由磁场与电场的对称性引发的一系列讨论

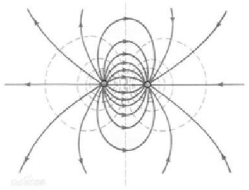
PB14203065

——赵浩宇

- 引言：一般情况下电场与磁场的非对称性
- 一、特殊条件下电场与磁场的对称性
- 二、电流与磁荷的对称性及其条件：
- 三、磁流与磁流法解电磁学问题：
- 四 、根据电场与磁场的对称性寻找磁单极子
- 五、总结

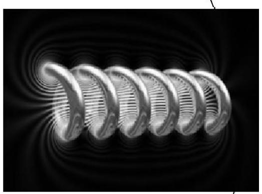
引言：一般情况下电场与磁场的非对称性

静电场



$$\vec{E}=\frac{q\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$ 有源无旋

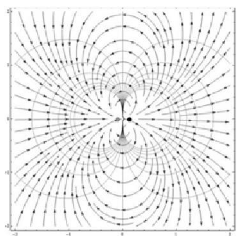
静磁场



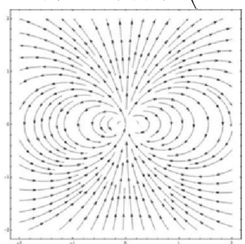
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 Id\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$$ 有旋无源

同为矢量场，两者数学在上就不具有对称性

一、特殊条件下电场与磁场的对称性



电偶极子在空间中的电场
图片来自物院一班周文彬同学



线度极小的载流线圈在空间中的磁场
图片来自物院一班周文彬同学

如果我们观察电偶极子，在空间中的电场以及线度极小的载流线圈在空间中的磁场，我们就会发现它们具有高度的对称性。

	电偶极子	环流磁矩
场强	$\vec{E}=-\frac{\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\frac{3(\vec{P}\cdot\hat{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{r}$	$\vec{B}=-\frac{\mu_0\vec{m}}{4\pi r^3}+\frac{3(\mu_0\vec{m}\cdot\hat{r})}{4\pi r^3}\hat{r}$
受的力	$\vec{f}=(\vec{P}\cdot\nabla)\vec{E}$	$\vec{f}=(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$
受的力矩	$\vec{L}=\vec{P}\times\vec{E}$	$\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}$

$\vec{a} \Leftrightarrow \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$ $\vec{a} \Leftrightarrow \mu_0\vec{m}$

两者具有极高的对称性。假如我们用一个矢量a来代替电偶极矩以及磁矩，那么电场与磁场在公式的形式上将完全相同。

矩a在空间中的矢量场W:

$$\vec{W}=-\frac{\vec{a}}{4\pi r^3}+\frac{3(\vec{a}\cdot\hat{r})}{4\pi r^3}\hat{r}$$

矩a在匀强场中所受的力矩L:

$$\vec{L}=k\vec{a}\times\vec{W}$$

矩a在匀强场中所受的力f:

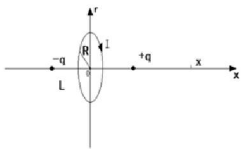
$$\vec{f}=(k\vec{a}\cdot\nabla)\vec{W}$$

电偶极子的电场与载流线圈（线度极小）的磁场具有对称性
电偶极子与载流线圈（线度极小）也具有对称性。

二、电流与磁荷的对称性及其条件：

引入磁荷概念，磁偶极子在空间中的场与载流线圈相同

在载流线圈中寻找磁荷：



eg：如右图，I，R，已知，求q，L：

$$B=\frac{\mu_0 IR^3}{2\left(R^2+X^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B=\frac{q}{4\pi\mu_0(X-\frac{L}{2})^2}-\frac{q}{4\pi\mu_0(X+\frac{L}{2})^2}$$

左侧两式应完全相等，既对任意X，q，L值不变，然而事实是由此我们并不能得到与X值无关的q与I。事实上，在o点两种方法得到的磁场方向都是相反的

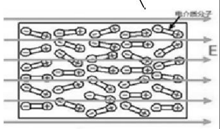
若要对称性成立，磁偶极子与载流线圈的线度都必须足够小。所以当我们离线圈与磁偶极子足够近以至于可以看清其内部结构时，两者将不具有对称性。只有当我们距两者足够远，可以忽略两者的内部结构时，我们才可以说他们是对称的，在这种情况下I，R，q，l等物理量将不具有意义，我们所能观察的到的只有他们的矩p/μ_0，$\mu_0 \cdot m$。

$$I \not\Leftrightarrow q \qquad \frac{\vec{P}}{\mu_0} \Leftrightarrow \mu_0\vec{m}$$

电流与一对磁荷不具有对称性，只有被紧紧束缚在一起的一对磁荷以及在一限度极小的闭合线圈中流动的电流才具有对称性。

三、磁流与磁流法解电磁学问题：

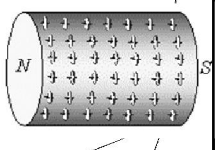
类比上面的方法，电偶极子也可以用一载流线圈等效。由电场与磁场的对称性知，此线圈中流动是由磁荷的定向流动形成的磁流。



在电场问题中的磁流法：

孤立电荷与磁流是不具有对称性的，所以只有在只存在极化电荷的空间中，我们才可以使用。

由于载流线圈在电介质中相互重合的部分磁流方向完全相反，因此在外面看来，就如同一个缠绕在电介质上的载流线圈在空间中的电场。

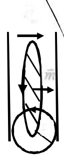


$$\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}=\vec{m_e}\varepsilon_0 \Rightarrow qL=\varepsilon_0^{2}SI \Rightarrow I=\frac{qL}{\varepsilon_0^{2}S}$$

例：求平行板电容器边缘附近的电场分布（体现边缘效应）。设极板间距为*d*，面电荷密度为σ。计算中，设场点离电容器边缘的距离*r* 远大于*d*，但远小于极板尺寸

解：

该电场原则上可由面电荷电场公式计算，但要进行复杂的面积分运算。



面电荷 → 电介质 → 电偶极子 → 磁矩 → 电流环

$$Q=\sigma S \qquad I=\frac{Qd}{S\varepsilon_0\varepsilon_0}=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon_0}$$

类比磁场中的公式：

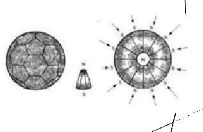
$$E=\frac{\varepsilon_0 I}{2\pi r}=\frac{\sigma d}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

四 、由电场与磁场的对称性问题带来的关于磁单极子的猜想。

被紧紧束缚在一起的异种磁荷与在线度极小的闭合线圈中定向移动的电荷具有对称性

被紧紧束缚在一起的异种电荷与在线度极小的闭合线圈中定向移动的磁荷具有对称性

- 由我们找到的磁荷与电荷的对称性关系，我们可以大胆假设，假设磁单极子存在，它很可能以磁偶极子的形式或者在极小线度内做圆周运动的形式存在
- 那么如果存在足够高的能量，能够破坏磁单极子的这种束缚，也许我们就能够得到自由的磁单极子。



2014年1月德国科学家宣布找到了一种“磁单极子”

五、总结

在特殊条件下电场与磁场的对称性 ⇒ 电荷与磁荷具有对称性的条件 ⇒ 磁荷可能的存在形式

- 在上面 的讨论中，我们得到了在特殊条件下电场与磁场的对称性，进而得到了电荷与磁荷具有对称性的条件，进而猜想出了磁荷可能的存在形式。由此我们足以看出对称性在电磁学乃至整个物理学当中的重要作用。只有对物理学的对称性具有更深层次的认识，才能更好的学习物理，认识物理。

蟹蟹观看

参考文献：
《微积分学导论　下册》中国科学技术大学出版社
李思敏 宣本金 罗罗 叶盛 编

《电磁学与电动力学上》科学出版社
胡友秋 程福臻 叶邦角 刘之景　编著

特别感谢周文彬同学提供的图片

By　　赵浩宇
pb14203065