

电荷体系的自稳定性分析

报告人：欧子豪 [PB11000709]

指导老师：徐春凯

报告内容

- 背景介绍
- 流体模型简介
- 均匀电荷体系稳定态解
- 两组分电荷体系的扰动流体方程
- 电中性气体（抑制电荷密度涨落）模型
- 两组分气体（电荷密度涨落）模型
- 总结
- 未来工作展望

背景介绍

- 体系的稳定性与不稳定性

涨落 => 1. 稳定 2. 塌缩、膨胀

- 涨落幅度 $\langle \frac{\Delta\rho}{\rho} \rangle$ 差异很大，
如何产生？

- 对自引力体系，Jeans (1902) 解释

- Jeans 方程

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - C_s^2 \nabla^2 \rho_1 = -4\pi G \rho_0$$



$$\lambda_J = C_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}}$$

$\lambda > \lambda_J$: Unstable

宇宙学 (讲义), 张杨
Jeans Instability, Wikipedia

3

流体模型简介

- 流体模型: 多体问题

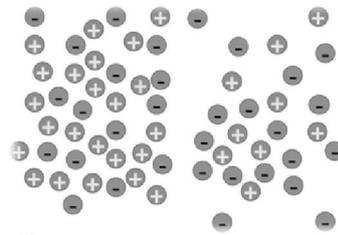
- 基本方程

1. 连续性方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

2. Euler 方程 $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F}$

- F 为外力, 对带电粒子

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



宇宙学 (讲义), 张杨

4

均匀电荷体系稳定态解

► 讨论两组分的电荷体系 (不同电荷)

► 流体模型方程

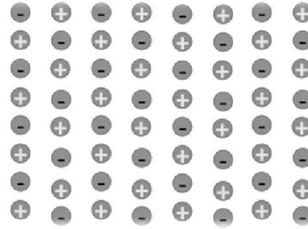
$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \nabla \cdot (n_+ \vec{v}) = 0 \quad \frac{\partial n_-}{\partial t} + \nabla \cdot (n_- \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{n_+ m_+ + n_- m_-} \nabla p + \vec{F}$$

$$\vec{F} = (n_+ q_+ + n_- q_-) \vec{E}$$

► 均匀各向同性假设 $p = 0$ $\langle \vec{v} \rangle = 0$

► 稳定状态解 $\vec{F} = 0$ $\frac{\partial n_+}{\partial t} = \frac{\partial n_-}{\partial t} = 0$



结论：
稳定解可以存在，
浓度随时间不发生变化。

两组分电荷体系的扰动流体方程

► 在稳态基础上，对体系做一阶微扰展开

► 用下标0代指稳态，1代指微扰项

► 在一阶近似下，得到扰动流体方程

$$\frac{\partial n_{+1}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{+1} \vec{v}_0) + \nabla \cdot (n_{+0} \vec{v}_{+1}) = 0$$

$$n_{+1} \frac{\partial \vec{v}_{+0}}{\partial t} + n_{+0} \frac{\partial \vec{v}_{+1}}{\partial t} + n_{+1} (\vec{v}_{+0} \cdot \nabla) \vec{v}_{+0} + n_{+0} (\vec{v}_{+1} \cdot \nabla) \vec{v}_{+0}$$

$$+ n_{+0} (\vec{v}_{+0} \cdot \nabla) \vec{v}_{+1} = - \frac{1}{m_+} \nabla p_{+1} + n_{+1} \vec{F}_{+0} + n_{+0} \vec{F}_{+1}$$

$$\vec{F}_{+1} = (n_{+1} q_+) \vec{E}_0 + (n_{+0} q_+) \vec{E}_1$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = (n_{+1} q_+ + n_{-1} q_-) / \epsilon_0$$

$$n_+ = n_{+0} + n_{+1}$$

$$n_- = n_{-0} + n_{-1}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$$

此处只列出正电

荷满足的方程

‘+’，负电荷方

程与正电荷对称，

此处不列出。

电中性气体（抑制电荷密度涨落）模型

► 在大多数情况，处理电中性体系。

1. 假设1：局域电中性（抑制电荷密度涨落） $n_{+1}q_{+} + n_{-1}q_{-} = 0$

2. 假设2：声速假设 $p_{+1} = Cs_{+}^2\rho_{+1} = Cs_{+}^2m_{+}n_{+1}$

3. 假设3：同质量，同声速 $m = m_{+} = m_{-}$ $Cs = Cs_{+} = Cs_{-}$

► 结合流体的扰动方程。

$$\frac{\partial^2(n_{+1} + n_{-1})}{\partial^2 t} - Cs^2 \nabla^2(n_{+1} + n_{-1}) = 0$$

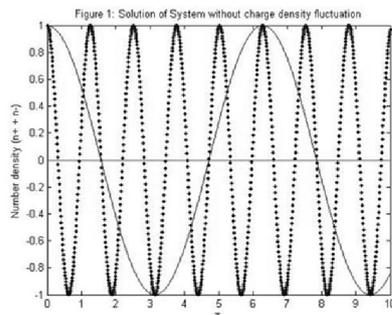
► 解

$$(n_{+1} + n_{-1}) = C_1 \cos(\omega_k t) + C_2 \sin(\omega_k t)$$

$$\omega_k = Csk$$

7

电中性气体（抑制电荷密度涨落）模型



► 结论：

1. 涨落震荡，没有塌缩或膨胀。
2. 振动模式与初始条件无关。

► 局限：

1. 局域电中性
2. 粒子仅电荷差异

8

两组分气体（电荷密度涨落）模型

▶ 两种粒子性质不做限定，存在电荷密度涨落。

1. 假设1：电荷密度涨落很大，且局域失衡严重 $n_{+1}q_{+} \gg n_{-1}q_{-}$

▶ 在该局域电荷失衡情况，扰动满足

$$\text{的方程近似 } \nabla \cdot \vec{E}_1 = (n_{+1}q_{+} + n_{-1}q_{-})/\epsilon_0 \simeq (n_{+1}q_{+})/\epsilon_0$$

▶ 先处理“+”粒子，带入扰动流体模型

$$\frac{\partial^2 n_{+1}}{\partial t^2} - C s_{+} \nabla^2 n_{+1} + n_{+0} q_{+}^2 n_{+1} / \epsilon_0 = 0$$

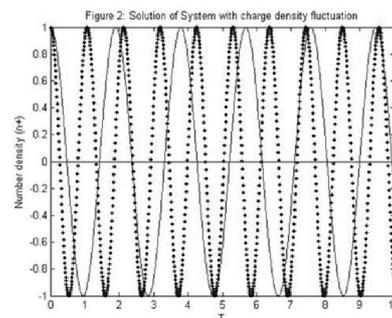
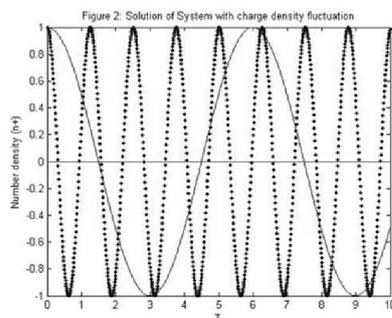
▶ 解

$$n_{+1}(k, t) = C_1 \cos(\omega'_k t) + C_2 \sin(\omega'_k t)$$

$$\omega'_k = \sqrt{C s_{+}^2 k^2 + n_{+0} q_{+}^2 / \epsilon_0}$$

9

两组分气体（电荷密度涨落）模型



结论：

1. 震荡，无塌缩。
2. 对 $k=0$ 的解也震荡，没有稳定解。
3. 震荡情况与初始条件有关。密度越大，频率越高。

10

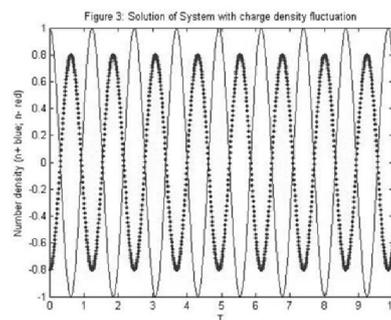
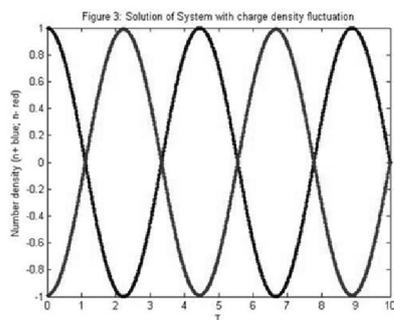
两组分气体（电荷密度涨落）模型

- ▶ 再处理“-”粒子，带入 $\frac{\partial^2 n_{-1}}{\partial^2 t} - C_{s-} \nabla^2 n_{-1} + n_{-0}^2 q_+ q_- n_{+1} / \epsilon_0 = 0$
扰动流体模型假设。
- ▶ 由 $n_{+1} q_+ \gg n_{-1} q_-$ ，一般 $|q_+| \sim |q_-|$ ，所以 $n_{+1} \gg n_{-1}$ $\frac{\partial^2 n_{-1}}{\partial^2 t} + n_{-0}^2 q_+ q_- n_{+1}(\vec{k}, t) / \epsilon_0 = 0$
- ▶ 解
$$n_{-1}(k, t) = \frac{n_{-0}^2 q_+ q_-}{\epsilon_0 \omega'_k{}^2} n_{+1}(k, t)$$

$$= \frac{n_{-0}^2 q_+ q_-}{C_{s+}^2 k^2 \epsilon_0 + n_{+0}^2 q_+^2} n_{+1}(k, t)$$
- ▶ 其中 $n_{+1}(k, t) = C_1 \cos(\omega'_k t) + C_2 \sin(\omega'_k t)$

11

两组分气体（电荷密度涨落）模型



结论：

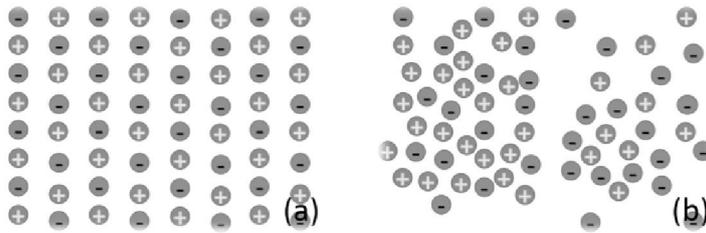
1. 两组分体系涨落不能放大。
2. 两个组分震荡幅度差 π 。
3. 震荡幅度受体系初始浓度影响，只于涨落幅度较大的粒子组分声速有关。

12

总结

通过对不同模型的论述，包括满足局域电中性气体以及一般的电荷气体组分，可以得到结论：

1. 电荷体系有存在稳定的解，均匀各向同性分布的稳定解。
2. 在电荷相互作用的体系中，不会自发造成涨落放大，体系不会塌缩形成类似自引力系统中的局部团簇。从能量分析的角度，也可以理解是局部团簇的体系造成造成体系自由能过高而不能稳定存在。



13

未来工作展望

1. 如何在电荷体系中间形成局域的高密度态？
2. 在有磁场存在的体系中，如何分析电荷的局域密度分布？

$$F_1 = q_0(E_1 + v_1 \times B)$$

可以看到磁场的影响在可以和电场比较时，会对体系的行为造成较大的影响。

14

