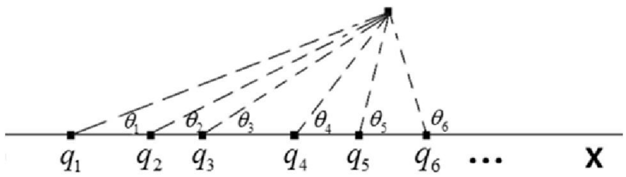
求电场线方程的特殊技巧

姚志鹏 PB13203009
李雅博 PB13203018



求解共线分布电荷的电场线方程。

由
$$\nabla \times E = 0 \rightarrow \frac{E_y}{dy} = \frac{E_x}{dx}$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y}{[(x-x_i)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}dx - \frac{x-x_i}{[(x-x_i)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}dy\right\} = 0$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \times \frac{\dfrac{(x-x_i)dy - ydx}{y^2}}{[1+(\dfrac{x-x_i}{y})^2]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

积分

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{x-x_i}{[(x-x_i)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} = C$$

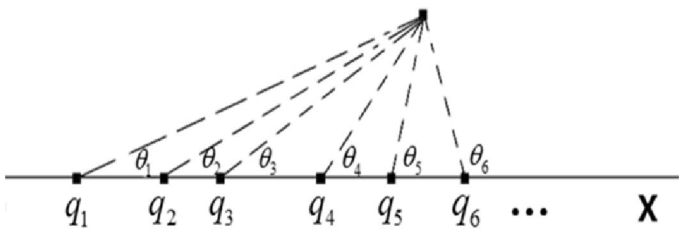
C为待定常数，可由初始条件确定。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

换种写法即

$$\sum_i q_i \cos\theta_i = C$$

这个方程的形式非常美观，且只与q和夹角有关。



我们可以尝试着使用一种更“物理”的方法来得出这个方程。

电场线方程满足切线方向处处与电场方向重合即有

$$\frac{f_x'}{E_x}=\frac{f_y'}{E_y}=\frac{f_z'}{E_z}$$

则由电场线方程组成的包络面必然满足法向量与电场方向正交导致电通量在包络面上的积分必然为0。（严格的数学证明省略，简单证明可由电场线不交叉直接得到）

由电场线方程的这个性质，我们可以尝试着用一种新的的方法来解电场线方程

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

先介绍一个引理

对于空间中一个点电荷，它在一个面上产生的电通量为

$$\varphi=\iint\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\vec{r}\cdot\overrightarrow{dS}}{r^3}=\frac{q\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$$

即电通量正比于对应曲面对点电荷所张的立体角

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

又在轴对称的情形下一个圆面所张立体角

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta} \sin\alpha d\alpha = 2\pi(1-\cos\theta)$$

取向右为正，考虑所取的面位于电荷的左侧类似计算可得立体角

$$-2\pi(1-\cos(\pi-\theta)) = 2\pi(-1-\cos\theta)$$

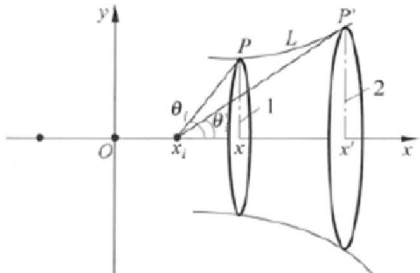


图 1　电场线管及高斯面

取两个截面与包络面组成高斯面

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

1.高斯面内没有电荷

使用高斯定理

$$0 = -\varphi_1 + \varphi_2$$

则通过两个面的电通量必然相等得出

$$\sum_i q_i \cos\theta_i = \sum_i q_i \cos\theta_i'$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

2. 高斯面内有电荷，假定只有一个(可依次推广)

则

$$\frac{q_i}{\varepsilon_0}=-\varphi_1+\varphi_2=-[\sum_{j<i}\frac{2\pi q_j}{4\pi\varepsilon_0}(1-\cos\theta_j)+\frac{2\pi q_i}{4\pi\varepsilon_0}(-1-\cos\theta_i)+\sum_{k>i}\frac{2\pi q_k}{4\pi\varepsilon_0}(1-\cos\theta_k)]$$

$$+[\sum_{j<i}\frac{2\pi q_j}{4\pi\varepsilon_0}(1-\cos\theta_j')+\frac{2\pi q_i}{4\pi\varepsilon_0}(1-\cos\theta_i')+\sum_{k>i}\frac{2\pi q_k}{4\pi\varepsilon_0}(1-\cos\theta_k')]$$

整理即得

$$\sum_i q_i\cos\theta_i=\sum_i q_i\cos\theta_i'$$

综合以上两种情形得出

$$\sum_i q_i\cos\theta_i=C$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

下面我们来确定常数C的范围

粗看有 $$-\sum_{i=1}^{n}|q_i|\le C\le\sum_{i=1}^{n}|q_i|$$

但实际上各 θ_i 并不独立。

我们将C看作x,y的函数

求C的极值令

$$0=\frac{\partial C}{\partial y}=-y\sum_{i=1}^{n}q_i\frac{(x-x_i)}{[(x-x_i)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

得y=0，极值一定在x轴上取。故余弦值只能取-1或1，通过逐步调整的总可以确定C的范围，此处不再赘述。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

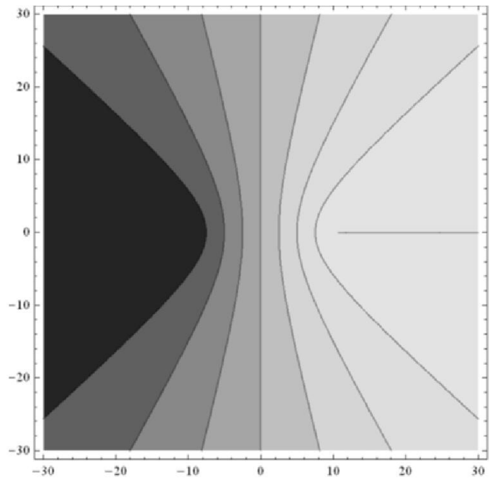
下面我们试着来利用共线电荷电场线方程 $\sum_{i}^{n} q_i \cos\theta_i = C$

解决几个简单的问题

1.电荷任意连续分布
则原式改为积分形式

$$\int \lambda(x)\cos(\theta_x)dx = C$$

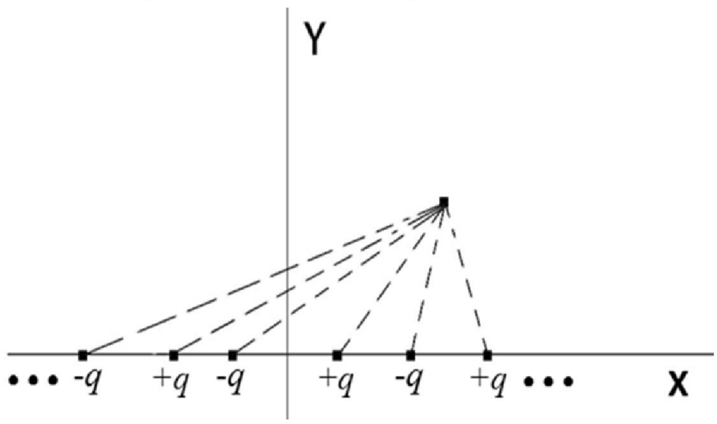
右图为均匀分布时的结果为一双曲线



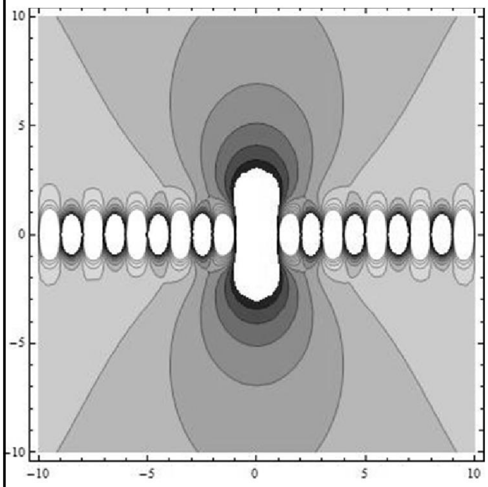
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

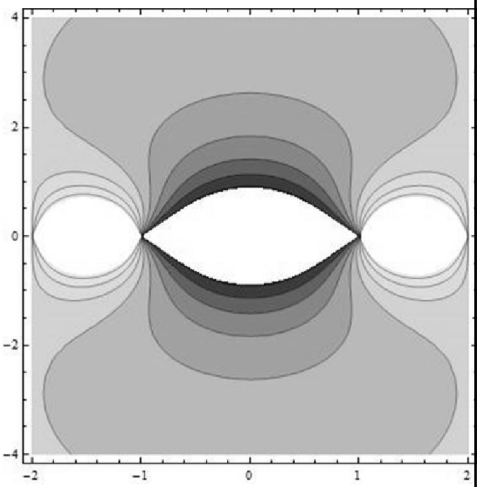
2.正负电荷交叉分布，零点无电荷

$$\sum_{a=1}^{100}\frac{(-1)^{a+1}(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\sum_{a=-100}^{-1}\frac{(-1)^{a}(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=C$$

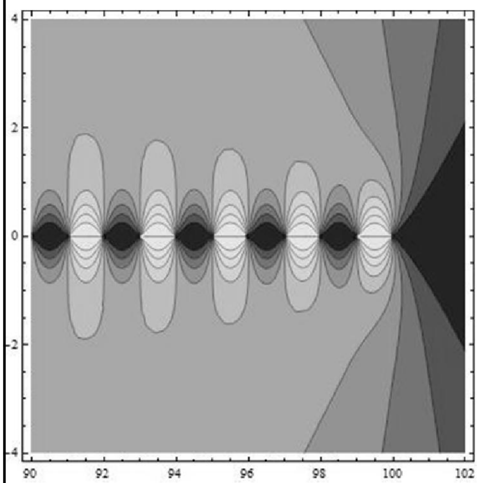


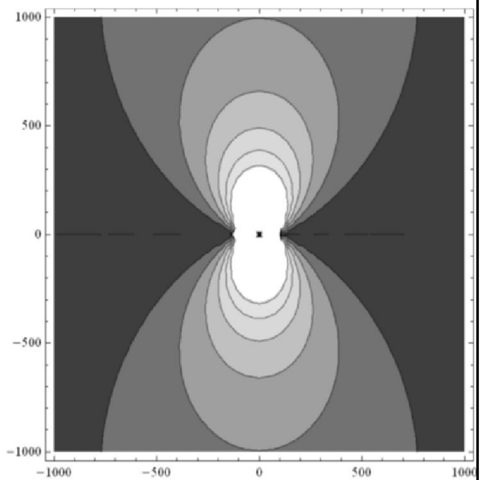
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China





中国科学技术大学
University of Science and Technology of China



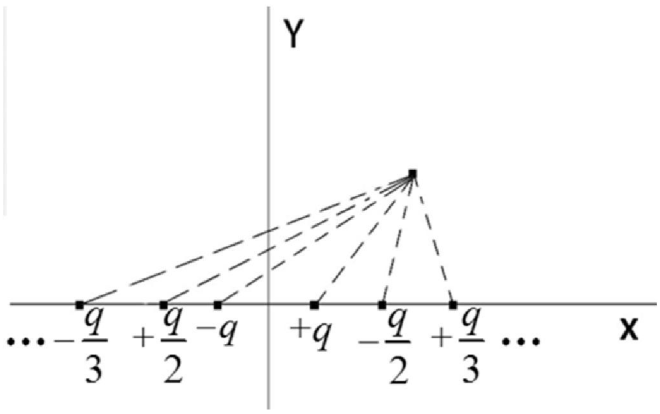


中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

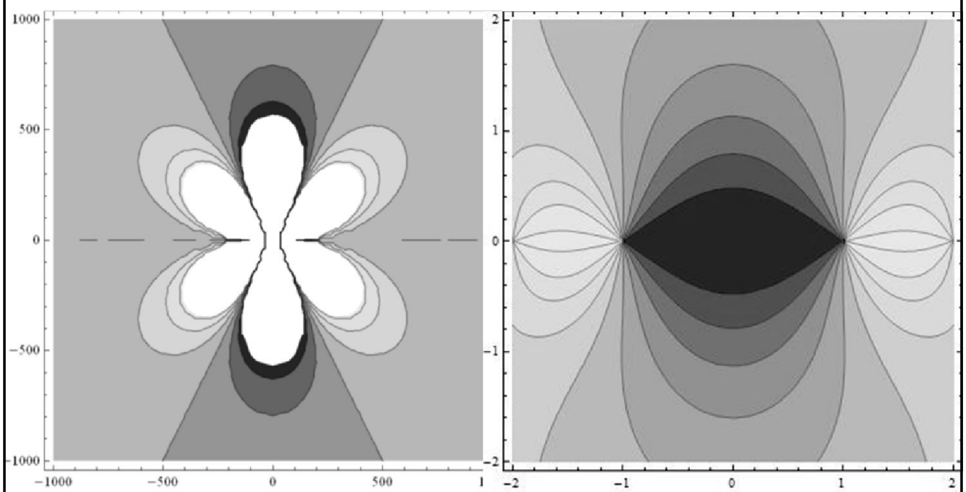
我们尝试着构造共线点电荷的一种分布使其净电荷为0，电偶极矩之和也为0

正负交叉等间隔分布且电量按1/n衰减

$$\sum_{a=1}^{100}\frac{(-1)^{a+1}(x-a)}{|a|\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\sum_{a=-100}^{-1}\frac{(-1)^{a}(x-a)}{|a|\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=\mathrm{C}$$



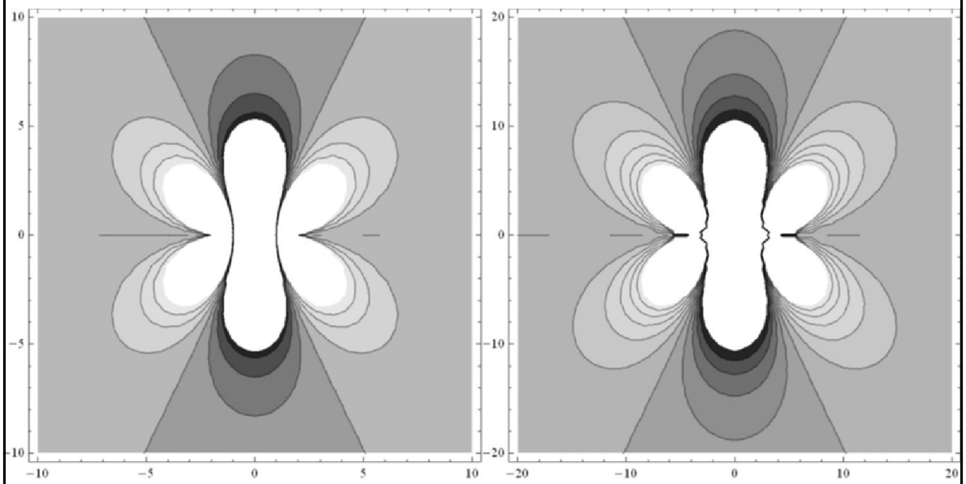
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China



左图中的渐近线吸引了我们的注意力

我们更改电荷分布，只留下两对电荷以简化

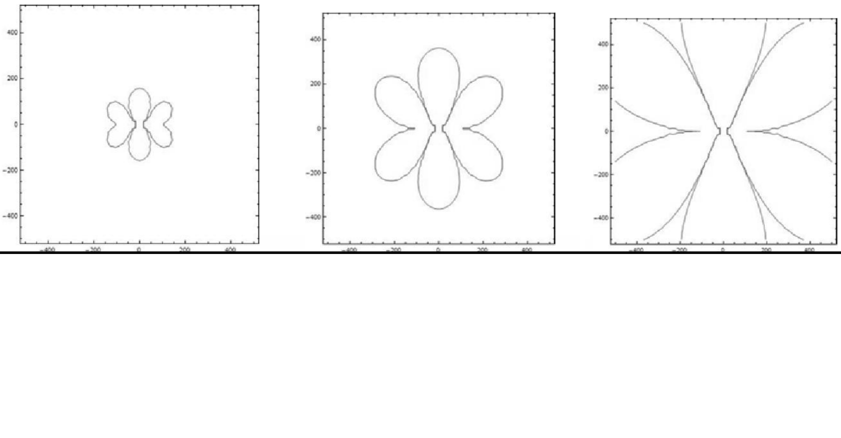
左图为1,2处有电荷 右图为3,4处有电荷，但渐近线相同



$$\sum_{a=1}^{100}\frac{(-1)^{a+1}(x-a)}{|a|\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\sum_{a=-100}^{-1}\frac{(-1)^{a}(x-a)}{|a|\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

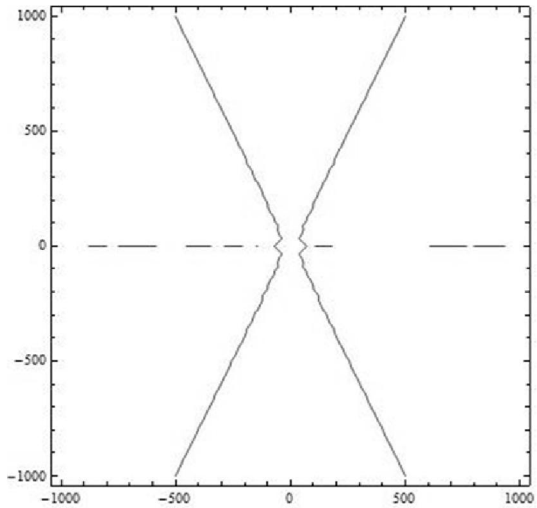
先来确定常数C的范围，由之前得出的方法易得 $-0.624\le C\le 1.376$

分别于（-2，-1）间与（-1,1）间取得，我们取不同的C画出相应的场线，以下分别为取C为正负0.01,0.001,0.0001作出的图像（蓝色曲线对应正C，紫色对应负C）



中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

自然而然地猜测C取0时恰对应渐近线，作图



中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

由之前作出的局部图可以猜测渐近线由最内侧的电荷发出。

证明可由电通量计算得出。将右侧电荷视为整体Q，发出的电场线全部落在（1,0）处的电荷则有

$$\frac{Q}{\varepsilon_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}2\pi(1-\cos\theta)$$

此 θ 对应右端电荷发出电场线经过（1，0）的最大夹角

再将此 θ 代入电场线方程，求出C恰等于0。

我们代入C=0，取不同x解出y

$$\sum_{a=1}^{100}\frac{(-1)^{a+1}(x-a)}{|a|\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\sum_{a=-100}^{-1}\frac{(-1)^{a}(x-a)}{|a|\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=0$$

验证如下

x=1000,y=1999.91
x=10000,y=19999.99
x=100000,y=199999.99
x=1000000,y=1999999.999
⋮

得出渐近线方程

y=2x

如何从一般情形证明满足要求的分布总是有这样一条渐近线呢？

我们回归普通方法

电荷分布为 q/k(-k,0),q(-1,0),-q(1,0),-q/k(k,0)

由余弦定理

$$r_i^2=(r\cos\theta-x_i)^2+r^2\sin^2\theta$$

$$U=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

对其展开保留到三阶项得到

$$U(r,\theta)=\frac{1}{r}\{[1-\frac{l^2}{2r^2}+\frac{l}{r}\cos\theta+\frac{3}{8}(\frac{l^2}{r^2}-\frac{2l}{r}\cos\theta)^2+(-\frac{15}{48})(\frac{l^2}{r^2}-\frac{2l}{r}\cos\theta)^3]$$

$$-[1-\frac{l^2}{2r^2}-\frac{l}{r}\cos\theta+\frac{3}{8}(\frac{l^2}{r^2}+\frac{2l}{r}\cos\theta)^2+(-\frac{15}{48})(\frac{l^2}{r^2}+\frac{2l}{r}\cos\theta)^3]$$

$$-\frac{1}{kr}[1-\frac{k^2l^2}{2r^2}+\frac{kl}{r}\cos\theta+\frac{3}{8}(\frac{k^2l^2}{r^2}-\frac{2kl}{r}\cos\theta)^2+(-\frac{15}{48})(\frac{k^2l^2}{r^2}-\frac{2kl}{r}\cos\theta)^3]$$

$$+[1-\frac{k^2l^2}{2r^2}-\frac{kl}{r}\cos\theta+\frac{3}{8}(\frac{k^2l^2}{r^2}+\frac{2kl}{r}\cos\theta)^2+(-\frac{15}{48})(\frac{k^2l^2}{r^2}+\frac{2kl}{r}\cos\theta)^3]\}$$

$$=\frac{l^3}{r^4}(k^2-1)(3\cos\theta-5\cos^2\theta)$$

$$E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}=\frac{l^3}{r^5}(k^2-1)(3\sin\theta-15\sin\theta\cos^2\theta)$$

令E的切向分量为0，解出正切值恰为2

对刚才的电荷分布由

$$\sum_{i=1}^{n}q_ix_i^{\ 2}=0$$

知其电四极矩也为0，由其电场随r下降的速度可以猜测其为电八极矩

我们也可以由此推广，尝试着用共线分布的点电荷构造出更高阶的电多极矩。

对于空间中位于 r_j 处的共线电荷，该问题等价于求解线性方程组其中 $r_i \neq r_j (i \neq j)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_{n-1} & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_{n-1}^2 & r_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^m & r_2^m & \dots & r_{n-1}^m & r_n^m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

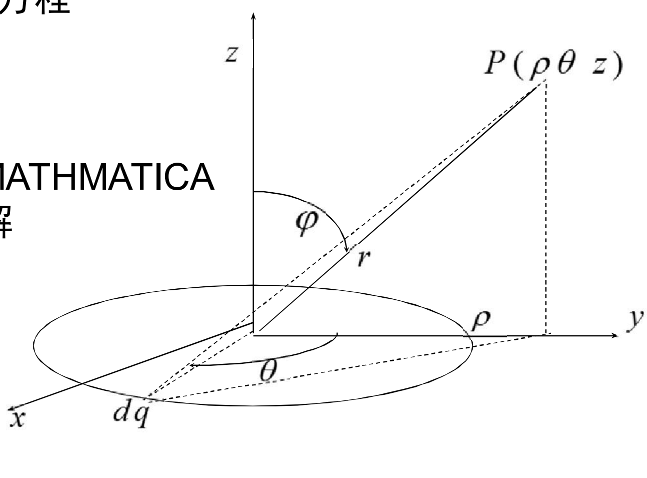
由范德蒙行列式的知识知道当m+1<n时，原方程有解。故用共线点电荷构造电2的n次方极子至少需要n+1个点电荷。

均匀带电圆环

下面我们试着用三种方法得出电场线方程

1.常微分方程

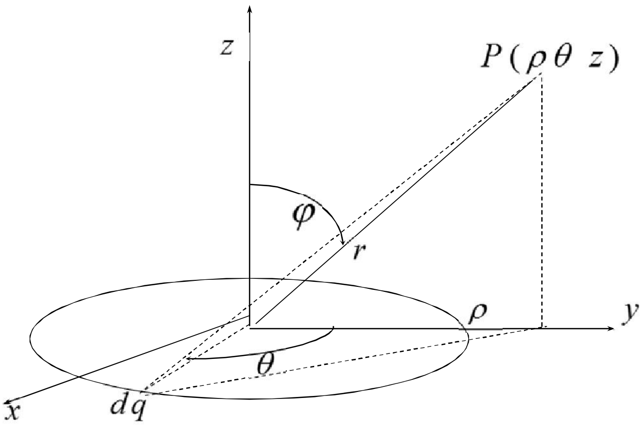
积分很复杂，MATHMATICA未能给出解析解



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

2.电四极子法

用电四极子法可以得到远处的电场线



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

计算可得电四极矩张量

$$\mathbf{Q}=\frac{1}{2}a^2q\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

因此，电四极子产生的电势为

$$\phi_{(2)}(r,\varphi)=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^5}(Q_{11}x^2+Q_{22}y^2+Q_{33}z^2)$$

$$=\frac{a^2q}{16\pi\varepsilon_0 r^5}(x^2+y^2-2z^2)=\frac{a^2q}{16\pi\varepsilon_0 r^3}(1-3\cos^2\varphi)$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

考虑到电荷分布的对称性，采用图示柱坐标系，在均匀 带电圆环的远处，即 $r >>$ 的各点，电势可写成

$$\varphi(r,\phi)=\varphi_{(0)}(r,\phi)+\varphi_{(1)}(r,\phi)+\varphi_{(2)}(r,\phi)+\cdots$$

前三项分别对应零、一、二级近似。其中 $\varphi_{(1)}(r,\phi)$为

电偶极矩在远处的电势，而此圆环的电偶极矩本身为零。
第三项

$$\varphi_{(2)}(r,\phi)=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\sum_{ij}x_iQ_{ij}x_j}{r^5}$$

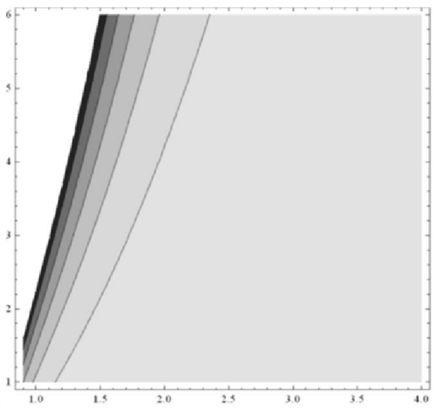
其中 Q_{ij}为电四极矩，其分量为

$$Q_{ij}=\int_q(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})dq$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

则 $$\iint E_x dS=\frac{x}{40960}\left(-\frac{896y}{x^2(x^2+y^2)^5}-\frac{6400y}{(x^2+y^2)^6}-\frac{15(512x^6+147)\tan^{-1}(\frac{y}{x})}{x^{11}}-\frac{1176y}{x^6(x^2+y^2)^3}-\frac{1008y}{x^4(x^2+y^2)^4}-\frac{15(512x^6+147)y}{x^{10}(x^2+y^2)}-\frac{10(512x^6+147)y}{x^8(x^2+y^2)^2}\right)=\mathrm{C}$$

所得到的电场线方程为初等隐函数，在远距离处作图如右所示（加上第一项）：



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

3.高斯定理法

第一次积分电场在(r, θ)点处水平方向的分量

$$\int_0^{2\pi} \frac{x-\cos(a)}{((x-\cos(a))^2+\sin^2(a)+y^2)^{2.5}}\,\mathrm{d}a$$

第一项为

$$\frac{\pi}{((1+x)^2+y^2)^{2.5}}\{(1+x)Hypergeometric2F1[\frac{1}{2},2.5,1,\frac{4x}{(1+x)^2+y^2}]-Hypergeometric2F1[\frac{3}{2},2.5,2,\frac{4x}{(1+x)^2+y^2}]\}$$

第二项为

$$\frac{\pi}{(-1+x)^2+y^2)^{2.5}}\{(-1+x)Hypergeometric2F1[\frac{1}{2},2.5,1,-\frac{4x}{(-1+x)^2+y^2}]+Hypergeometric2F1[\frac{3}{2},2.5,2,-\frac{4x}{(-1+x)^2+y^2}]\}$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第二次积分 $\iint E_x dS = \int_0^{2\pi} x d\varphi \int_{-y}^{y} E_x(x,y)dy$

展为级数

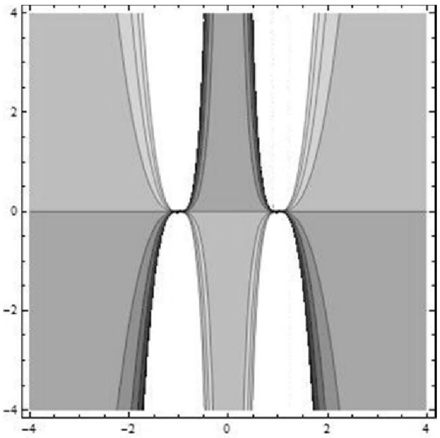
```
Series[%1, {y, 0, 4}]
```

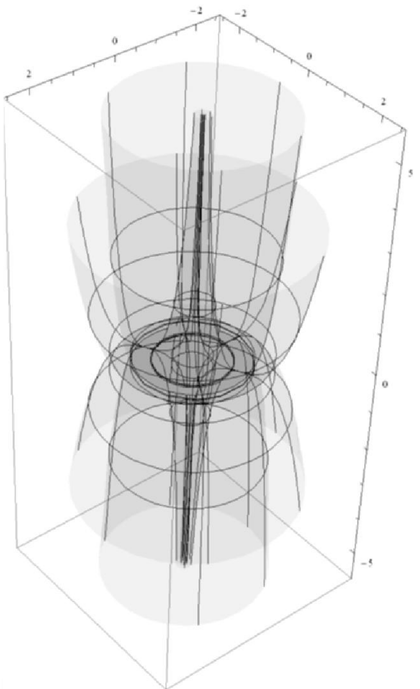
$$\frac{1}{((-1+x)^2)^{2.5}((1+x)^2)^{2.5}}\Big(((1+x)^2)^{2.5}(-3.14159+3.14159x)\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\tfrac{1}{2},2.5,1,-\tfrac{4x}{(-1+x)^2}]+((-1+x)^2)^{2.5}(3.14159+3.14159x)\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\tfrac{1}{2},2.5,1,\tfrac{4x}{(1+x)^2}]+$$
$$3.14159((1+x)^2)^{2.5}\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\tfrac{3}{2},2.5,2,-\tfrac{4x}{(-1+x)^2}]-3.14159((-1+x)^2)^{2.5}\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\tfrac{3}{2},2.5,2,\tfrac{4x}{(1+x)^2}]\Big)y+$$
$$\frac{1}{3}\Big(-\frac{7.85398(-1.+1.x)\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\frac{1}{2},2.5,1,-\frac{4x}{(-1+x)^2}]}{((-1+x)^2)^{3.5}}-\frac{7.85398(1.+1.x)\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\frac{1}{2},2.5,1,\frac{4x}{(1+x)^2}]}{((1+x)^2)^{3.5}}-$$
$$\frac{7.85398\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\frac{3}{2},2.5,2,-\frac{4x}{(-1+x)^2}]}{((-1+x)^2)^{3.5}}+\frac{7.85398\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\frac{3}{2},2.5,2,\frac{4x}{(1+x)^2}]}{((1+x)^2)^{3.5}}-\frac{15.708x\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\frac{3}{2},3.5,2,-\frac{4x}{(-1+x)^2}]}{((-1+x)^2)^{2.5}(-1.+x)^4}+$$
$$\frac{15.708x^2\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\frac{3}{2},3.5,2,-\frac{4x}{(-1+x)^2}]}{((-1+x)^2)^{2.5}(-1.+x)^4}-\frac{15.708x\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\frac{3}{2},3.5,2,\frac{4x}{(1+x)^2}]}{((1+x)^2)^{2.5}(1.+x)^4}-\frac{15.708x^2\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\frac{3}{2},3.5,2,\frac{4x}{(1+x)^2}]}{((1+x)^2)^{2.5}(1.+x)^4}+$$
$$\frac{23.5619x\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\frac{5}{2},3.5,3,-\frac{4x}{(-1+x)^2}]}{((-1+x)^2)^{2.5}(-1.+x)^4}+\frac{23.5619x\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[\frac{5}{2},3.5,3,\frac{4x}{(1+x)^2}]}{((1+x)^2)^{2.5}(1.+x)^4}\Big)y^3+O[y]^5$$

最终的电场线方程为： $\iint E_x dS \equiv C$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

取低阶项作图

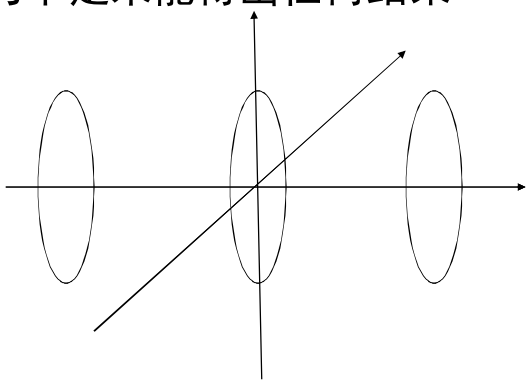




此方法计算近处的电场线较为精确，至此我们得出整个空间中的电场线

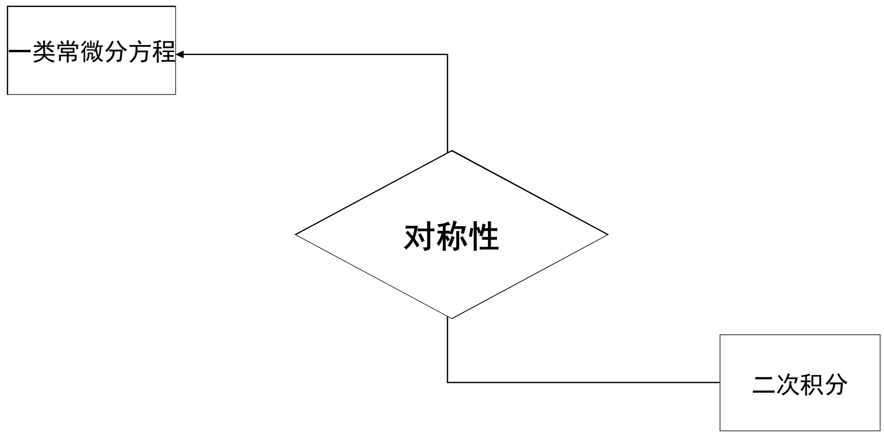
我们试图将对称性再还原

计算共轴带电圆环的电场线，无奈计算能力不足未能得出任何结果



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

总结



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

参考文献

1.戴亮 戴又善，直线分布点电荷体系的电场线方程中曲线簇参数取值范围的确定，大学物理2008年3月第27卷第3期

2.姚晓玲 谭德宏，用高斯定理推导共线电荷系的电场线方程，物理与工程Vol.23 No.4 2013

3.邱荒逸，计算均匀带电圆环的电势与电场，江苏江阴214431

还要在此感谢叶邦角老师的指导，以及黄开、张铮同学的帮助。


Thank You!