线电荷真的不存在吗？

——《关于“线电荷不存在”的“反例”的给出与证明》

许睿恺

- 在对电磁学第三章“静电能”的学习中我们得出过一个结论：

“无法把一定量同种电荷从极端分散状态压缩到一条几何线上，因为这需要做无穷大的功。”

- 但是通常来说，有：

当一个带电体系的电荷密度趋近于零时，其自能同样趋近于零。

- 那么，

当一定量的电荷分布在几何线上，但该分布电荷线密度趋近于零，其自能是否依旧发散？

首先，让我们想像一下什么样的电荷线分布方式可以做到：

1、电荷线密度为零

2、总电荷量不为零

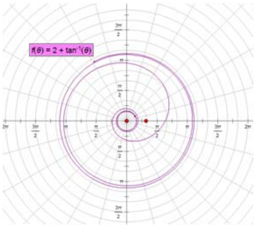
要求电荷分布在长度无限的几何线上。

直线

无限长的带电直线,由于在无穷远处有电荷,从而导致以往对零势能点的定义方法出现问题，所以不加以考虑。

所在区域有限的无限长简单曲线

ρ=a+b*arctan（θ）（a>bπ/2>0）



这种情况的自能也可能收敛，但是这并不是我想举的反例，我也没有尝试对这类情况做出计算。

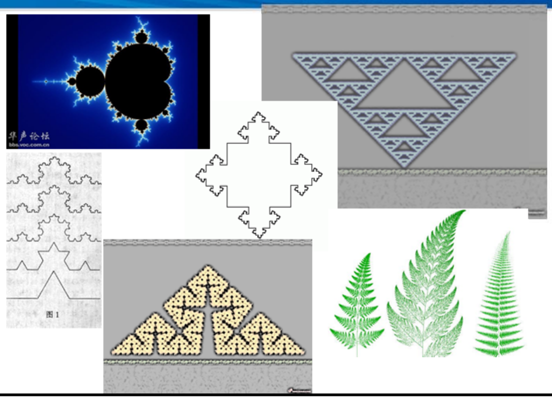
其实，

还有一大类曲线满足这种性质。

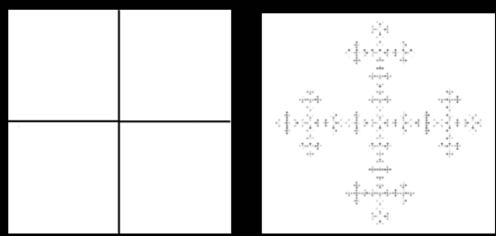
它们是：

分形曲线

分形曲线



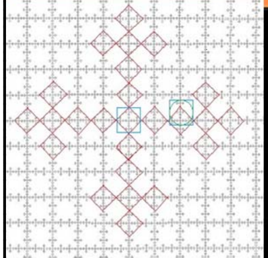
我设想的反例



做两条等长且互相平分的线段（记线段长度的一半为该图形的特征长度R，称最初两条线段为主轴）组成一个“十字”，经过一次变换后，原图中的每个“十字”均变换为五个有机排列、与原“十字”相似比为的小“十字”。经过无数次变换，极限为所求图形。

可以证明，若电荷均匀分布在该图形上，其自能收敛。

简单证明



（1）、对于 f（x，y）≥0（（x，y）∈R^2），且有 f（x，y+T）=f（x+T，y）=f（x，y）

有$\iint_{D1} f \le \iint_{D2} f = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f dy$（D1：$(x-a)^2+(y-b)^2 \le \frac{T^2}{4}$，(a，b)∈$R^2$，D2：$\left[a-\frac{T}{2}, a+\frac{T}{2}\right]\times\left[b-\frac{T}{2}, b+\frac{T}{2}\right]$）

（2）将电荷量为 Q 的电荷均匀分布于特征长度为 R 的图形 A 上，记此分布为 q0（x，y），那么对于任意存在电荷的点 P（a，b），n∈N，

有：$\iint_{D_{n,P}} dq_0 \le \frac{Q}{5^n}$，$D_{n,P}$：$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \le \frac{R}{3^n}$

证明：作一系列电荷分布{q_i（x，y）（i∈N^*）}，其中，

$q_i(x, y) = q_0(x, y)$ （（x，y）∈$\left[-\frac{R}{3^n}, \frac{R}{3^n}\right]\times\left[-\frac{R}{3^n}, \frac{R}{3^n}\right]$），

且有$q_i\left(x+\frac{2R}{3^n}, y\right) = q_i\left(x, y+\frac{2R}{3^n}\right) = q_i(x, y)$。

易知，∀（x，y）∈R^2，i∈N^*，有$q_i(x, y) \ge q_0(x, y)$，

$$\iint_{D_{n,P}} dq_0 \le \iint_{D_{n,P}} dq_n \le \int_{-\frac{R}{3^n}}^{\frac{R}{3^n}}\int_{-\frac{R}{3^n}}^{\frac{R}{3^n}} dq_n$$

在区域$\left[-\frac{R}{3^n}, \frac{R}{3^n}\right]\times\left[-\frac{R}{3^n}, \frac{R}{3^n}\right]$内，有$q_n = q_0$，区域$\left[-\frac{R}{3^n}, \frac{R}{3^n}\right]\times\left[-\frac{R}{3^n}, \frac{R}{3^n}\right]$包含整个图形 A 的$\frac{1}{5^n}$，又由于电荷均匀分布，故有

$\int_{-\frac{R}{3^n}}^{\frac{R}{3^n}}\int_{-\frac{R}{3^n}}^{\frac{R}{3^n}} dq_n = \int_{-\frac{R}{3^n}}^{\frac{R}{3^n}}\int_{-\frac{R}{3^n}}^{\frac{R}{3^n}} dq_0 = \frac{Q}{5^n}$　　证毕

- 那么，对于任意存在电荷的点，该点电势最大的情形为：

有（Q-Q/5）的电荷到该点的距离大于但无限接近于R/3。

有（Q/5-Q/25）的电荷到该点的距离大于但无限接近于R/9。

有（Q/25-Q/125）的电荷到该点的距离大于但无限接近于R/27。

……

有（$Q/5^n$-$Q/5^{n+1}$）的电荷到该点的距离大于但无限接近于$R/3^{n+1}$。

……

那么一点上电势必小于：

$[3Q/5R+9Q/25R+\cdots+3^nQ/5^nR+\cdots]*4/(4\pi\varepsilon_0)$
$=3Q/(2\pi\varepsilon_0 R)$

整个带电体系自能必小于$3Q^2/(4\pi\varepsilon_0 R)$。

看起来，线电荷的确是可以存在了。

线电荷真的可以存在吗？

如果教条地认为线电荷是分布在几何线上的电荷，那么正如我们所证明的，线电荷是存在的。

如果我们把线电荷不存在理解为一维电荷不存在，就没有错误了，因为并不是所有由线构成的都是一维图形，一维图形也不一定由线构成。从分形几何的观点看，文中举出的反例，其几何图形正是由线构成的$\log_3 5$维图形。所以“线电荷不存在”并不是一个错误的结论，只是不够严谨，更准确的说，是“无法把一定量同种电荷从极端分散状态压缩到一个一维几何图形上，因为这需要做无穷大的功。”

关于电荷分布自能收敛问题的一个定性结论

(2)若对于总电荷量为 Q 的分布 A，符合条件 1 且 $D_A<1$，对于条件 1 存在常数 K，R_1，且存在R_2，令当 $0<r<R_2$时,有$-\frac{\ln(N(r))}{\ln(r)}<\tau$（$0<\tau<D$）

任取一点 P(x,y,z)，取 $a=\frac{x}{\left[\frac{x}{R}\right]+1.5}$，$b=\frac{y}{\left[\frac{y}{R}\right]+1.5}$，$c=\frac{z}{\left[\frac{z}{R}\right]+1.5}$，记电荷量最小的区间内电荷量为 q_{min},有：

$q_{min}(1+(N(r)-1)\times e^K)>Q$

$q_{min}>Q/(1+(N(r)-1)\times e^K)>\frac{Qr^\tau}{e^K}$，记$\frac{Qr^\tau}{e^K}=T$

取 $a_n=a/3^n$，$b_n=b/3^n$，$c_n=c/3^n$，有 $r_n=r/3^n$，

有 $q_{min,n}>T\left(r/3^n\right)^\tau$

所以有：

$$\varphi_P>\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q-Tr^\tau}{r}+Tr^{\tau-1}(3^\tau-1)\times\sum_{n=1}^{\infty}(3^{\tau-1})^n\right]$$

其值发散，故自能必定发散。

到了最后,对于“线电荷”是否存在，我们依然没有一个准确的结论。单纯地以几何线而论，线电荷可以存在。但如果从维度的角度看，一维的电荷分布能否存在，依然是不确定的，在上一页幻灯片中，也只是给出了维数大于一和小于一的情况，并没有讨论一维的情况，存在与否，有待进一步的研究。


中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
谢谢观看！