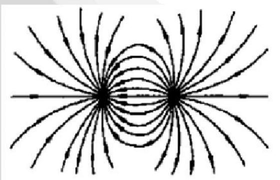
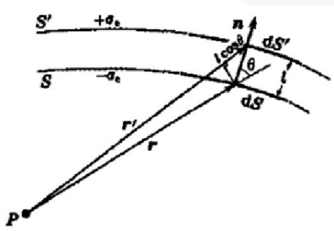
从电偶极子到神经冲动

申泽宇 PB13207057
指导老师 孙腊珍

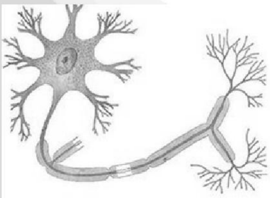
引言

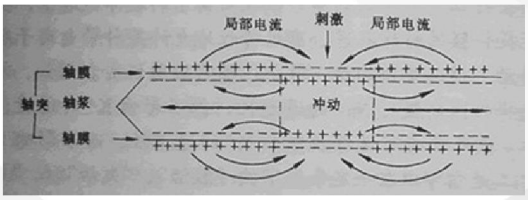
- 电偶极子是电磁学中十分常见的电荷系统，电偶极层便是电偶极子在面分布上的体现。





■ 神经纤维内外有着一定的K+、Na+离子浓度差，也可以视为一个电偶极层。而神经冲动就是出现在神经纤维上的电信号的传播。





电偶极子

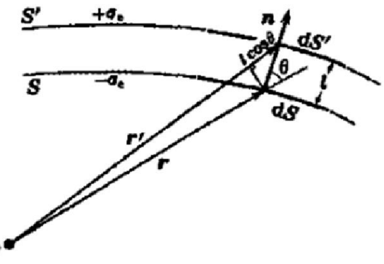
■ 电偶极子在空间某点的电势可由下式得出：

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

■ 电偶极子在空间某点的电场可由$\mathbf{E} = -\nabla U$ 得到极坐标形式：

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}\mathbf{e}_r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\mathbf{e}_\theta$$

电偶极层



$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(S')}\frac{\sigma_e dS'}{r'}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(S)}\frac{-\sigma_e dS}{r}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(S)}\frac{\sigma_e l\cos\theta dS}{r^2}$$

$$U=-\frac{\tau_e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(S)}d\Omega=-\frac{\tau_e}{4\pi\varepsilon_0}\Omega \qquad \tau_e=\sigma_e l$$

Ω为电偶极层对p点所张的立体角

$$\mathbf{E}=-\nabla U=\frac{\tau_e}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\Omega$$

神经纤维

- 神经纤维的模型
- 神经纤维通常指的是神经细胞中的轴突，轴突的长短不一，短者仅数微米，长者可达1m以上。**轴突全长直径较均一。轴突外部包围着髓鞘，起着绝缘的作用。**
- **要使纤维内部静息时电势处处相等，正负离子仅分布在紧靠细胞膜的两侧**，相当于一个电偶极层时，方满足条件。

- 将神经纤维简化为一根柱状电介质
- 假设其单位长度的电感为**L**，单位长度的电容为**C**，单位长度的电阻为**R**。

L、C、R的计算

- 单位长度的电感**L**

设神经纤维的介电常数为**ε**，磁介质常数为**μ**，其半径为**a**

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

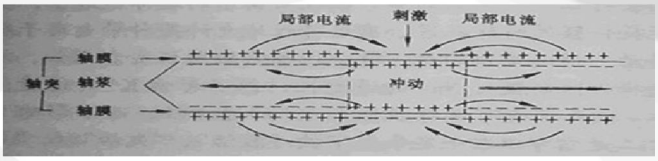
由于髓鞘的作用，假设仅在神经纤维内有磁场

$$H = \frac{j \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{jr}{2} \longrightarrow \omega = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{\mu j^2 r^2}{8} \longleftarrow B = \mu H = \frac{\mu j r}{2}$$

$$W_m = \int \omega \cdot dV = \frac{\mu \pi j^2 a^4 \Delta l}{16}$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2 \Delta l} = \frac{\mu}{8\pi} \qquad \begin{array}{l} \chi_m \to 0 \\ \mu \to \mu_0 \end{array}$$

■单位长度的电容C



正负离子主要分布在细胞膜两侧

设细胞膜的厚度为**d**神经纤维半径为**a**，所以可等效为一同轴圆柱电容器，考虑到**d<<a**则单位长度电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_e \cdot 2\pi a \Delta l}{\frac{\sigma_e}{\varepsilon} \cdot d \cdot \Delta l} = \frac{2\pi \varepsilon a}{d}$$

■单位长度的电阻R

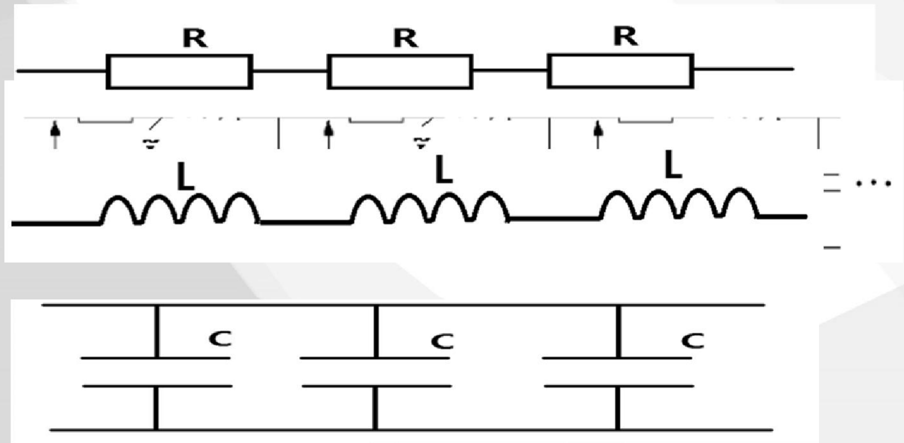
假设**ρ**为等效的电阻率

$$R = \rho \frac{\Delta l}{S \cdot \Delta l} = \frac{\rho}{\pi a^2}$$

神经冲动的传播

■ 神经冲动传播模型的构建

经过前面的推导，且电阻、电感、电容大小皆与神经纤维的长度成正比。所以神经纤维可以等效为下面的无限电路网络



■ 神经冲动的相关计算

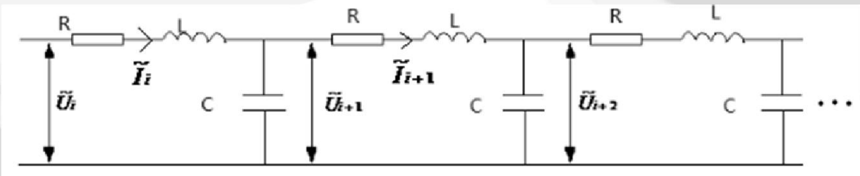
■ 先考虑输入信号为最常见的正弦交流电$\tilde{U}$

取Δl的一小段作为有一个单元格，**L**、**R**、**C**的复阻抗分别为

$$\tilde{Z}_L = i\omega L \qquad \tilde{Z}_R = R \qquad \tilde{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$$

对于第**i**个和第**i+1**个单元格

$$\begin{cases} \tilde{U}_i - \tilde{U}_{i+1} = \tilde{I}_i \cdot (\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L) \\ \tilde{U}_{i+1} = (\tilde{I}_i - \tilde{I}_{i+1}) \cdot \tilde{Z}_C \\ \tilde{U}_{i+1} = \tilde{I}_{i+1} \cdot \tilde{Z}_\infty \end{cases}$$



$$\frac{\widetilde{Z}_\infty \cdot \widetilde{Z}_C}{\widetilde{Z}_\infty + \widetilde{Z}_C} + \widetilde{Z}_R + \widetilde{Z}_L = \widetilde{Z}_\infty$$

$$\widetilde{U}_{i+1} = \widetilde{U}_i \cdot \frac{\widetilde{Z}_C}{\widetilde{Z}_C + \widetilde{Z}_\infty} = \widetilde{U}_i \cdot \frac{\widetilde{Z}_\infty - (\widetilde{Z}_R + \widetilde{Z}_L)}{\widetilde{Z}_\infty}$$

- 欧拉公式

$$\widetilde{Z} = re^{j\theta}$$

$$\widetilde{U}_i = u_i \cdot e^{j\theta_i}$$

两单元格之间的相位差**δ**

$$\theta_i - \theta_{i+1}$$

相位传播的速度

$$v = \frac{\theta_i - \theta_{i+1}}{\omega}$$

- 求出结果
- 相位差δ

$$\delta = -\arctan(\frac{r\sin\alpha}{r^2 - \frac{1}{4}})$$

其中

$$\alpha = \arctan\frac{r_0 \sin\theta}{r_0\cos\theta + \frac{1}{4}}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{16} + r_0^2\cdot\cos^2\theta + \frac{1}{2}r_0\cos\theta}$$

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

$$\theta = \arctan\frac{R}{\omega L}$$

- 当R比较可观的时候，δ的公式很复杂，从某个简化角度来说，当R不予考虑时，原电路简化为一个低通滤波电路！

$$\tilde{Z}_\infty = \frac{\tilde{Z}_L}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{Z}_L^2}{4} + \tilde{Z}_C\cdot\tilde{Z}_L} = \frac{i\omega L}{2} + \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}$$

$$\varphi = 0$$

$$\delta = \arctan(\frac{\omega L\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}}{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{2}})$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{4}{LC}} = \sqrt{\frac{16d}{\mu\varepsilon a}}$ （约10^6数量级）

当w大于w_0时，阻抗为复数，则会立刻衰减

当w小于w_0时，阻抗为纯虚数，使相位滞后

- 神经冲动中传播的是脉冲信号
  狭窄的矩形方波
- 对一狭窄的宽为**2h**的矩形方波进行**Fourier**展开

$$U_{(t)}=\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nh}{n\pi}\cdot\sin nt$$

- 得出近似解 $U_{(t)}=\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2h}{\pi}\cdot\sin nt$

$$v=\frac{\arctan(\frac{\sqrt{16\mu d-\mu^2\varepsilon a}}{8d-\mu\varepsilon a})}{n}$$

人体C型神经纤维数据

直径**2a**	细胞膜厚度**d**	**ε**	**μ**	传播速度**υ**
0.5-1μm	8-10nm	$80\varepsilon_0$	$\sim\mu_0$	~2m/s

将数据带入**v**表达式，并选取**n=1**

$$v=\frac{\arctan(\frac{\sqrt{16\mu d-\mu^2\varepsilon a}}{8d-\mu\varepsilon a})}{n}=1.4m/s$$

参考文献

[1]赵凯华[M].新概念物理教程电磁学

[2]John G. Nicholls，A.Robert Martin，David A. Brown，Paul A. Fuchs，Mathew E. Diamond，David A. Weisblat[M].From Neuron to Brain

谢谢