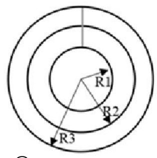
金属球壳上的小孔

----电磁学小论文
顾新雨
(PB14206025)

背景

求如图一所示金属球壳组成的电容器的电容(球壳一与球壳三由导线连通，球壳二上有一个小洞使导线穿过）

解：设球壳二带电量为Q，设球壳一的外表面与球壳三的内表面带电量分别为-q1,-q2



1. 对该问题我们的解法如下：

q1+q2=Q ①

U12=U32 ② （I）

U12 =q1(1/R1-1/R2)/4πε0 ③

U32=q2(1/R2-1/R3)/4πε0 ④

背景

$$q1=Q\Big/\left[1+\frac{R2-R1}{R3-R2}*\frac{R3}{R1}\right]$$

$$q2=Q\Big/\left[1+\frac{R3-R2}{R2-R1}*\frac{R1}{R3}\right]$$

$$U12=1/4\pi\varepsilon_0\cdot Q\left(\frac{1}{R2}-\frac{1}{R3}\right)\Big/\left[1+\frac{R3-R2}{R2-R1}*\frac{R1}{R3}\right]$$

C=Q/U12

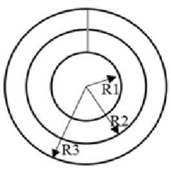
疑问：

1.我们忽略小孔的做法是否合理？

2.先让球壳二带上正电,连体球壳感应出负电最后达到静电平衡的过程是怎样的？

理想情况：

静电平衡的过程？
球壳二带上正电**Q** ⇨ 球壳三内表面感应**-Q**（外表面不妨接地）⇨ 球壳三内表面上的电子在电场的作用下沿着导线移向球壳一 ⇨ 球壳一外表面上积累负电荷，阻止电子的继续移动 ⇨ 电子移动到球壳一时的速度为零 ⇨ 内外球壳等势 ⇨ 静电平衡



电场力是否能对在四维空间导线上运动的电子做功？

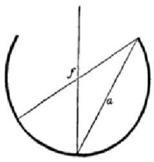
实际情况：

球壳必须有孔，没有一维对称性，高斯定理形式不简洁，方程组（I）中③，④也不成立。

我们可以先看一种简单的情况：

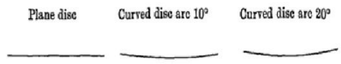
孤立带孔金属球壳上的电荷分布

f：球壳直径
a：球壳最低点到边缘点的直线距离
r：球壳上任一点到最低点的距离
V：导体球壳所在处的电势
导体球壳上距最低点为r处的内外表面的电荷密度如下：
（ρ_i内表面，ρ_0外表面）



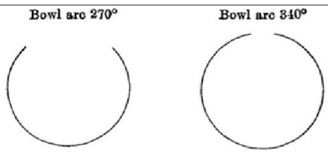
$$\rho_i = \frac{V}{2\pi^2 f}\left\{\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}}\right\} \qquad \text{（II）}$$
$$\rho_0 = \rho_i + \frac{V}{2\pi f}.$$

以下几种情况相对的内外表面电荷密度：平面圆盘，横截面圆心角为**10**°的弯曲圆盘，横截面圆心角为**20**°的弯曲圆盘



ρ_i	ρ_0	Mean	ρ_i	ρ_0	Mean	ρ_i	ρ_0	Mean
1·00	1·00	1·0000	·91	1·06	1·0000	·86	1·14	1·0000
1·01	1·01	1·0142	·95	1·08	1·0141	·88	1·15	1·0010
1·06	1·06	1·0607	·99	1·13	1·0605	·92	1·20	1·0369
1·15	1·15	1·1547	1·09	1·22	1·1542	1·02	1·29	1·1106
1·34	1·34	1·3416	1·27	1·41	1·3407	1·29	1·56	1·2606
1·81	1·81	1·8091	1·74	1·88	1·8071	1·67	1·94	1·6474

横截面圆心角为**270**°的部分球壳，横截面圆心角为**340**°的部分球壳



对于一个有孔的球壳来说，当孔的半径越来越小时，电荷趋于分布在外表面，而内表面的电荷密度趋于零，这与我们所知道的当球壳完整，内表面不带电的情况保持了一致

假如

假如可以将（**II**）推广到适用于非孤立导体的情况，即得出非孤立情况下内外表面电荷密度与金属球壳电势间的函数关系，理论上我们可以精确求解这个问题：

球壳二的电荷面密度（**V**为未知量）> 计算出球壳三与球壳一上感应的电荷 表示出球壳二的电势**V** 得到一个关于球壳二电势**V**的方程，解出**V** 代回电荷密度表达式得出电荷的分布情况

但是，这个过程实现起来显然会很困难！

假如

为了简化计算，我们可以仅评估一下我们的近似处理方程（**I**）的拟合程度:

即将方程组（**I**）近似计算出的电势U_{12}代入（**II**）的非孤立情况下的推广方程中，计算出球壳二的电荷密度ρ_i、ρ_0，再利用积分计算出球壳内外表面的电荷量q_1’、q_2’，与q_1、q_2进行比较得出拟合程度，看一下近似方程（**I**）能否自洽。

为什么前两张标题是假如

因为目前我水平有限，并不能将方程组（**II**）推广到适用于非孤立导体的情况

由于这个“假如”的限制，前面所提出的问题并没有得到解决，如果有大神对该问题感兴趣或有新的想法，欢迎讨论及批评指正！

参考文献及致谢

致谢：

感谢周海洋老师的指导与帮助，感谢王易佳同学及中航大的王炳辉同学在资料查找方面提供的帮助，感谢谢盛刚老师在多变量微积分课堂上给我的启发！

参考文献：

1.胡友秋，程福臻，叶邦角等.电磁学与电动力学（上）第二版

2.J.H.Jeans. The Mathematical Theory of Electrcity and sdffMagnetism.5ed. pp250-251

谢谢！