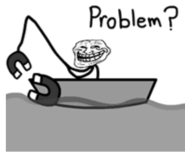
抗磁性磁悬浮

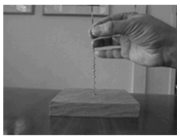
PB15000242 马林昊

磁悬浮简介

我们知道物体在磁场中会受到引力或者斥力，比如铁磁性物质（铁、钴、镍等）会受到磁铁吸引；磁铁的同性磁极相互排斥，异性磁极相互吸引，这都是大家熟悉的现象。磁悬浮就是利用这种作用力使物体在重力场中悬浮。



实际上磁悬浮技术在生活中早有应用：



然而这些都不符合我对“纯粹的磁悬浮”的追求，我希望找到一种稳定的磁悬浮，既可以持续地保持磁悬浮状态，又没有外界的能量和物质输入，同时只受重力场和磁场作用，而没有其他的外界约束。

Earnshaw 定理

实验证明，仅靠磁铁异性磁极相互排斥是不可能实现磁悬浮的。Earnshaw在1842年证明了这个结果。

考虑无自由电流而有静磁场分布的空间，这时候磁场强度矢量$\boldsymbol{H}$是无旋的，可以引入磁标势ϕ，满足

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\phi$$

假设空间里没有磁荷，则$\boldsymbol{H}$的散度为零，代入得

$$\nabla^2\phi = \Delta\phi = 0$$

即

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

然而要使一个磁铁（恒定的磁矩）在静磁场中稳定平衡，则必须存在势阱，即存在一点，满足

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} > 0$$

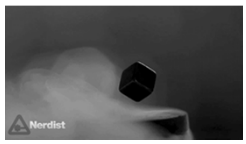
这和前面的结果矛盾！这就证明了Earnshaw定理，即仅在静磁场中磁铁不能处于稳定平衡，印证了我们刚才的实验结果。

于是磁悬浮就不可能的了吗？

不，还有希望……

Earnshaw定理有几个足够大的漏洞，使得磁悬浮实际上仍然是可以实现的。

比如，Earnshaw定理仅指出磁铁在磁场中的稳定磁悬浮是不可能的，而除了铁磁质之外，顺磁质和抗磁质也会受到磁场作用。



考虑静磁场中的磁介质，假设物体的体积为V，磁化率为χ，则由定义知磁导率为$\mu=\mu_0(1+\chi)$，其中μ_0为真空磁导率，设物体尺度很小，所在处磁场视为匀强磁场，磁感应强度大小为B，设M为磁化强度。则磁场强度H满足:

$$H=\frac{B}{\mu}=\frac{B}{\mu_0}-M$$

即

$$M=B\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)=\frac{B}{\mu_0}\left(1-\frac{1}{1+\chi}\right)$$

近似得

$$M=\frac{\chi B}{\mu_0}$$

物体的磁矩m为

$$m=\frac{\chi V B}{\mu_0}$$

物体因为磁化具有的能量可由做功计算，设磁场从0增加到B，则因为磁化所做的元功$\mathrm{d}W=-\mathrm{d}m\cdot B$，积分得

$$U=-\frac{\chi B^2 V}{2\mu_0}$$

重力场中，物体的势能实际为

$$U=-\frac{\chi B^2 V}{2\mu_0}+mgz$$

平衡状态下，势能梯度为0，即

$$\frac{\chi V}{2\mu_0}\nabla B^2=mg\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}$$

即

$$B\nabla B=\frac{\mu_0 g\rho}{\chi}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}$$

这就是物体平衡的条件；

同时还要求物体稳定平衡，于是，至少要有一点

$$\Delta U>0$$

即

$$-\frac{\chi V}{2\mu_0}\nabla^2 B^2>0$$

展开得

$$\begin{aligned}\nabla^2 B^2&=\nabla^2\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)\\&=2\nabla\cdot\left(B_x\nabla B_x+B_y\nabla B_y+B_z\nabla B_z\right)\\&=2\Big(|\nabla B_x|^2+\left|\nabla B_y\right|^2+|\nabla B_z|^2\\&\quad\boxed{+B_x\nabla^2 B_x+B_y\nabla^2 B_y+B_z\nabla^2 B_z\Big)}\ \text{=0 !}\end{aligned}$$

即

$$\nabla^2 B^2=2\left(|\nabla B_x|^2+\left|\nabla B_y\right|^2+|\nabla B_z|^2\right)>0$$

这两个式子汇总一下

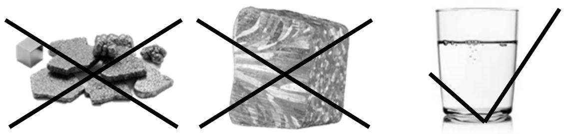
$$-\frac{\chi V}{2\mu_0}\nabla^2 B^2>0$$

$$\nabla^2 B^2>0$$

要稳定平衡，必须有

$$\chi<0$$

所以，在静磁场中有可能保持稳定磁悬浮的只有抗磁质！



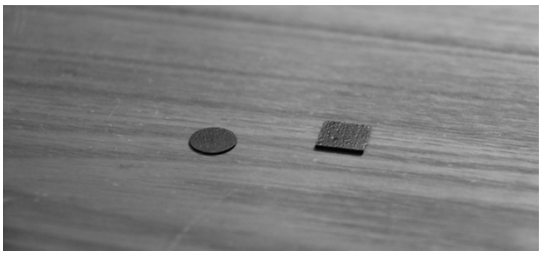
理论分析完毕后，进入实验环节，注意到平衡时有

$$B\nabla B=\frac{\mu_0 g\rho}{\chi}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}$$

所以要采用密度与磁化率比值的绝对值尽可能小的物质来进行实验

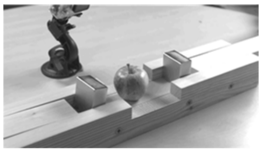
材料	$\rho(\times 10^3\mathrm{kg\cdot m^{-3}})$	$-\chi(\times 10^{-6})$	$\eta(\times 10^9)$
水	1.00	8.8	0.1136
金	19.32	34	0.5682
石墨	2.03	160	0.0127
铋	9.78	170	0.0575
热解石墨	2.20	450	0.0049

所以采用热解石墨作为抗磁性材料，热解石墨是烃类物质高温下直接分解结晶而成的石墨，纯度非常高，制造非常困难，所以我买了两片热解石墨。



永磁体自然希望磁性越强越好，市售的永磁体磁性最强的是钕铁硼磁体，然而没有任何卖家会提供与磁体有关的参数，根据概率论知识，我用各种方法弄到了大量的永磁体，希望至少可以有一块能帮助完成实验。

警告：钕铁硼磁体磁性极强！操作时一定要注意安全！



首先采用磁性最强的超大块磁铁来进行实验，然而结果让人非常失望，根本没有任何磁悬浮的效果；

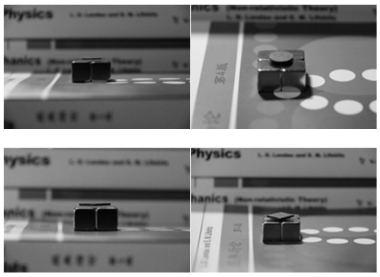
2013年王起同学的一篇关于磁悬浮的小论文里也是同样的结果；

猜测：这是由于大磁铁表面磁感应强度大小的梯度太小导致的，所以应该采用小一点的磁铁；

再经历了多次尝试以后，终于取得了成功！

对于圆片形的热解石墨也有一样的结果，而且两片石墨悬浮的高度几乎相同，尽管方形石墨质量要比圆片形石墨大很多，这揭示了一个有趣的事实：悬浮高度和质量无关；实际上我们早就应该在前面发现这一点：

$$B\nabla B = \frac{\mu_0 g\rho}{\chi}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z}$$



前面指出，$\Delta U > 0$仅仅是稳定磁悬浮实现的必要条件而不是充分条件，下面来探索一下实现稳定的抗磁性磁悬浮的充分条件是什么；

为了计算方便，考虑一种较为简单的情形：设永磁体表面附近的磁场关于z轴是对称的。由于考察区域内的静磁场是无旋的，故引入“磁势”φ，使得

$$B = \nabla\varphi$$

方便起见，记

$$\varphi_n(z) \equiv \frac{\partial^n}{\partial z^n}\varphi(0,0,z)$$

由于B是无散的，故φ满足拉普拉斯方程，有

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

故在z轴上

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}\varphi_2(z)$$

把φ在z轴附近泰勒展开

$$\varphi(x,y,z) = \varphi_0(z) + \frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + \cdots$$

$$= \varphi_0(z) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\varphi_2(z) + \cdots$$

这样就得到

$$B_z = \varphi_1(z) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\varphi_3(z) + \cdots$$

$$B_x = -\frac{1}{2}x\varphi_2(z) + \cdots$$

$$B_y = -\frac{1}{2}y\varphi_2(z) + \cdots$$

根据

$$-\frac{\chi V}{2\mu_0}\nabla^2 B^2 > 0$$

要稳定平衡，必须有

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial x^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial y^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2} > 0$$

计算得

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

$$= \varphi_1^2 + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)(\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_3) + \cdots$$

代入前面三个偏导数关系，并略去高阶小量，有

$$\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_3 > 0$$

$$\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_3 > 0$$

由于

$$\varphi_1 = B_z$$

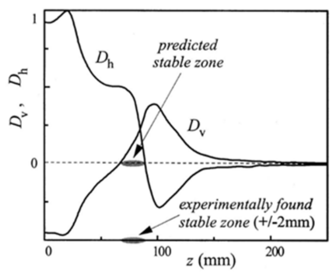
$$\varphi_2 = \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\mu_0 g\rho}{\chi B_0}$$

最后得到

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\mu_0 g\rho}{\chi B_0}\right)^2 - 2B_z\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} > 0 \\ \left(\dfrac{\mu_0 g\rho}{\chi B_0}\right)^2 + B_z\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} > 0 \end{cases}$$

这就是抗磁性磁悬浮的充分条件！

根据其他人的研究结果，这个计算和实验符合得相当好：



参考文献

[1] M. D. Simon, L. O. Heflinger, and A. K. Geim, ‘Diamagnetically stabilized magnet levitation, ’American Journal of Physics **69**, 702 (2001);http://dx.doi.org/10.1119/1.1375157.

[2] S. Earnshaw, ‘ On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether, ’ Trans. Cambridge Philos. Soc. **7**, 97–112 (1842).

[3]梁昆淼,力学(第四版)下册·理论力学.北京:高等教育出版社(2009).

[4] M. V. Berry and A. K. Geim, ‘Of flying frogs and levitrons , ’ Eur. J. Phys. **18**, 307(1997).

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Pyrolytic_carbon.

[6] M. D. Simon and A. K. Geim, ‘Diamagnetic levitation: flying frogs and floating magnets, ’ J. Appl. Phys. **87**, 6200–6204 (2000).

[7]王起, “磁悬浮实验及其发展前景,”2013.

感谢许铁臣同学，姚云燕同学所提供的帮助！

Thank U!