电磁混沌摆的数值模拟

胡志浩 PB15000189
指导老师 秦敢

目

- 引言

- 模型建立

- 运动方程

- 代码与几个特定初值的运行结果

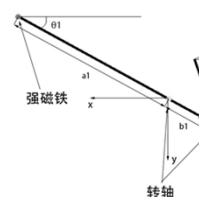- 存在的不足与改进点

引

- 电磁混沌摆是一个双杆结构，在有电池供电的情况下，底座的

  上磁铁之间相互作用，可以使摆杆产生

  无规律的运动。

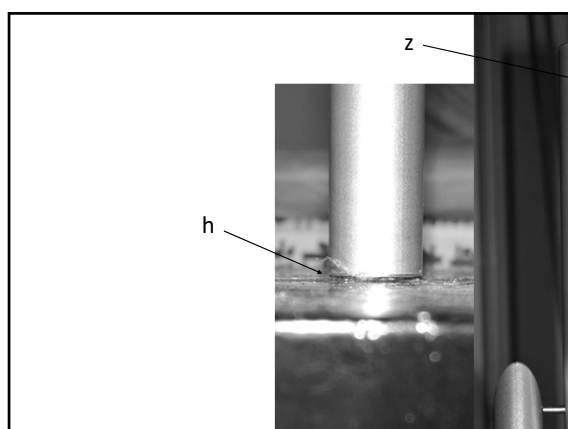- 本文希望通过使用Mathematica的

- 数值模拟来研究电磁混沌摆的运动，

- 尽量真实地还原不同初始条件下混沌摆的运动。

模

- 定义主杆、副杆；

- 摆杆上磁铁的分布；

- 坐标轴的建立；

- 广义坐标的选取；

- 一些常数：

  a_1 ， b_1 ， a_2 ， b_2 ，主杆长端最低点与底座电磁铁的距

  杆距离z，以及后面使用磁荷法模型计算磁铁之间相互作用

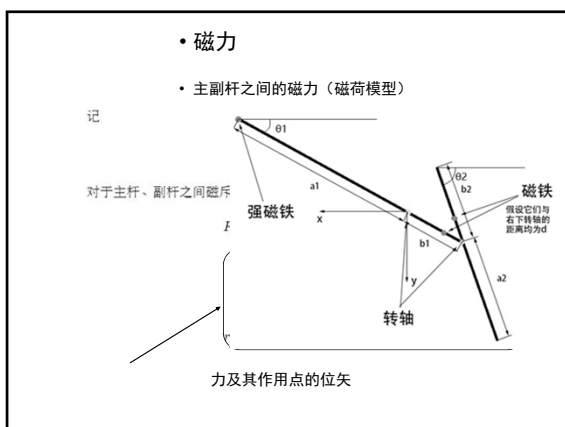 用到的值（将在后面的代码中给出）。

运

- 拉格朗日方程

  拉格朗日方程可以用来建立不含约束力的的动力

  其形式如下： $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \dfrac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a$

  其中T是系统动能， q_a 为 广义坐标 Q_a 为广义力；

  广义力的形式为： $Q_a = \sum_i F_i \cdot \dfrac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_a}$

磁力

主副杆之间的磁力（磁荷模型）

记

对于主杆、副杆之间磁斥

力及其作用点的位矢

磁力

主杆与底座电磁铁的作用力

$$\vec{B}(t) = k_2 \frac{(h + a_1 - y)\vec{e_y} - x\vec{e_x}}{(x^2 + (a_1 + h - y)^2)^{\frac{3}{2}}} \sin \frac{t}{2}$$

受力为：

$$\vec{F_B} = m$$

力的作用点：

$$\vec{r_B} = a_1 \cos \theta_1 \vec{e_x}$$

因为底座的电磁铁产生的磁场强度是不断变化的，为

取磁荷法模型中的磁荷 $q = q_0 sin \frac{t}{2}$ ；这里 k_2 是一个与 q_0 正

数，注意到受力表达式中，$\vec{F_B}$ 与 m、$\vec{B}(t)$ 相关，取 k_2=1，

的大小来使结果合理。

解

因为摆所用磁铁的大小和强度均无法较精确测得，所以

均取值为1，通过调整其他数值的大小来使模拟获得一

结果。

重力

重力及其广义力

$$\vec{F_1} \cdot \frac{\partial \vec{r_1}}{\partial \theta_1} = -\rho \frac{a_1 - b_1}{2}(a_1 + b_1)g \cos \theta_1$$

$$\vec{F_2} \cdot \frac{\partial \vec{r_2}}{\partial \theta_1} = b_1(a_2 + b_2)g \cos \theta_1$$

$$\vec{F_1} \cdot \frac{\partial \vec{r_1}}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\vec{F_2} \cdot \frac{\partial \vec{r_2}}{\partial \theta_2} = \rho \frac{a_2 - b_2}{2}(a_1 + b_1)g \cos \theta_2$$

动能

在本模型中，主副杆的动能 T_1、T_2 有如下表示：

$$T_1 = \frac{1}{2}\rho \int_0^{a_1+b_1} [(x - a_1)\dot{\theta_1}^2]^2 dx = \frac{1}{6}\rho(a_1^3 +$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\rho \int_0^{a_2+b_2} [b_1^2\dot{\theta_1}^2 + (x - b_2)^2\dot{\theta_2}^2 + 2b_1(x - b_2)\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}$$

$$= \frac{1}{6}\rho[3(a_2 + b_2)b_1^2\dot{\theta_1}^2 + (a_2^3 + b_2^3)\dot{\theta_1}^2 + 3(a_2^2 - b_2^2)b_1$$

故系统总动能可以写成：

$$T = \frac{1}{6}\rho\{3[(a_2 + b_2)b_1^2 + a_1^3 + b_1^3]\dot{\theta_1}^2 + (a_2^3 + b_2^3)\dot{\theta_2}^2 + 3(a_2^2 - b_2^2)\dot{\theta_1}^2\}$$

运动方程形式

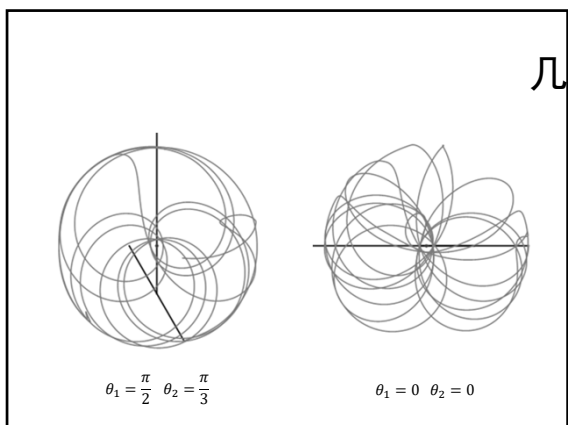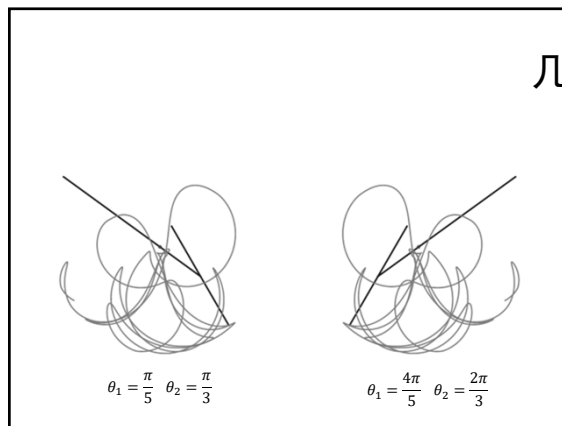$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta_1}} - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = -\rho \frac{a_1 - b_1}{2}(a_1 + b_1)g \cos \theta_1 + b_1(a_2 + b_2)g \cos \theta_1 + \vec{F_B} \cdot \frac{\partial \vec{r_B}}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta_2}} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = \rho \frac{a_2 - b_2}{2}(a_1 + b_1)g \cos \theta_2 + \vec{F_B} \cdot \frac{\partial \vec{r_B}}{\partial \theta_2} + \vec{F_{R1}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial}$$

Slide 1 (top-left):

```
                                                    Mathemat
• Clear["Global`*"]
• ρ=1;a1=0.201;b1=0.0845;a2=0.0975;b2=0.0955;g=9.795;R=0.01;
• h1=0.01;d=0.01;z=0.002;q=0.002;(*磁荷*)m=0.0001;              常数
• B[x_,y_]:= {x,y-a1-h1}/(x^2+(a1+h1-y)^2)^1.5;
• F[θ1_,θ2_]:= 2d Sin[(θ1-θ2)/2]q^2/(4(d Sin[(θ1-θ2)/2])^2+z^2)^1.5;
• KT= ρ((3(a2+b2)b1^2+a1^3+b1^3)(θ1'[t])^2+(a2^3+b2^3)(θ2'[t])^2+3(a2^2-b2^2)b1
  θ1'[t]θ2'[t]Cos[θ1[t]-θ2[t]])/6;
• func= {
  D[KT,θ1'[t],t]-D[KT,θ1] == -ρ (a1 + b1) g (a1 - b1) Cos[θ1[t]]/2 +ρ (a2 + b2) g (b1
  Cos[θ1[t]]) +(Cos[(θ1[t]+θ2[t]+Pi)/2]Sin[θ1[t]]+Sin[(θ1[t]+θ2[t]+Pi)/2]Cos[θ1[t]]) d
  F[θ1[t],θ2[t]]-a1 m B[a1 Cos[θ1[t]],-a1 Sin[θ1[t]]]Sin[t/2],
  D[KT,θ2'[t],t]-D[KT,θ2]== ρ (a2 + b2) (a2 - b2)g Cos[θ2[t]]/2 -(-
  Cos[(θ1[t]+θ2[t]+Pi)/2]Sin[θ2[t]]+Sin[(θ1[t]+θ2[t]+Pi)/2]Cos[θ2[t]]) d F[θ1[t],θ2[t]]
  };
• ini= {θ1[0]==0,θ2[0]==0,θ1'[0]==0,θ2'[0]==0};                  初始值
• sol= First@NDSolve[{func,ini},{θ1,θ2},{t,0,60}];
• point11[t_]:= Evaluate[{-a1 Cos[θ1[t]],a1 Sin[θ1[t]]}/.sol]
• point12[t_]:= Evaluate[{b1 Cos[θ1[t]],-b1 Sin[θ1[t]]}/.sol]
• point21[t_]:= Evaluate[{b1 Cos[θ1[t]]-a2 Cos[θ2[t]],-b1 Sin[θ1[t]]+a2 Sin[θ2[t]]}/.sol]
• point22[t_]:= Evaluate[{b1 Cos[θ1[t]]+b2 Cos[θ2[t]],-b1 Sin[θ1[t]]-b2 Sin[θ2[t]]}/.sol]
• data=
  Table[Graphics[{Blue,Thick,Line[{{point11[t],point12[t]},{point21[t],point22[t]}}]},Plot
  Range->{{-0.2,0.2},{-0.2,0.2}},ImageSize->300,Epilog-
  >{PointSize[Medium],Red,Point[{0,0}]}],{t,0,60,0.05}];
• Animate[data[[i]],{i,1,Length[data],1},AnimationRate->20]
```
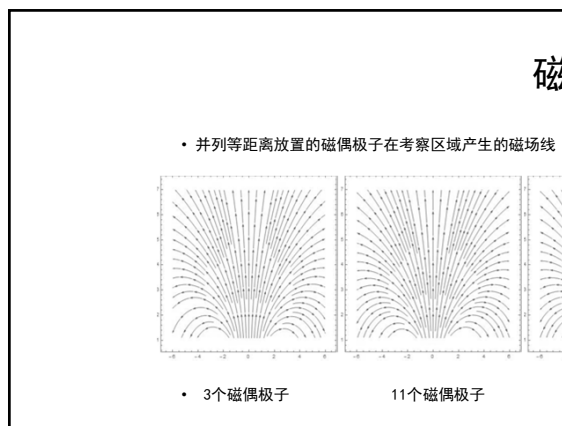
Slide 2 (top-right):

几

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{5}$ $\theta_2 = \dfrac{\pi}{3}$ $\theta_1 = \dfrac{4\pi}{5}$ $\theta_2 = \dfrac{2\pi}{3}$

Slide 3 (middle-left):

几

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ $\theta_2 = \dfrac{\pi}{3}$ $\theta_1 = 0$ $\theta_2 = 0$

Slide 4 (middle-right):

不

• 1、实际底部电磁铁有微电脑控制，不会使摆产生很突
  化改变，而本文采用的正弦变化近似与其有一定的区别

• 2、简单采用单个磁荷的模型研究底座电磁铁对主杆上
  用比较粗糙；

• 3、数据的调整有一定主观成分，而实际值难以精确测

Slide 5 (bottom-left):

改

• 磁偶极子

•   采用磁偶极子来代替之前的磁单极子，可以更好地
  生的磁效果，进一步地，采用等距排列的多个磁偶极子
  模拟环形电流产生的磁效果。

Figure 7: 单个磁荷（左）与电流环（右）在区域中磁场线的区

Slide 6 (bottom-right):

磁

• 并列等距放置的磁偶极子在考察区域产生的磁场线

• 3个磁偶极子   11个磁偶极子   1

- **致谢**
- 能够完成论文，多亏老师、同学和永动科技工作人员的帮助，在此一一致谢。
- 感谢秦敢老师提供的研究思路；
- 感谢范怡淳学长给我讲解了拉格朗日方程的相关知识；
- 感谢吕靖浩同学帮忙指出了之前计算中出现的错误；
- 感谢永动科技工作人员向我讲解了混沌摆的详细构造与结构特点。