沿 \vec{B}_0 方向分量，看是否加强了 \vec{B}_0
- (2) 根据地核外 \vec{B}' 分布，与当前地磁场相比较

二、初始感应电流产生磁场的分布

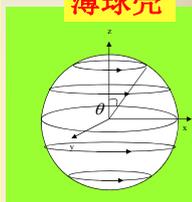
外核中每个厚 dr 的薄球壳里：

电流面密度：
 $i = j dr$
 $= \sigma B_0 v \sin \theta dr$
 $= (\sigma B_0 v dr) \sin \theta$

可算得薄球壳产生的磁场：

$$d\vec{B} = \begin{cases} \frac{2\mu_0 \sigma B_0 v dr}{3} \hat{z} & r' < r \\ \frac{\mu_0 \sigma B_0 v r^3 dr}{3r'^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' - \hat{z}] & r' > r \end{cases}$$

薄球壳



二、初始感应电流产生磁场的分布

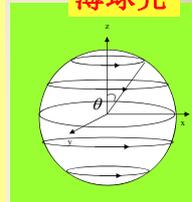
结合(*)：

$$v = \left(1 - \frac{4\pi\rho r_0^3}{3M_0}\right) \frac{r_0^2 v_0}{r^2} + \frac{4\pi\rho r_0^2 v_0}{3M_0} r$$

令 $C_1 = \frac{2\mu_0 \sigma B_0 r_0^2 v_0}{3}$ ， $C_2 = 1 - \frac{4\pi\rho r_0^3}{3M_0}$ ，
 $C_3 = \frac{4\pi\rho r_0^2 v_0}{3M_0}$ ，则最终可得

$$d\vec{B} = \begin{cases} C_1 \left(C_2 \frac{1}{r^2} + C_3 r \right) dr \hat{z} & r' < r \\ \frac{C_1}{2r'^3} (C_2 r + C_3 r^4) dr [3(\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' - \hat{z}] & r' > r \end{cases}$$

薄球壳



二、初始感应电流产生磁场的分布

薄球壳 → 厚球壳

1) $r' < r_0$ 时, 即**内核区**:
所有薄球壳产生的总磁场:

$$\vec{B}' = \int_{r_0}^{r_1} C_1 (C_2 \frac{1}{r^2} + C_3 r) dr \hat{z} = [C_1 C_2 (\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}) + \frac{C_1 C_3}{2} (r_1^2 - r_0^2)] \hat{z}$$

2) $r' > r_1$ 时, 即**地核之外**:
所有薄球壳产生的总磁场:

$$\vec{B}' = \int_{r_0}^{r_1} \frac{C_1}{2r'^3} (C_2 r + C_3 r^4) [3(\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' - \hat{z}] dr$$

$$= \frac{C_1}{2r'^3} [\frac{C_2}{2} (r_1^2 - r_0^2) + \frac{C_3}{5} (r_1^5 - r_0^5)] [3(\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' - \hat{z}]$$

二、初始感应电流产生磁场的分布

薄球壳 → 厚球壳

3) $r_0 \leq r' \leq r_1$ 时, 即**外核区**:
所有薄球壳产生的总磁场:

$$\vec{B}' = \int_{r_0}^{r'} \frac{C_1}{2r'^3} (C_2 r + C_3 r^4) dr [3(\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' - \hat{z}] + \int_{r'}^{r_1} C_1 (C_2 \frac{1}{r^2} + C_3 r) dr \hat{z}$$

$$= \frac{3C_1}{2r'^3} [\frac{C_2}{2} (r'^2 - r_0^2) + \frac{C_3}{5} (r'^5 - r_0^5)] (\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' +$$

$$\frac{C_1}{2r'^3} [\frac{3C_2}{2} r'^2 + (C_3 r_1^2 - \frac{2C_2}{r_1}) r'^3 - \frac{6C_3}{5} r'^5 + \frac{C_2}{2} r_0^2 + \frac{C_3}{5} r_0^5] \hat{z}$$

二、初始感应电流产生磁场的分布

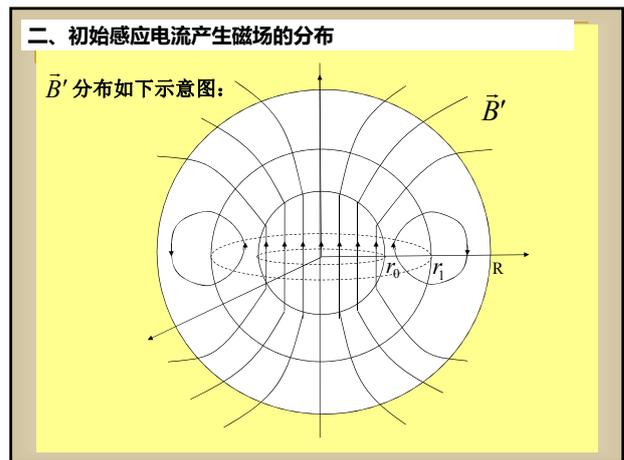
当前的数值:

外核内表面距地心: $r_0 = 1.667 \times 10^6 m$
 外表面距地心: $r_1 = 3.471 \times 10^6 m$
 外核密度: $\rho = 9.71 \times 10^3 kg \cdot m^{-3}$
 地核总质量: $M_1 = 1.88 \times 10^{24} kg$
 可得内核质量: $M_0 = M_1 - \frac{4}{3} \pi \rho (r_1^3 - r_0^3) = 3.675 \times 10^{23} kg$

外核电阻率: $\sigma = 3 \times 10^3 \Omega^{-1} m^{-1}$
 外界磁场磁感应强度: $B_0 = 3 \times 10^{-11} T$
 内核表面物质下沉速率: $v_0 = 1 ms^{-1}$

$$C_1 = \frac{2\mu_0 \sigma B_0 r_0^2 v_0}{3} = 20.95 Tm$$

$$C_2 = 1 - \frac{4\pi \rho r_0^3}{3M_0} = 0.487$$

$$C_3 = \frac{4\pi \rho}{3M_0} = 1.106 \times 10^{19} m^{-3}$$


二、初始感应电流产生磁场的分布

感应电流产生磁场

磁感应强度 \vec{B}' 分布

目标:

→ (1) 求外核区 \vec{B}' 沿 \vec{B}_0 方向分量, 看是否加强了 \vec{B}_0

(2) 根据 \vec{B}' 分布, 与当前地磁场相比较

二、初始感应电流产生磁场的分布

$r_0 \leq r' \leq r_1$ 时: 极坐标系下
 \vec{B}' Z轴方向分量:

$$B'_z(r', \theta)$$

$$= \vec{B}' \cdot \hat{z}$$

$$= \frac{3C_1}{2r'^3} [\frac{C_2}{2} (r'^2 - r_0^2) + \frac{C_3}{5} (r'^5 - r_0^5)] \cos^2 \theta$$

$$+ \frac{C_1}{2r'^3} [\frac{3C_2}{2} r'^2 + (C_3 r_1^2 - \frac{2C_2}{r_1}) r'^3 - \frac{6C_3}{5} r'^5 + \frac{C_2}{2} r_0^2 + \frac{C_3}{5} r_0^5]$$

二、初始感应电流产生磁场的分布

外核区不同 θ 下 B'_z 与 r' 的关系

从 $B'_z - r'$ 图中可得，除了极少数区域内 $B'_z < 0$ ，外核内绝大多数区域内 $B'_z > 0$ ，加强了 \vec{B}_0

二、初始感应电流产生磁场的分布

感应电流产生磁场

磁感应强度 \vec{B}' 分布

目标：

(1)求外核区 \vec{B}' 沿 \vec{B}_0 方向分量，看是否加强了 \vec{B}_0

→ (2)根据 \vec{B}' 分布，与当前地磁场相比较

二、初始感应电流产生磁场的分布

已证，地核外 ($r' > r_1$)

$$\vec{B}' = \frac{C_1}{2r'^3} \left[\frac{C_2}{2}(r_1^2 - r_0^2) + \frac{C_3}{5}(r_1^5 - r_0^5) \right] [3(\hat{z} \cdot \hat{r}')\hat{r}' - \hat{z}]$$

$$= \frac{1.37 \times 10^{14} Tm^3}{r'^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r}')\hat{r}' - \hat{z}]$$

为一磁偶极子场，与现实相符

二、初始感应电流产生磁场的分布

(1)两极地区: $r' = 6.357 \times 10^6 km$ $\hat{r}' = \pm \hat{z}$

理论值 $\vec{B}' = \frac{1.37 \times 10^{14} Tm^3}{r'^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r}')\hat{r}' - \hat{z}] = 1.07 \times 10^{-6} T \hat{z}$

当前实际值: $B = 7 \times 10^{-5} T$

(2)赤道地区: $r' = 6.378 \times 10^6 km$ $\hat{r}' \cdot \hat{z} = 0$

理论值 $\vec{B}' = \frac{1.37 \times 10^{14} Tm^3}{r'^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r}')\hat{r}' - \hat{z}] = 5.28 \times 10^{-7} T (-\hat{z})$

当前实际值: $B = 3 \times 10^{-5} T$

开始瞬间磁感应强度约比当前值小1-2个数量级，它仍十分微弱

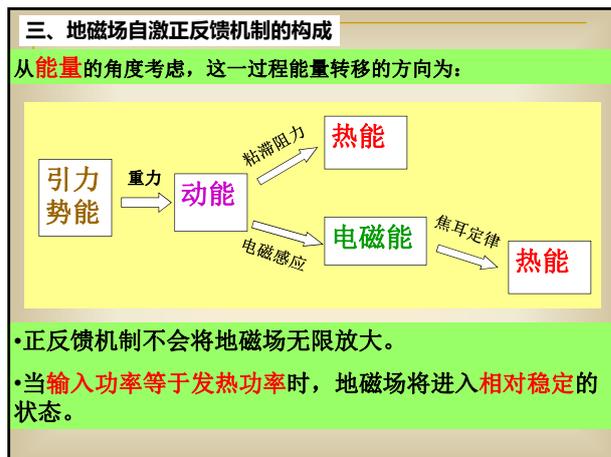
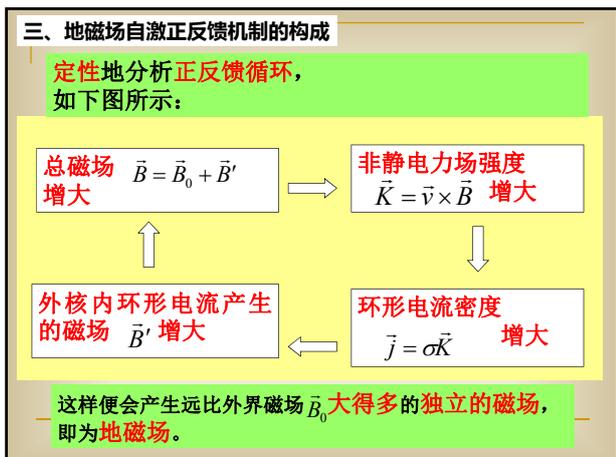
要点:

- 一、物质流切割磁感线产生感应电流
- 二、初始感应电流产生磁场 \vec{B}' 的分布
- 三、地磁场自激正反馈机制的构成

开始瞬间之后:

1. 物质流会受磁场对其的安培力;
2. 外核内还会产生感生的涡旋电场;
3. 并且外核内磁场在叠加后，已经不是匀强场了;
-

种种原因导致此后的磁场分布难以定量分析。



总结：

最后概括这种地磁场产生机制如下：

1. 地球形成之初，太阳系中会存在星际磁场或者太阳自身产生的磁场 \vec{B}_0 ——播种机

2. 地球刚形成时，外核中存在一个方向指向地心的物质流 ——能源

3. 物质流切割磁感线，产生感应电动势，使外核中出现环形感应电流。

4. 环形电流产生磁场，在外核绝大多数区域内加强了 \vec{B}_0

5. 以上3-4过程构成**正反馈循环**，最终产生远比外界磁场大得多的独立的磁场，即为地磁场 \vec{B}' 。

致谢：1. 《地球环境科学导论》第二版
孙立广 谢周青 杨晓勇 谢智 编著
2. 百度百科“地磁场”条目
3. 孙腊珍老师的指导与地空学院大一地物班同学们的建议与支持

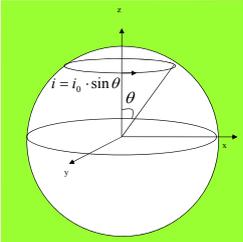
谢谢!

附录：初始感应电流产生磁场磁感应强度在空间任意一点的分布

薄球壳

以下讨论空间内任一点的自激磁感应强度 \vec{B}' 。

理论上可证得：半径为 r 的带有垂直于 z 轴的环形电流，且电流面密度为 $i = i_0 \cdot \sin \theta$ 的球壳内外磁场分布为：

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{2\mu_0 i_0}{3} \hat{z} & r' < r \\ \frac{\mu_0 i r^3}{3r'^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r}')\hat{r}' - \hat{z}] & r' > r \end{cases}$$


附录：初始感应电流产生磁场磁感应强度在空间任意一点的分布

薄球壳

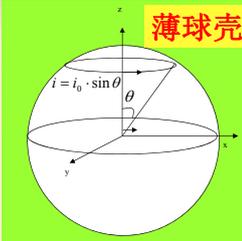
对本文中每个球壳，

$$i = j dr = \sigma B_0 v \sin \theta dr$$

$$i_0 = \sigma B_0 v dr$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{2\mu_0 \sigma B_0 v dr}{3} \hat{z} & r' < r \\ \frac{\mu_0 \sigma B_0 v r^3 dr}{3r'^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r}')\hat{r}' - \hat{z}] & r' > r \end{cases}$$

代入： $v = (1 - \frac{4\pi\rho_0^3}{3M_0}) \frac{I_0^2 v_0}{r^2} + \frac{4\pi\rho_0^2 v_0}{3M_0} r$ 得

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{2\mu_0 \sigma B_0 r_0^2 v_0}{3} [(1 - \frac{4\pi\rho_0^3}{3M_0}) \frac{1}{r^2} + \frac{4\pi\rho_0}{3M_0} r] dr \hat{z} & r' < r \\ \frac{\mu_0 \sigma B_0 r_0^2 v_0}{3r'^3} [(1 - \frac{4\pi\rho_0^3}{3M_0}) r + \frac{4\pi\rho_0}{3M_0} r^4] dr [3(\hat{z} \cdot \hat{r}')\hat{r}' - \hat{z}] & r' > r \end{cases}$$


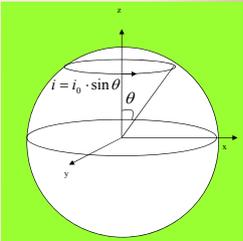
附录：初始感应电流产生磁场磁感应强度在空间任意一点的分布

薄球壳

$$A = \frac{2\mu_0 \sigma B_0 r_0^2 v_0}{3}, \quad C = 1 - \frac{4\pi\rho_0^3}{3M_0}$$

$$D = \frac{4\pi\rho_0}{3M_0}$$

，则上式可简化为：

$$\vec{B} = \begin{cases} A(C \frac{1}{r^2} + Dr) dr \hat{z} & r' < r \\ \frac{A}{2r'^3} (Cr + Dr^4) dr [3(\hat{z} \cdot \hat{r}')\hat{r}' - \hat{z}] & r' > r \end{cases}$$


附录：初始感应电流产生磁场磁感应强度在空间任意一点的分布 **厚球壳**

对所有球壳产生磁场求和：
 1) $r' < r_0$ 时：
 所有球壳产生的总磁场：

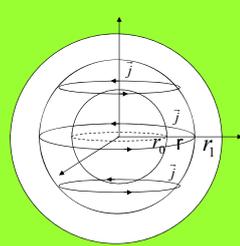
$$\vec{B}' = \int_{r_0}^{r_1} A(C \frac{1}{r^2} + Dr) dr \hat{z}$$

$$= [AC(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}) + \frac{AD}{2}(r_1^2 - r_0^2)] \hat{z}$$

2) $r' > r_1$ 时：
 所有球壳产生的总磁场：

$$\vec{B}' = \int_{r_0}^{r_1} \frac{A}{2r'^3} (Cr + Dr^4) [3(\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' - \hat{z}] dr$$

$$= \frac{A}{2r'^3} [\frac{C}{2}(r_1^2 - r_0^2) + \frac{D}{5}(r_1^5 - r_0^5)] [3(\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' - \hat{z}]$$



附录：初始感应电流产生磁场磁感应强度在空间任意一点的分布 **厚球壳**

3) $r_0 \leq r' \leq r_1$ 时：
 所有球壳产生的总磁场：

$$\vec{B}' = \int_{r_0}^{r'} \frac{A}{2r'^3} (Cr + Dr^4) dr [3(\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' - \hat{z}] +$$

$$\int_{r'}^{r_1} A(C \frac{1}{r^2} + Dr) dr \hat{z}$$

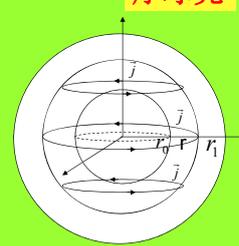
$$= \frac{A}{2r'^3} [\frac{C}{2}(r'^2 - r_0^2) + \frac{D}{5}(r'^5 - r_0^5)] [3(\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' - \hat{z}] +$$

$$+ A[C(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r_1}) + \frac{D}{2}(r_1^2 - r'^2)] \hat{z}$$

$$= \frac{3A}{2r'^3} [\frac{C}{2}(r'^2 - r_0^2) + \frac{D}{5}(r'^5 - r_0^5)] (\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' +$$

$$\frac{A}{2r'^3} [\frac{3C}{2}r'^2 + (Dr_1^2 - \frac{2C}{r_1})r'^3 - \frac{6D}{5}r'^5 +$$

$$\frac{C}{2}r_0^2 + \frac{D}{5}r_0^5] \hat{z}$$



附录：初始感应电流产生磁场磁感应强度在空间任意一点的分布

$r_0 \leq r' \leq r_1$ 时：极坐标系下
 \vec{B}' Z轴方向分量：
 $B'_z(r', \theta, \varphi)$
 $= \vec{B}' \cdot \hat{z}$
 $= \frac{3A}{2r'^3} [\frac{C}{2}(r'^2 - r_0^2) + \frac{D}{5}(r'^5 - r_0^5)] (\hat{z} \cdot \hat{r}') \hat{r}' \cdot \hat{z}$
 $+ \frac{A}{2r'^3} [\frac{3C}{2}r'^2 + (Dr_1^2 - \frac{2C}{r_1})r'^3 - \frac{6D}{5}r'^5$
 $+ \frac{C}{2}r_0^2 - \frac{D}{5}r_0^5] \hat{z} \cdot \hat{z}$
 $= \frac{3A}{2r'^3} [\frac{C}{2}(r'^2 - r_0^2) + \frac{D}{5}(r'^5 - r_0^5)] \cos^2 \theta$
 $+ \frac{A}{2r'^3} [\frac{3C}{2}r'^2 + (Dr_1^2 - \frac{2C}{r_1})r'^3 - \frac{6D}{5}r'^5$
 $+ \frac{C}{2}r_0^2 + \frac{D}{5}r_0^5]$

