关于孤立导体表面的电荷分布规律的讨论

指导老师:潘海俊
报 告 人:冯家望

2015/11/20

目 录

2015/11/20

摘 要

本文首先阐述了严谨计算孤立导体表面的电荷分布的方法，鉴于其计算复杂，首先探讨了一种特殊导体：椭球体的传统计算方法并提出一种简单计算椭球体面电荷密度的方法。接下来猜想面电荷密度反比于导体曲面法向量的模，发现基于此猜想所得的结论与严谨计算符合的很好。

2015/11/20

引 言

设想空间中有一个以凸曲面 为边界的孤立导体
空间中没有外加电场，导体带电量为 ，问:如何求出导体的面上各
点的电荷分布?

2015/11/20

引 言

我们知道，在导体处于静电平衡状态下，导体表面的面电荷密度
因此我们只需要求出导体表面附近的电势分布情况。根据静电场的唯一性定理， 电势可由下方程组唯一确定：

2015/11/20

引 言

对于一般形状的导体来说，求解上述方程组过程十分繁琐。我们先考虑比较简单的情况。下面介绍一下求解椭球体静电平衡时表面电荷分布的方法。

2015/11/20

一般椭球体静电平衡时表面电荷分布

设 即导体为一个椭球体。进行椭球坐标系变换将简化计算过程，在椭球坐标系下求解上述方程组可以最终求得：

（计算过程过长，此处省略，具体参见文献《带电导体椭球的电势和电荷分布》-----张之翔）

比较简便的方法

首先考虑半径为c的带电导体球的情况：

静电平衡时，带电导体球上的电荷均匀地分布在球面上只有这样才能使导体球内部电场强度为零，这一点可以证明如下：取球心为坐标原点，以球内任一点 （位矢为 ）为顶点作锥面，分别在球面上截取无限小的面元 和 显然有 ，（ 为面元到点 的距离）由于库仑定律为平方反比规律因而两个面元所包含的面电荷元 和 在 点的合场强为零。由于球面上任何一面元都可以在 点另一侧找到其对应的面元,使它们的库伦力一一抵消，所以导体球内部场强处处为零。证明完毕。

坐标变换为椭圆体

坐标变换为椭圆体

坐标变换为椭圆体

坐标变换为椭圆体

坐标变换为椭圆体

坐标变换为椭圆体

对一般情况的猜想

对一般情况的猜想

对一般情况的猜想

对一般情况的猜想

验 证 猜 想

下面我们通过一些不同形状的规则孤立带电导体,利用上面的结论计算出相应导体上的面电荷密度（多数积分较复杂，计算时应用了数学软件[illegible]），再与解析法计算的结果一一作比较，发现结论完全相同（见下表）。

带电导体形状	曲面表达式	法向量的模	由(3.4)或(3.5)计算所得结果	严格计算的解(部分参考文献)	结论是否相同
大导体平板	$Ax+By+Cz=D$	$\lvert\nabla F\rvert=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$	$\sigma=\frac{Q}{2S}$	$\sigma=\frac{Q}{2S}$	是
球	$x^2+y^2+z^2=R^2$	$\lvert\nabla F\rvert=2R$	$\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$	$\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$	是
正圆柱	$x^2+y^2=R^2$	$\lvert\nabla F\rvert=2R$	$\sigma=\frac{Q}{2\pi RL}$	$\sigma=\frac{Q}{2\pi RL}$	是
长椭球	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$	$\lvert\nabla F\rvert=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2+z^2}{b^4}}$	$\sigma=\frac{Q}{4\pi ab^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2+z^2}{b^4}}}$	$\sigma=\frac{Q}{4\pi ab^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2+z^2}{b^4}}}$	是
扁椭球	$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\lvert\nabla F\rvert=2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}}$	$\sigma=\frac{Q}{4\pi a^2c\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$	$\sigma=\frac{Q}{4\pi a^2c\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$	是
一般椭球	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\lvert\nabla F\rvert=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$	$\sigma=\frac{Q}{4\pi abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$	$\sigma=\frac{Q}{4\pi abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$	是

续表：

抛物面	$y^2=2k(x+\frac{k}{2})$	$\lvert\nabla F\rvert=2\sqrt{2}\sqrt{k(x+k)}$	$\sigma=\frac{\sigma_0\sqrt{k}}{\sqrt{2(x+k)}}$ $[\sigma_0=\sigma(-\frac{k}{2},0,0)]$	$\sigma=\frac{\sigma_0\sqrt{k}}{\sqrt{2(x+k)}}$ $[\sigma_0=\sigma(-\frac{k}{2},0,0)]$	是
旋转抛物面	$y^2+z^2=2k(x+\frac{k}{2})$	$\lvert\nabla F\rvert=2\sqrt{2}\sqrt{k(x+k)}$	$\sigma=\frac{\sigma_0\sqrt{k}}{\sqrt{2(x+k)}}$ $[\sigma_0=\sigma(-\frac{k}{2},0,0)]$	$\sigma=\frac{\sigma_0\sqrt{k}}{\sqrt{2(x+k)}}$ $[\sigma_0=\sigma(-\frac{k}{2},0,0)]$	是
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (x>0)$	$\lvert\nabla F\rvert=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}$	$\sigma=\frac{\sigma_0}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}$ $[\sigma_0=\sigma(a,0,0)]$	$\sigma=\frac{\sigma_0}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}$ $[\sigma_0=\sigma(a,0,0)]$	是
旋转双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1\ (x>0)$	$\lvert\nabla F\rvert=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2+z^2}{b^4}}$	$\sigma=\frac{\sigma_0}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2+z^2}{b^4}}}$ $[\sigma_0=\sigma(a,0,0)]$	$\sigma=\frac{\sigma_0}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2+z^2}{b^4}}}$ $[\sigma_0=\sigma(a,0,0)]$	是

总　结

至此我们经过观察猜想得到了一种计算规则孤立导体静电平衡时面电荷密度的方法。结论对很多导体都适用，说明猜想本身应该具有一定参考价值。但是本猜想缺乏证明和严谨性，其适用范围肯定有局限性，例如对于有限尺度的导体平板来说就不适用，不过目前看来结论在二次曲面和可以忽略边缘效应且有对称性的导体中符合的很好。但也有可能完全由于巧合。其具体的适用对象需要进一步的研究。

谢谢观看