对偶四元数和
李代数的其他部分子代数在电磁学中的应用

PB14207027 黄安奇
PB14207063 王佳璇

四元数代数简介：背景、定义以及基本运算

四元数及时空观：从绝对时空到闵科夫斯基空间

四元数形式的基本物理量：定义

电磁的源与场：源、场、作用力的四元形式

波动方程：势、势的波动方程、二阶导数波动方程

场的能量与动量：能量、能流密度，动量、动量流密度

应用与推广：磁单极子的不存在性、旋量代数形式的电磁场物理量

2

四元数代数简介

我们将一个三维空间的实矢量

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

与一个实数a_0组合成一个数

$$A=a_0+\vec{a}$$

称为四元数，a_0称为四元数A的标部，实矢量$\vec{a}$称为四元数A的矢部。

如果a_i(i=0,1,2,3)中有至少一个是复数，那么就称A为双四元数，又称对偶四元数。

四元共轭 $\tilde{A} = a_0 - a_1\vec{i} - \vec{j} - a_3\vec{k} = a_0 - \vec{a}$

复共轭 $A^* = a_0^* - a_1^*\vec{i} + a_2^*\vec{j} - a_3^*\vec{k}$

厄米共轭 $A^\dagger = a_0^* - a_1^*\vec{i} - a_2^*\vec{j} - a_3^*\vec{k} = a_0^* - \vec{a}^*$

3

电磁学的四元代数准备

洛伦兹变换：表示观测者在不同惯性参照系之间对物理量进行测量时所进行的转换关系。坐标系转动的过程中，给定时空点在原新坐标系中的四位置R与R′之间成立如下变换公式：

$$R' = M^\dagger R M$$

其中M为坐标变换四元数。四坐标系变更时，两时空点的间隔是不变的，因而成立：

$$\|\Delta R'\| = \|M^\dagger\|\|\Delta R\|\|M\|$$

运算符号□：时空的四梯度算子，有$\Box=-\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\nabla$，

它有几个共轭的算子是$\begin{cases}\tilde{\Box} = -\Box^* = -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla \\ \Box^\dagger = -\Box = \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla\end{cases}$，它们的模方均相同，为

$\|\Box\|=\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$，称为达朗贝尔算子，

在惯性参考系间进行洛伦兹变换的性质是：$\Box' = M^\dagger \Box M$

4

四电磁源和四电磁场

假定物质静止时单位体积内带有电磁荷ρ_0，称为荷的体密度。若该物质运动的四速度$V=\gamma(ic+\vec{v})$，那么四电磁源的体密度为

$$J = \rho_0 V = ic\rho + \vec{j}$$

其中标部中的ρ和矢部分别是电磁荷和电磁流，有$\begin{cases}\rho = \gamma\rho_0 \\ \vec{j} = \gamma\rho_0\vec{v} = \rho\vec{v}\end{cases}$

由四速度的洛伦兹变换$V' = M^\dagger V M$可得，四电磁源的洛伦兹变换为$J' = M^\dagger J M$

记四电磁场为$G=icg_0+\vec{g}$，麦克斯韦的电磁理论已指出场的时空导数与源成比例，所以我们推测真空中四电磁场的四梯度与四电磁源成正比：

$$\Box G = \mu_0 J$$

其比例常数μ_0取决于场G和源J量度单位的选取。

5

四电磁源和四电磁场

在另一个惯性参考系中形式不变：$\Box' G' = \mu_0 J'$

可得$\mu_0 J' = \mu_0 M^\dagger J M = M^\dagger(\Box G)M = M^\dagger \Box M \tilde{M} G M$

所以得到四电磁场的洛伦兹变换为$G' = \tilde{M} G M$

由四电磁的源和场的洛伦兹变换的特性应该有

$$\begin{cases} J = ic\left(\rho_e + \frac{i}{c\mu_0}\rho_m\right) + \vec{j}_e + \frac{i}{c\mu_0}\vec{j}_m \\ G = \mu_0 h - \frac{i}{c}e + \mu_0\vec{H} - \frac{i}{c}\vec{E} \end{cases}$$

其中，ρ_e和ρ_m分别是电荷和磁荷密度，$\vec{j}_e$和$\vec{j}_m$分别是电流和磁流密度，$\vec{H}$和$\vec{E}$分别是磁场和电场强度，e和h分别是四电磁场标部中的虚部和实部（待定）。

6

四电磁源和四电磁场

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}-\mu_0\dfrac{\partial h}{\partial t}=\dfrac{\rho_e}{\varepsilon_0} \\ \nabla\cdot\vec{H}+\varepsilon_0\dfrac{\partial e}{\partial t}=\dfrac{\rho_m}{\mu_0} \\ \nabla\times\vec{E}+\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\nabla e=-\vec{j}_m \\ \nabla\times\vec{H}-\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\nabla h=\vec{j}_e \end{cases}$$

，其中常数$\varepsilon_0=\frac{1}{c^2\mu_c}$

7

由电磁场方程得出的结论

将式$\square G=\mu_0 J$展开得到的分量方程组与麦克斯韦方程组对照，可以得到以下结论：

（1）四电磁场 G 的四梯度和四电磁源 J 的比例常数$\mu_0=4\pi\times10^{-7}N/A^2$，它就是真空中的磁导率，而$\varepsilon_0=\frac{1}{c^2\mu_0}$就是真空的介电常数，c 是时空当量，为真空中的光速。

（2）四电磁场 G 标部中的 e 和 h 满足$\begin{cases}\frac{\partial e}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial t}=0\\ \nabla e=\nabla h=0\end{cases}$,即 e 和 h 是与时空位置无关的常数。

（3）电荷和磁荷是守恒的$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{j}_e+\frac{\partial\rho_e}{\partial t}=0\\ \nabla\cdot\vec{j}_m+\frac{\partial\rho_m}{\partial t}=0\end{cases}$

8

应用——磁单极子的不存在性

在公式 $\square G=\mu_0 J$ 中引入电磁势 $G=\square^* A$

得到： $\square\square A=-\mu_0 J$ ，将其作宇称变换,分别为：

$$-\nabla\cdot E(-r,t)-\mu_0\,\partial h/\partial t=\rho_e(-r,t)/\epsilon_0$$
$$-\nabla\cdot H(-r,t)-\mu_0\,\partial e/\partial t=\rho_m(-r,t)/\mu_0$$
$$-\nabla\times E(-r,t)+\mu_0\,\partial H(-r,t)/\partial t-\nabla e=-j_m(-r,t)$$
$$-\nabla\times H(-r,t)+\epsilon_0\,\partial E(-r,t)/\partial t-\nabla h=-j_e(-r,t)$$

$$f(-r,t)=\rho_e(-r,t)E(-r,t)+\rho_m(-r,t)H(-r,t)+\mu_0 j_e(-r,t)\times H(-r,t)-\epsilon_0 j_m(-r,t)\times E(-r,t)$$

在空间是对称的情况下，即：

$$\rho_e(-r,t)=\rho_e(r,t)$$
$$j_e(-r,t)=-j_e(r,t)$$
$$\rho_m(-r,t)=\rho_m(r,t)$$
$$j_m(-r,t)=-j_m(r,t)$$

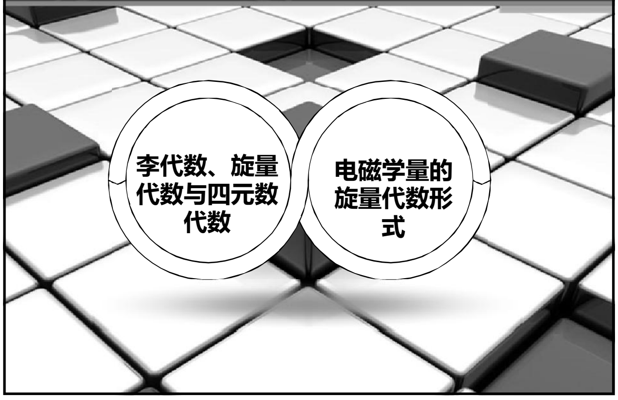
又由电磁规律的宇称变换不变性，各场量具有的宇称性质为：

$$E(-r,t)=-E(r,t)$$
$$H(-r,t)=H(r,t)$$
$$f(-r,t)=-f(-r,t)$$

如果磁单极子存在，即 ρ_m j_m 不恒为零，则电场 E，磁场 H，以及洛伦兹力密度 f 将不具有明确的宇称性质，电磁规律也不再具有宇称变换不变性。

9

李代数与旋量系理论的电磁学应用



旋量的定义

设直线的姿态向量为： $l=(l,m,n)^T$

直线 l 的方向可以有其姿态向量确定，但其位置不确定，即 l 为自由向量，如用位置向量 r 确定向量 l 的位置，则得到我们所需的线矢量。

响亮所在直线对原点 O 取矩可得线矢量的矢矩，记为 l_0，即：

$l_0=r\times l$

将其展开得到： $l_0=r\times l=pi+qj+rk$ ，其中向量 i,j,k 为沿 x,y,z 轴方向的单位向量。

$$L=\begin{pmatrix}l\\ l_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l\\ r\times l\end{pmatrix}=(l,m,n,p,q,r)^T$$

11

静力学、瞬时运动学与电磁学的对应

	几何意义	瞬时运动学	静力学	电磁学（以电场强度 E 为例）
主部	直线（姿态向量）	具有一定角速度的旋转轴线 $\omega=\omega s$	力作用线 $f=fs$	电磁学量的方向 $E=Es$
副部	关于原点的矢矩（直线的位置）	平移速度 $v=\omega s_0$	力矩 $m=fs_0$	电磁学量对原点取 $e_0=Es_0$ 矩
旋矩的影响				
非零旋矩	旋量式 $\begin{pmatrix}s\\ r\times s+hs\end{pmatrix}$	旋转+平移 $\omega\begin{pmatrix}s\\ r\times s+hs\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega s\\ \omega r\times s+v_s s\end{pmatrix}$	纯力+力偶 $f\begin{pmatrix}s\\ r\times s+hs\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}fs\\ fr\times s+cs\end{pmatrix}$	势场+涡旋场 $e\begin{pmatrix}s\\ r\times s+hs\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}es\\ er\times s+es\end{pmatrix}$
零旋矩	线矢量 $\begin{pmatrix}s\\ r\times s\end{pmatrix}$	纯旋转 $\omega\begin{pmatrix}s\\ r\times s\end{pmatrix}$	纯力 $f\begin{pmatrix}s\\ r\times s\end{pmatrix}$	纯涡旋场 $e\begin{pmatrix}s\\ r\times s\end{pmatrix}$
无穷大旋矩	偶量 $\begin{pmatrix}0\\ hs\end{pmatrix}$	纯平移 $\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ vs\end{pmatrix}$	纯力偶 $\begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ cs\end{pmatrix}$	纯势场 $\begin{pmatrix}0\\ e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ es\end{pmatrix}$

12

电磁学物理量以旋量形式表达的应用

13

参考文献

【1】四元数物理学 许方官著 北京大学出版社
【2】旋量代数与李群、李代数 戴建生著 高等教育出版社
【3】四元数分析与偏微分方程 杨丕文著 科学出版社

14

感谢观看

四电磁势

$$\begin{cases} \mu_0 h = -\nabla \cdot \vec{a}_e - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi_e}{\partial t} \\ \varepsilon_0 e = \nabla \cdot \vec{a}_m + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial t} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi_e - \dfrac{\partial \vec{a}_e}{\partial t} - \dfrac{1}{\varepsilon_0}\nabla\times\vec{a}_m \\ \vec{H} = -\nabla\varphi_m - \dfrac{\partial \vec{a}_m}{\partial t} + \dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{a}_e \end{cases}$$

16

四电磁场的二阶导数型波动方程

①用算子□作用在式$\square G = \mu_0 J$的两端，有□□G= $\|\square\| G = \mu_0 \square J$

展开右端，$\widetilde{\square} J = \left(-\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla\right)\left(ic\left(\rho_e + \frac{i}{c\mu_0}\rho_m\right) + \vec{j}_e + \frac{i}{c\mu_0}\vec{j}_m\right)$

$$= \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{i}{c\mu_0}\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j}_e + \frac{i}{c\mu_0}\nabla\cdot\vec{j}_m - \frac{i}{c}\frac{\partial \vec{j}_e}{\partial t}$$
$$+\varepsilon_0\frac{\partial \vec{j}_m}{\partial t} - ic\nabla\rho_e + \frac{1}{\mu_0}\nabla\rho_m - \nabla\times\vec{j}_e - \frac{i}{c\mu_0}\nabla\times\vec{j}_m$$

得到电磁场 G 应满足的二阶导数波动方程的分量形式：

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{bmatrix} e \\ h \\ \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla\cdot\vec{j}_m - \dfrac{\partial \rho_m}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{j}_e + \dfrac{\partial \rho_e}{\partial t} \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho_e + \mu_0\dfrac{\partial \vec{j}_e}{\partial t} + \nabla\times\vec{j}_m \\ \dfrac{1}{\mu_0}\nabla\rho_m + \varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{j}_m}{\partial t} - \nabla\times\vec{j}_e \end{bmatrix}$$

17

四电磁势的二阶导数型波动方程

②用算子−□作用在式 G=$\square^* A$的两端，有−□G=−$\square\square^* A = \|\square\| A$

再由式$\square G = \mu_0 J$得到电磁势应满足的二阶导数型波动方程：$\|\square\| A = -\mu_0 J$

其分量方程是$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{bmatrix} \varphi_e \\ \vec{a}_e \\ \varphi_m \\ \vec{a}_m \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \\ \mu_0\vec{j}_e \\ \frac{\rho_m}{\mu_0} \\ \varepsilon_0\vec{j}_m \end{bmatrix}$

18

能量、能流密度；动量、动量流密度

四能流密度S：

$$
\begin{aligned}
S &= i_c / 2\mu_0 G^\dagger G \\
&= i_c / 2\mu_0 (\mu_0 h + i/ce - \mu_0 H - i/cE)(\mu_0 h - i/ce + \mu_0 H - i/cE) \\
&= i_c / 2 \left(\mu_0 h^2 + \epsilon_0 e^2 + \mu_0 H^2 + \epsilon_0 E^2\right) + hE - eH + E \times H \\
&= i_c (u_0 + u) + S_0 + S
\end{aligned}
$$

四动量流密度 ψ_n

$$
\begin{aligned}
\psi_n &= 1/2\mu_0 [\![(\mu_0 h + i/ce) - (\mu_0 H + i/cE)]\!] \\
&\cdot [\![-(\mu_0 H - i/cE) \cdot n + (\mu_0 h - i/ce) n + n \times (\mu_0 H - i/cE)]\!] \\
&= i/c (hE - eH - E \times H) \cdot n + 1/2 \left(\mu_0 h^2 + \epsilon_0 e^2 - \mu_0 H^2 - \epsilon_0 E^2\right) n - \\
&(\epsilon_0 eE + \mu_0 hH) \times n + \epsilon_0 (E \cdot n) E + \mu_0 (H \cdot n) H \\
&= ic\psi_0 \cdot n + \psi_{n0} - ic\psi \cdot n - \psi_n
\end{aligned}
$$

19