

Chua's circuit 的数值模拟

吉聆远

Wednesday, June 18, 2014

混沌现象(Chaos)

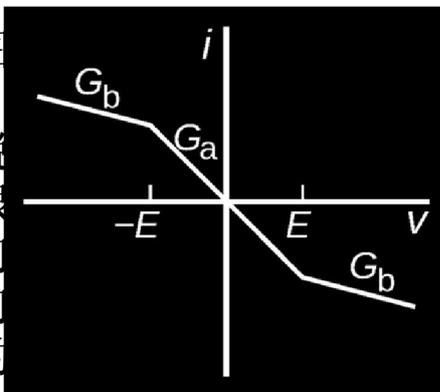
非线性科学中的混沌现象指的是一种确定的但不可预测的运动状态。

它的外在表现和纯粹的随机运动很相似，即都不可预测。但和随机运动不同的是，混沌运动在动力学上是确定的，它的不可预测性是来源于运动的不稳定性。或者说混沌系统对无限小的初值变动和微扰也具有敏感性，无论多小的扰动在长时间以后，也会使系统彻底偏离原来的演化方向。

负阻器(Chua's diode)

负阻器是一种电路元件，它的伏安特性曲线由右图所示。

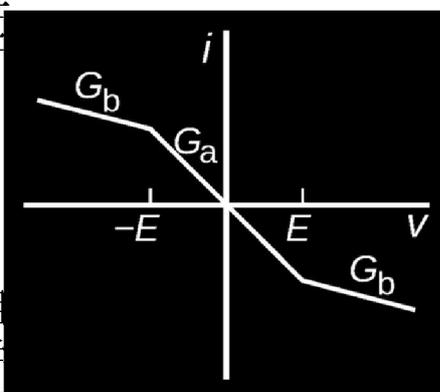
负阻器的伏安特性曲线说明它和一般的电阻元件很不同：首先，在加以正向电压的时候，它产生反向电流，在加以反向电压的时候它产生正向电流。



负阻器(Chua's diode)

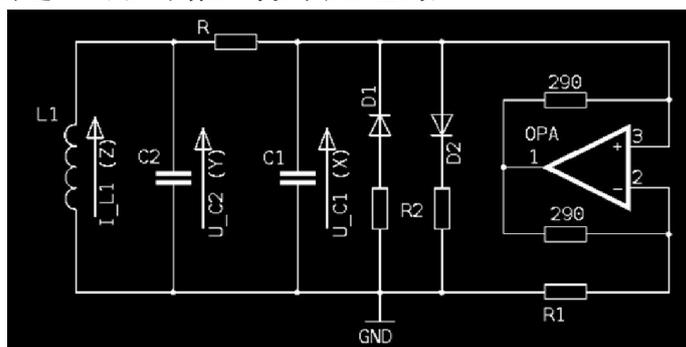
其次，负阻器的伏安特性不是线性的。在电压小于转变电压 E 时；它的电导是 $-G_a$ ，电压超过转变电压 E 时，它的电压随电流按照 $-G_b$ 斜率变化。

以上两个特性决定了负阻器可以激发电路的振荡并且给电路加以非线性因素。

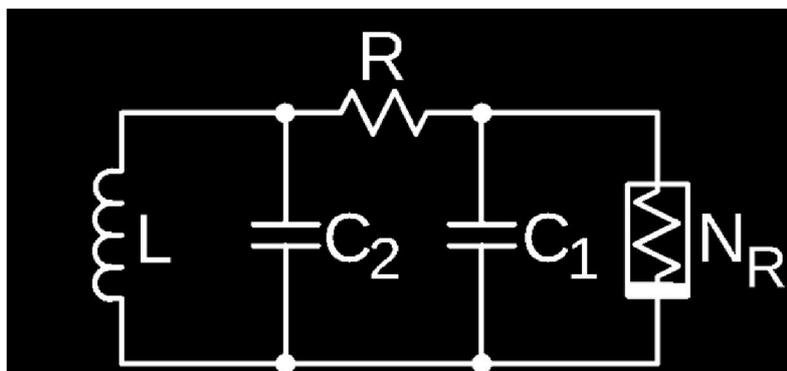


负阻器(Chua's diode)

负阻器并没有商业化生产，但是它可以由各种电阻、二极管和运算放大器组成的电路来实现。下图是一种可能的实现电路。



蔡氏电路(Chua's circuit)



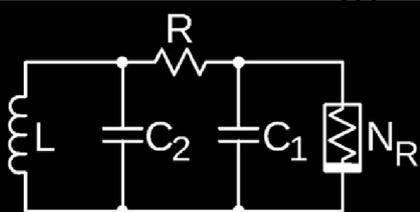
其中L是电感，R是可变电阻， C_1 和 C_2 是电容器， N_R 是负阻器，它的伏安特性曲线如前图所示。

Chua's circuit 的状态方程

$$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = G(V_{C_2} - V_{C_1}) - g(V_{C_1})$$

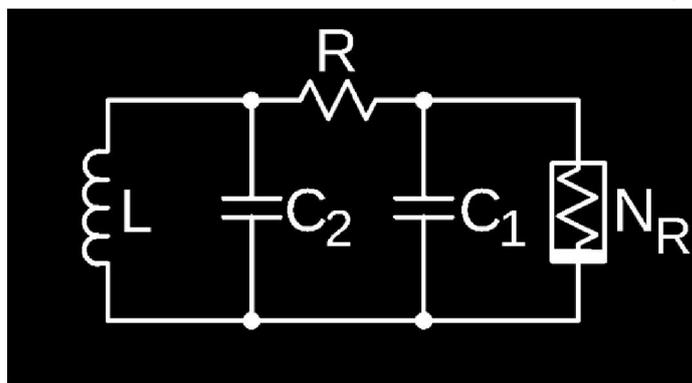
$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = G(V_{C_2} - V_{C_1}) + i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -V_{C_2}$$



V_{C_1} , V_{C_2} 是电容器电压;
 i_L 是流过电感的电流;
 G 是电阻 R 的电导;
 函数 g 是负阻器的伏安特性

Chua's circuit 的典型参数



$$L = 25.5 \text{ mH}, R = 0.9999 \Omega,$$

$$C_1 = 10.25 \text{ nF}; C_2 = 100 \text{ nF};$$

负阻器的转变电压 $E = 1 \text{ V}$

$$\text{电导 } G_a = 0.75 \text{ mS}, G_b = 0.41 \text{ mS}$$

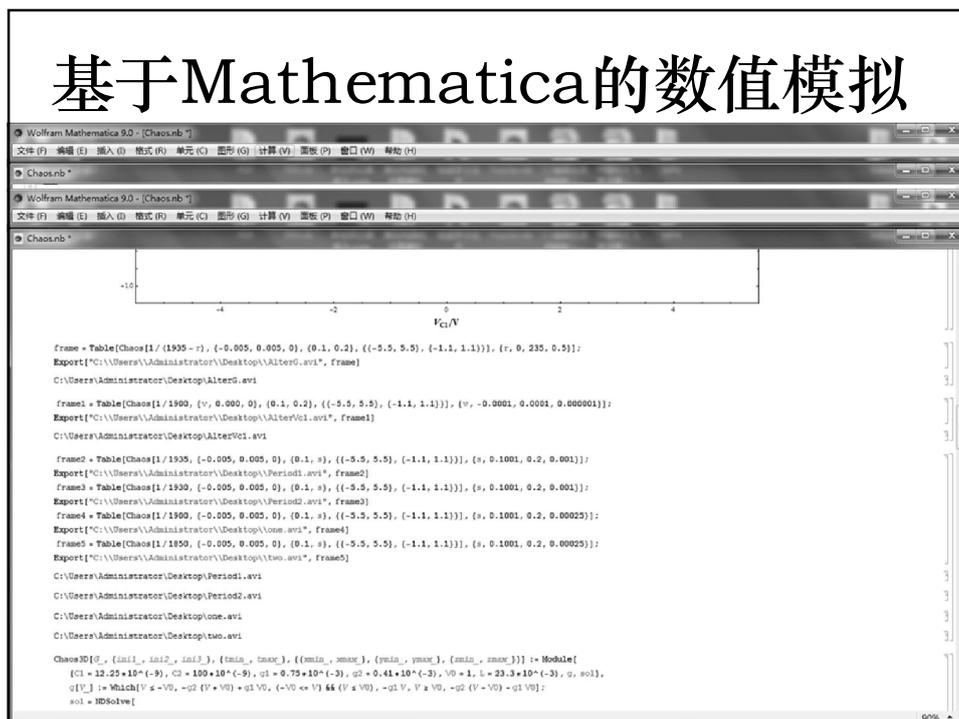
Chua's circuit 的数值模拟

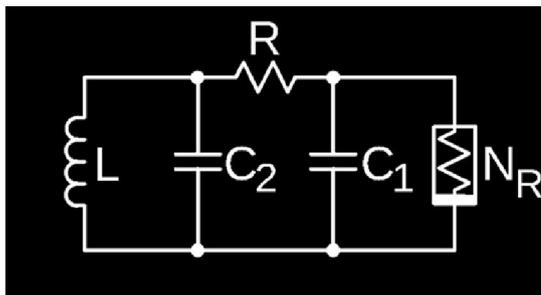
由于Chua's circuit的动力学方程是非线性的，这样我们就不能给出解析解，但是我们可以通过数值计算给出这些动力学方程的数值解。

由于Chua's circuit是可以自我激发振荡的，所以我们只要给任何电容器任何一个小的扰动，最后系统就会开始自激地震动起来。通过合适的电阻器R的阻值的选取，我们将观测到电路的不同混沌模式。

为了更好的观察这些数值解，我们以横轴为 V_{C_1} ，纵轴为 V_{C_2} ，以时间为参数作图，（这样的图像叫做相图）来观察这个电路的行为。在实验上绘制相图只需要把 V_{C_1} ， V_{C_2} 接在示波器上即可。

基于Mathematica的数值模拟





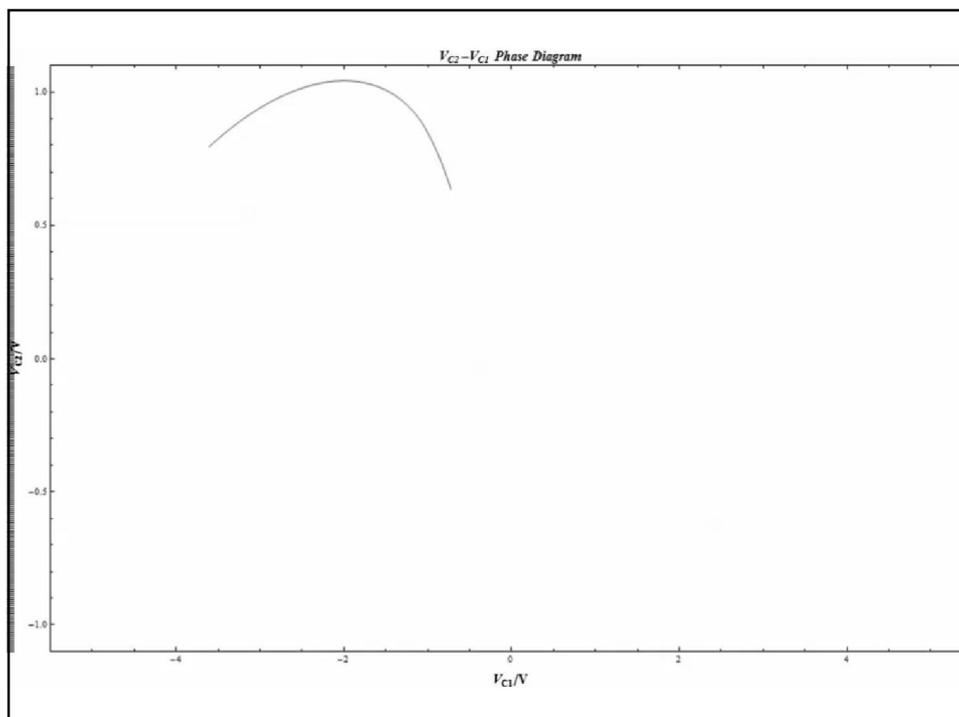
一倍周期 非混沌状态

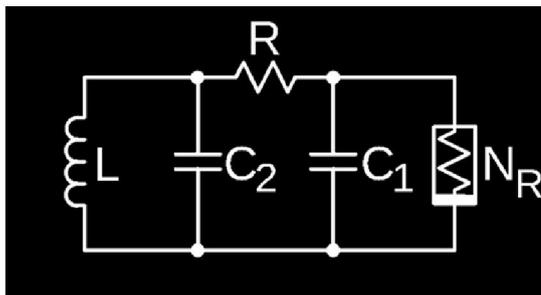
$$R = 1935 \Omega$$

$$V_{C_1} = -0.005 V$$

$$V_{C_2} = 0.005 V$$

$$i_L = 0 A$$





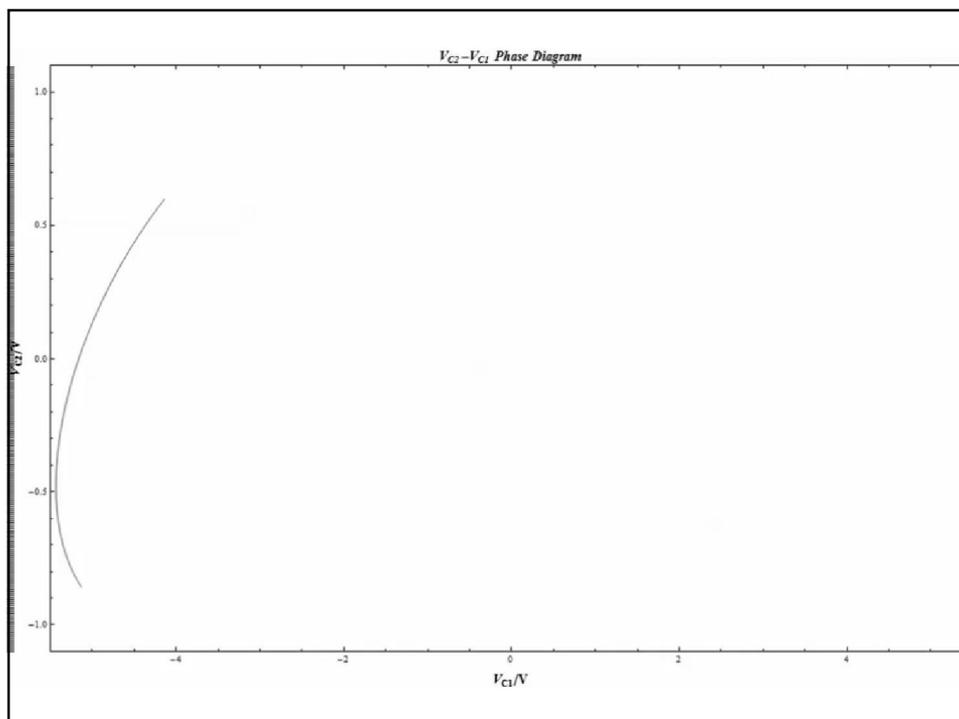
倍周期分岔 混沌的序幕

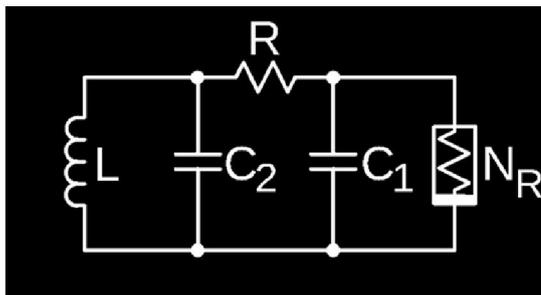
$$R = 1930 \Omega$$

$$V_{C_1} = -0.005 V$$

$$V_{C_2} = 0.005 V$$

$$i_L = 0 A$$





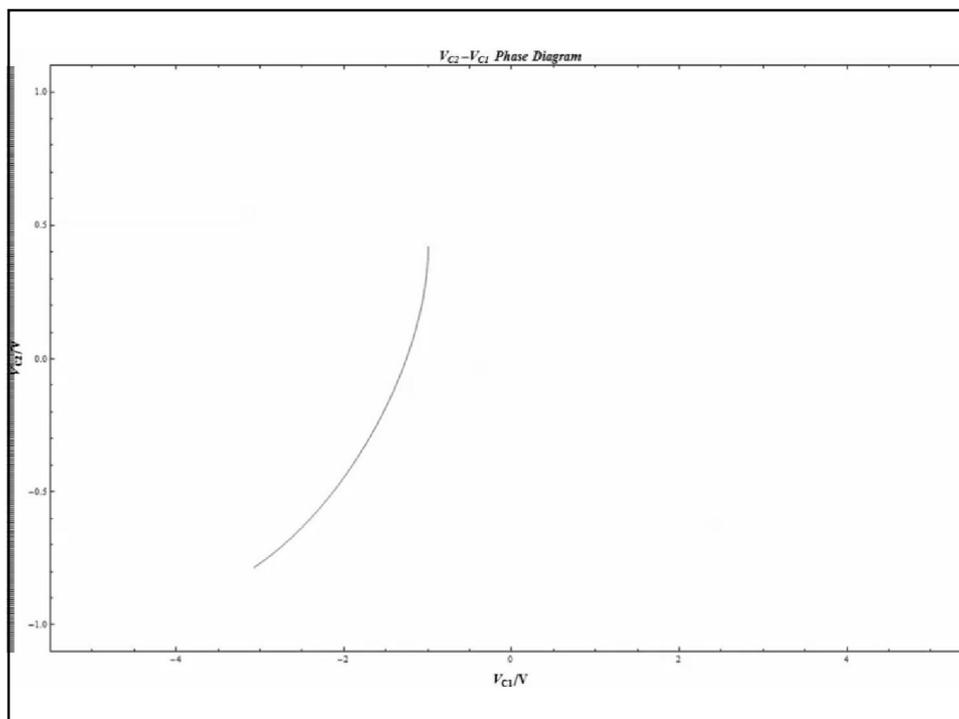
单漩涡 混沌模式

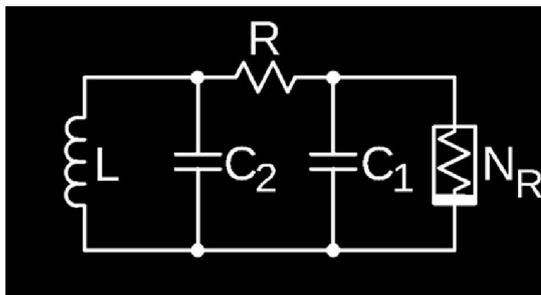
$$R = 1900 \Omega$$

$$V_{C_1} = -0.005 V$$

$$V_{C_2} = 0.005 V$$

$$i_L = 0 A$$





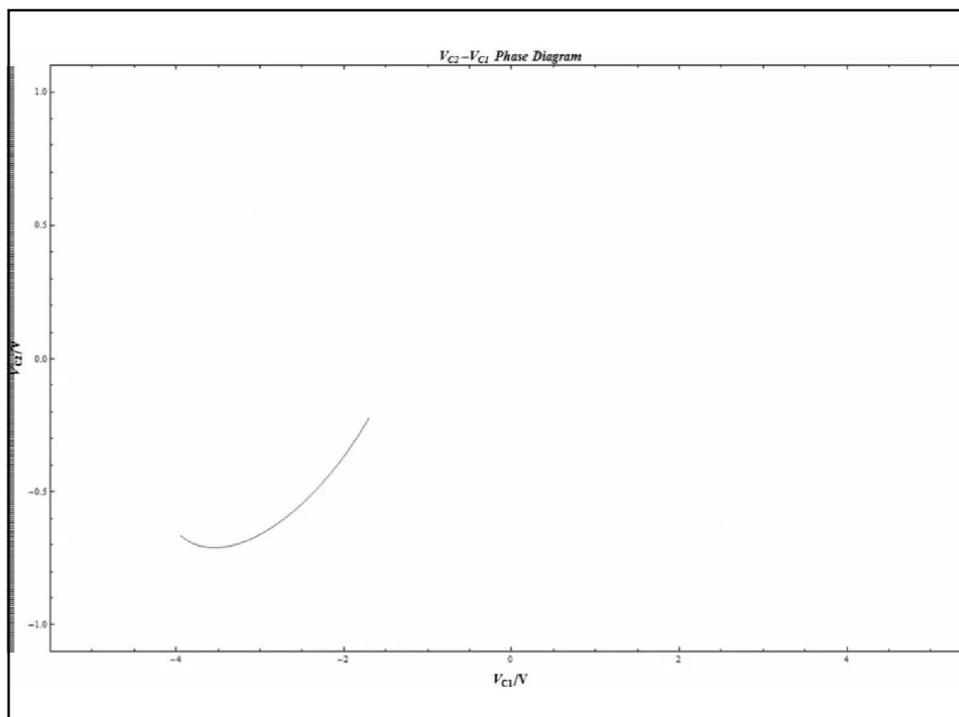
双旋涡 混沌模式

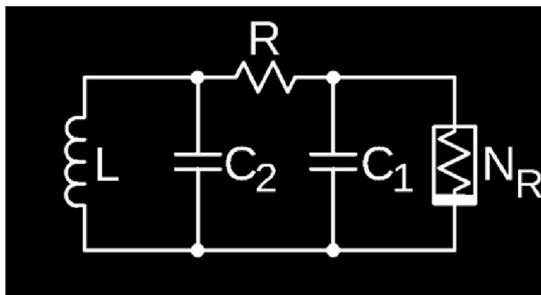
$$R = 1850 \Omega$$

$$V_{C_1} = -0.005 V$$

$$V_{C_2} = 0.005 V$$

$$i_L = 0 A$$





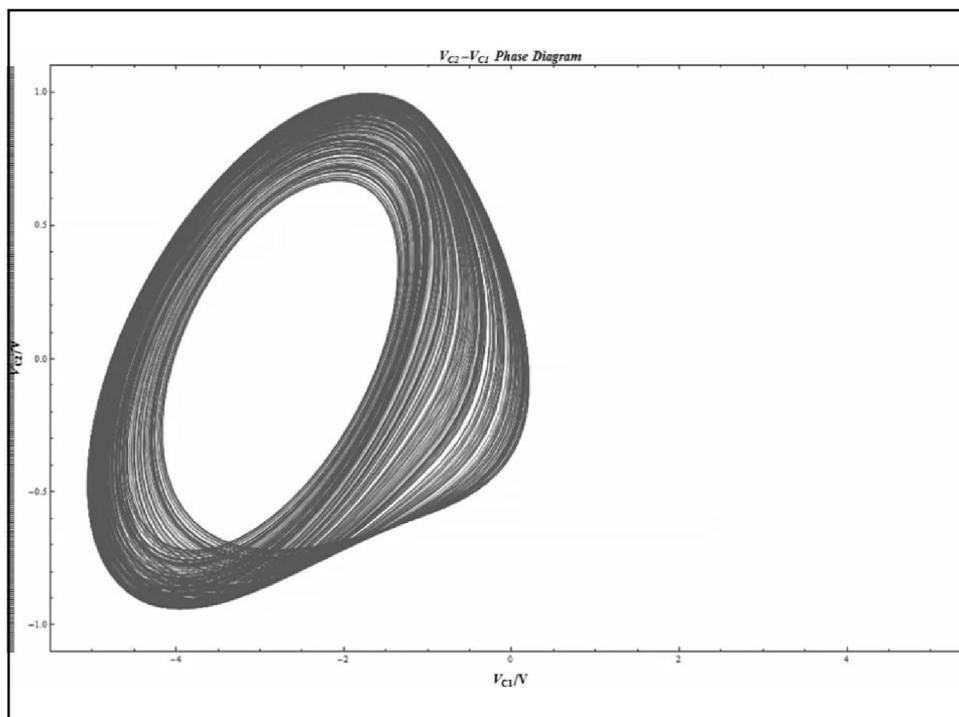
混沌吸引子

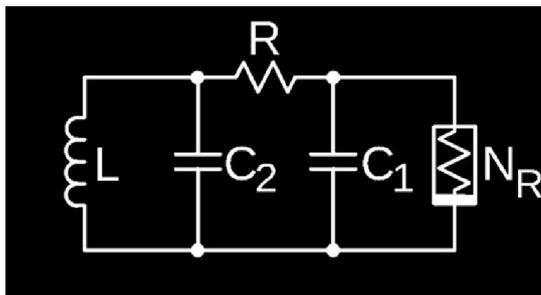
$$R = 1900 \Omega$$

$$V_{C_1} = -0.0001 \sim 0.0001 V$$

$$V_{C_2} = 0 V$$

$$i_L = 0 A$$





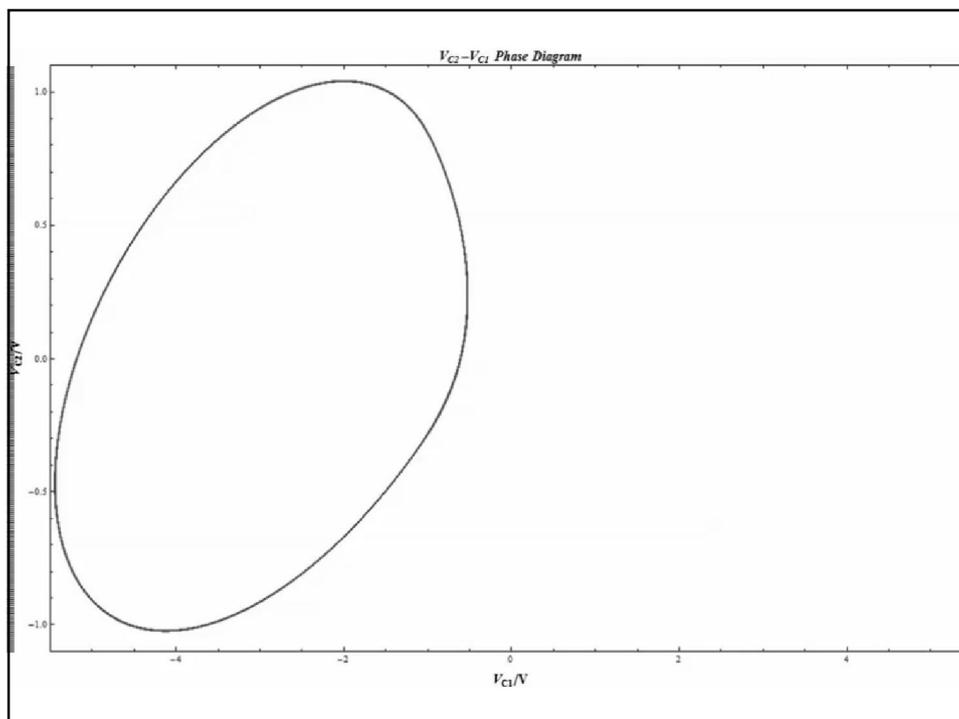
混沌随可变电阻的演化

$$R = 1935 \sim 1700 \Omega$$

$$V_{C_1} = -0.005 V$$

$$V_{C_2} = 0.005 V$$

$$i_L = 0 A$$



数值模拟发现的混沌特点

- 1 有吸引子：好像要去吸引相图中的运动轨道
- 2 对初始条件敏感：初始条件微弱的变化就会使得系统未来的演化千差万别。
- 3 轨道稠密：在系统的演化过程中只要时间足够长，在给定的某个位置的附近的轨道是非常稠密的。
- 4 内禀随机性：系统由确定的动力学方程描述，但是却表现出杂乱无章的类似随机过程的性质。这样貌似随机的确定性，被称为内禀随机性

数值模拟发现的混沌特点

- 5 系统的长期行为具有某些全局和普适性的特征，与初始条件无关：比如初始条件在一定的范围内的时候，系统最后的演化轨道都会落入某个确定的吸引子。
- 6 系统随着参量的改变，演化状态的变化是：
 - …一倍周期—两倍周期—四倍周期—……—
 - 阵发混沌—单旋涡混沌—双旋涡混沌—…

