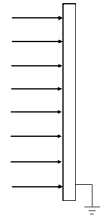


## 金属网静电屏蔽 & 网格结构对屏蔽效果的影响

郭卜铭 PB14203079

我们知道无限大接地导体板能对垂直于板面的匀强电场的一侧起到完全静电屏蔽的作用。但是实际上为了节约材料等原因，通常采用金属网来屏蔽电场，但这样静电屏蔽效果就会受到一定的影响。

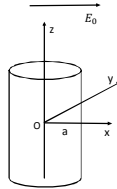
因此，下面我们将讨论在匀强电场中的导体对电场产生的影响，并分析不同网格结构的金属网的屏蔽效果。



### 无限长导体圆柱

真空中一半径为a的无限长导体圆柱垂直置于匀强电场中，设单位长度圆柱带电λ。在柱坐标系(ρ, θ, z)下，因电势分布于z无关，则由拉普拉斯方程：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0$$



其分离变量解为：

$$\varphi(\rho, \theta) = R(\rho)\Phi(\theta)$$

代入上式，可得R与Φ分别满足的线性齐次常微分方程：

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \frac{m^2}{\rho^2} R$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} = -m^2 \Phi$$

其中m<sup>2</sup>为实常数，由齐次边界条件或正则条件确定。由上两式可解得：

$$R_m = \begin{cases} a_0 + b_0 \ln \rho, & m=0 \\ a_m \rho^m + b_m \rho^{-m}, & m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Phi_m = \begin{cases} c_0 + d_0 \theta, & m=0 \\ c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta, & m \neq 0 \end{cases}$$

则电势可表示为：

$$\varphi = (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \theta) + \sum_{m \neq 0} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m})(c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta)$$

其中各系数由边值关系和边界条件确定。

因θ在0到2π上变化，φ为单值函数，故Φ为θ的周期函数，且周期2π，则m必须为整数，d<sub>0</sub>=0。

尝试取上式第一项与m=1项的和，并取d<sub>0</sub> = d<sub>1</sub> = 0，不妨设c<sub>0</sub> = c<sub>1</sub> = 1，a<sub>0</sub> = -b<sub>0</sub> ln ρ<sub>0</sub>，则：

$$\varphi = b_0 \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \left( a_1 \rho + \frac{b_1}{\rho} \right) \cos \theta$$

其中3个待定系数，一个对电场无影响的常量ρ<sub>0</sub>，可由适当选取电势零点来确定。

无穷远处圆柱可视为长直导线产生的电势与匀强电场产生的电势叠加，即电势渐近值为-E<sub>0</sub>ρcosθ与正比于ln ρ项之和，比较上式可见，a<sub>1</sub> = -E<sub>0</sub>。

再由导体表面为等势面，得b<sub>1</sub> = -a<sub>1</sub>a<sup>2</sup> = E<sub>0</sub>a<sup>2</sup>

又表面处

$$\varepsilon_0 a \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\theta = -\lambda$$

故得b<sub>0</sub> = - $\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0}$

则圆柱外电势分布为：

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) - E_0 \rho \cos \theta + \frac{E_0 a^2}{\rho} \cos \theta$$

电场分布为：

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

$$= \left[ \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \rho^2} + E_0 \left( 1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \cos \theta \right] \mathbf{e}_\rho - E_0 \left( 1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

即

$$E_{x_0}(x, y, E_0) = E_\rho \cos \theta - E_\theta \sin \theta = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \rho} \cos \theta + E_0 + E_0 a^2 \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\rho^2}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2} + E_0 + E_0 a^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

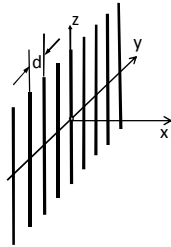
$$E_{y_0}(x, y, E_0) = E_\rho \sin \theta + E_\theta \cos \theta = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \rho} \sin \theta + E_0 a^2 \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \frac{y}{x^2 + y^2} + E_0 a^2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

### 无穷大金属栅栏

对于等间距d平行排列的N根无限长圆柱导线，因实际上导体柱半径a << d，则在此条件下空间中总电势可视为各导体柱在各自分场强 $\frac{E_0}{N}$ 作用下的叠加，即总电场也可由单根细圆柱叠加而成。

如图所示，以其中一根为坐标原点建立x, y轴，其两侧分别有n根金属线，则利用前面导体圆柱的结果，可算得当n → ∞时，x, y方向的场强分量：



$$E_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n E_{x_0} \left( x, y - kd, \frac{E_0}{2n+1} \right) = \frac{\lambda}{4\epsilon_0 d} \left[ \coth \frac{\pi(x+iy)}{d} + \coth \frac{\pi(x-iy)}{d} \right] + E_0$$

$$E_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n E_{y_0} \left( x, y - kd, \frac{E_0}{2n+1} \right) = -\frac{\lambda}{4\epsilon_0 d} i \left[ \coth \frac{\pi(x-iy)}{d} - \coth \frac{\pi(x+iy)}{d} \right]$$

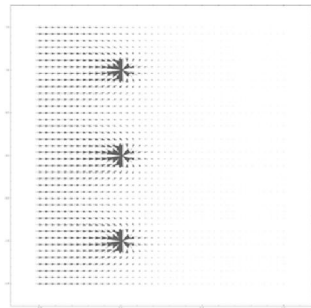
其中， $i^2 = -1$   
 则总场强： $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$   
 在无穷远处，即  $x \rightarrow +\infty$  时，有  $E_x \rightarrow \frac{\lambda}{2\epsilon_0 d} + E_0$ ,  $E_y \rightarrow 0$ ，所以静电屏蔽时，应有  $\lambda = -2\epsilon_0 d E_0$ ，使得  $E_x \rightarrow 0$ ,  $E_y \rightarrow 0$ ，即  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{0}$   
 此时

$$E_x = E_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \coth \frac{\pi(x+iy)}{d} + \coth \frac{\pi(x-iy)}{d} \right) \right]$$

$$E_y = \frac{E_0}{2} i \left[ \coth \frac{\pi(x-iy)}{d} - \coth \frac{\pi(x+iy)}{d} \right]$$

由此，我们可以用Mathematica作出该电场的矢量图

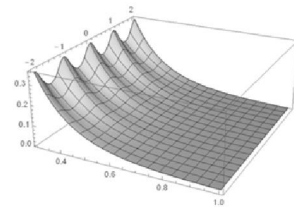
图中密集处即为导体所在处，x, y均以d为单位。可见在较远处电场几乎为零，屏蔽效果很明显。



为了衡量此种金属栅栏的静电屏蔽效果，我们可以计算其在空间各处的场强大小

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0 \sqrt{\left[ \coth \frac{\pi(x-iy)}{d} - 1 \right] \left[ \coth \frac{\pi(x+iy)}{d} - 1 \right]}$$

在  $x=0.3d$  到  $d$ ， $y=-2d$  到  $2d$  范围内作出场强大小与x, y的关系图：



可见场强沿栅栏排列方向周期分布，随与其距离增加急剧下降

在与栅栏面相距x处，平面内最大场强为

$$E_{max} = \left( \coth \frac{\pi x}{d} - 1 \right) E_0$$

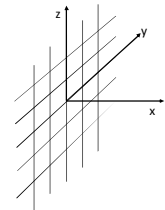
由场强分布的周期性，单位面积上的平均场强可由下式计算：

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{d/2} E dy}{d/2}$$

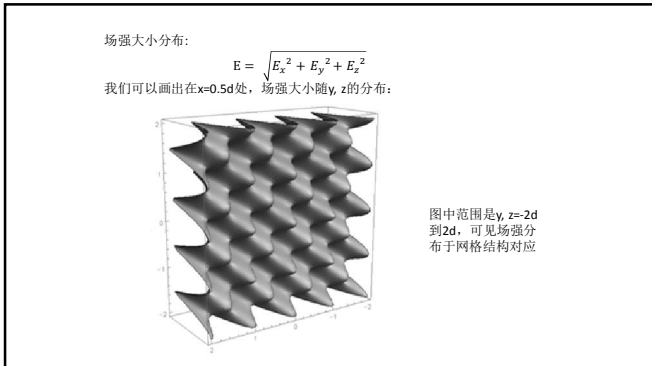
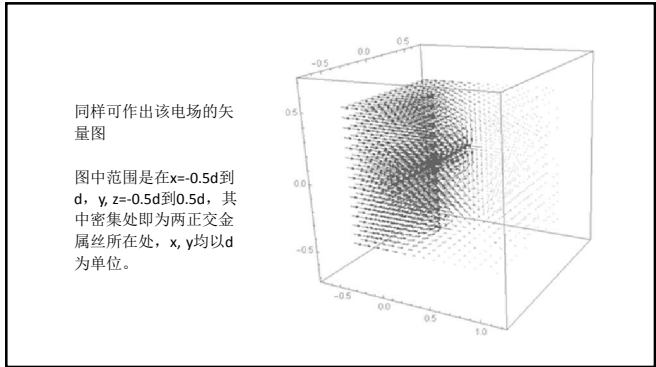
### 正方形网格

对于无限大正方形网格的金属网，如图，网格边长d，可近似视为由两个前面的栅栏正交叠合而成，同理可进行电场叠加，利用金属栅栏的电场计算公式得：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E} \left( x, y, \frac{E_0}{2} \right) + \mathbf{E} \left( x, z, \frac{E_0}{2} \right)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{E_0}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \coth \frac{\pi(x+iy)}{d} + \coth \frac{\pi(x-iy)}{d} \right) \right] \mathbf{e}_x \\
 &+ \frac{E_0}{4} i \left[ \coth \frac{\pi(x-iy)}{d} - \coth \frac{\pi(x+iy)}{d} \right] \mathbf{e}_y + \frac{E_0}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \coth \frac{\pi(x+iz)}{d} + \coth \frac{\pi(x-iz)}{d} \right) \right] \mathbf{e}_x \\
 &+ \frac{E_0}{4} i \left[ \coth \frac{\pi(x-iz)}{d} - \coth \frac{\pi(x+iz)}{d} \right] \mathbf{e}_z \\
 &= E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z
 \end{aligned}$$



在相距 $x$ 处, 平面内最大场强同为:

$$E_{max} = \left( \coth \frac{\pi x}{d} - 1 \right) E_0$$

这是自然的, 因为它们都是金属栅栏在长直导线沿外电场方向平面内的总电场, 因此, 对于相同的 $d$ , 栅栏状, 正方形, 三角形网格该值均相同。

单位面积上的平均场强可由下式计算:

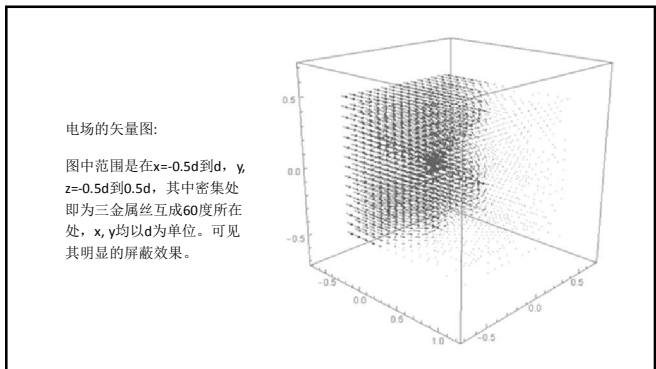
$$E = \frac{\int_0^{d/2} \int_0^{d/2} E dy dz}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

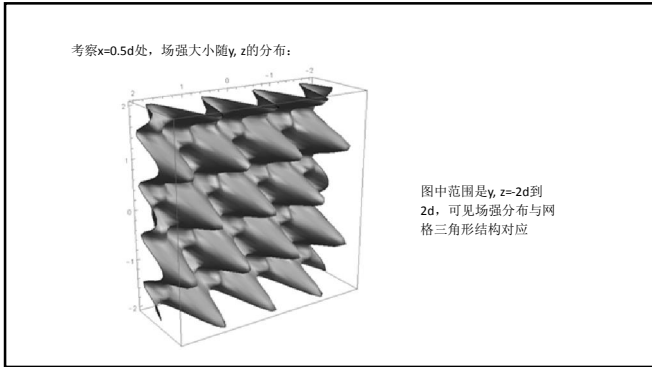
### 正三角形网格

对于如图的正三角形结构的金属网络, 可将其视为由3层导体栅栏各夹角 $60^\circ$ 叠成。同理可进行电场叠加。利用绕 $x$ 轴旋转 $\delta$ 角的坐标公式:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &= x \\
 \tilde{y} &= y \cos \delta + z \sin \delta \\
 \tilde{z} &= z \cos \delta - y \sin \delta
 \end{aligned}$$

叠加后电场:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \mathbf{E} \left( x, y, \frac{E_0}{3} \right) + \mathbf{E} \left( x, y \cos \frac{\pi}{3} + z \sin \frac{\pi}{3}, \frac{E_0}{3} \right) \\
 &+ \mathbf{E} \left( x, y \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + z \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right), \frac{E_0}{3} \right)
 \end{aligned}$$




由前面分析知，在相距网格面 $x$ 处，平面内最大场强为：

$$E_{max} = (\coth \frac{\pi x}{d} - 1)E_0$$

单位面积上的平均场强可由下式计算：

$$\bar{E} = \frac{\int_0^d \int_0^{d/\sqrt{3}} E dz dy}{\frac{d}{\sqrt{3}} d}$$

### 正六边形网格结构

正六边形的网格结构与前面的正方形三角形不同，它不能直接由栅栏状层面叠合而成，这给计算其电场分布带来了一定的困难。正因如此，这里将只给出两种理论上可行的计算方法：

1. 设六边形边长为 $L$ ，在 $a \ll L$ 时，可通过求 $L$ 长的均匀带电棒的电势或电场分布，然后将其等间距平行排布后平移旋转后叠合为六边形网格。

ps. 因为这里的一个求和没有求出来，所以没有继续往下算

2. 三层六边形网格可以通过平移或旋转组成边长为 $L$ 的正三角形网格，可由对称性并借助三角形网格的结论求解。

最后同样可以求得 $E_{max}$ 与 $\bar{E}$ 。

### 各网格结构材料利用率比较

我们先计算以上这几种网格结构单位面积所用的材料长度

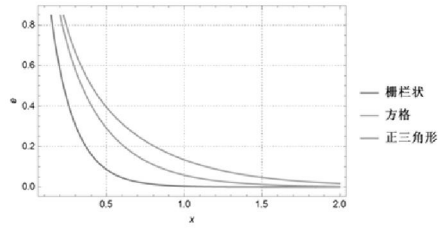
栅栏状： $\frac{d_1}{d_1^2} = \frac{1}{d_1}$

方格： $\frac{2d_2}{d_2^2} = \frac{2}{d_2}$

正三角形： $\frac{3}{2} \frac{d_3 \times \frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{\sqrt{3}}{4} (\frac{2}{\sqrt{3}} d_3)^2)} = \frac{3}{d_3}$

正六边形： $\frac{L/2}{\frac{\sqrt{3}}{4} L^2} = \frac{2}{\sqrt{3}L}$

因此，在用料相同的情况下，有 $d_1:d_2:d_3:L = 1:2:3:2/\sqrt{3}$   
 按此比例分别代入前面求出的 $E$ 关系式，数值积分可作出各自的 $E$ 与 $x$ 的曲线。其中 $x$ 均以 $d_1$ 为单位。



## 结论

由前面的讨论知，对于间距 $d$ ，有 $E_{max} = (\coth \frac{\pi x}{d} - 1)E_0$ ，显然 $d_1:d_2:d_3 = 1:2:3$ 时， $E_{max}$ 的大小关系为：

栅栏 < 正方形 < 正三角形

由上图可见， $E$ 的大小关系也为：

栅栏 < 正方形 < 正三角形

所以在用料相同的情况下，栅栏的静电屏蔽效果优于正方形网格结构，优于正三角形网格结构，即这三者的屏蔽效率为：

栅栏 > 正方形 > 正三角形

然而正六边形网格结构是无重叠、无空隙覆盖平面区域的最优形状，我们可以猜想这样的网格结构也是静电屏蔽的最优结构。但是其较复杂的表达式计算机未能解出，所以没有给出准确结果，这个猜想有待进一步通过分析计算验证。

谢谢！