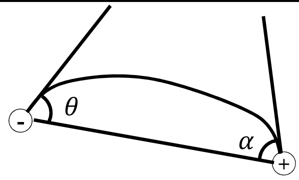
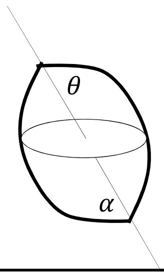
任意点电荷分布的
电场线理论求法和应用

从一道习题开始



现有一对电荷量为 q_1， q_2 的点电荷系统
若一根电场线发出时与q_1轴线的夹角为θ
考虑它和q_2轴线的夹角.

运用Gauss定理



作一个橄榄形的Gauss面，
立体角的平面角为θ，
则立体角为$2\pi(1-\cos\frac{\theta}{2})$. 得到

$$\frac{\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{2}}{q_1}=\frac{\frac{1-\cos\frac{\beta}{2}}{2}}{q_2}$$

运用Gauss定理

从而

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$$

数学运算导出结果

场是*Nabla*算子作用于势的结果

我们希望寻找一条下降的最快的曲线：

定义**势的梯度曲线**，它以参数的方式被定义如下：

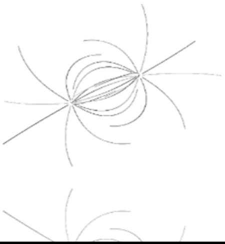
数学运算导出结果

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial y}$$

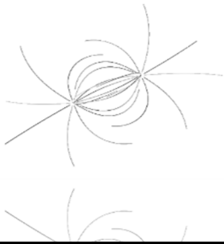
$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial z}$$

数学运算导出结果



$$q_1 \frac{(x+a)}{\sqrt[2]{(x+a)^2+y^2+z^2}} + q_2 \frac{(x-a)}{\sqrt[2]{(x-a)^2+y^2+z^2}} = constant$$

数学运算导出结果



现在设想C是已知的，记作C. 设

$$\varphi = q_1 \frac{(x+a)}{\sqrt[2]{(x+a)^2+y^2+z^2}} + q_2 \frac{(x-a)}{\sqrt[2]{(x-a)^2+y^2+z^2}} + c,$$

如果把考察范围限定在xoy平面上，则

$$\varphi = q_1 \frac{(x+a)}{\sqrt[2]{(x+a)^2+y^2}} + q_2 \frac{(x-a)}{\sqrt[2]{(x-a)^2+y^2}} + c.$$

运用隐函数定理

我们有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} =$$

$$-\frac{q_1\left(-\frac{(x+a)^2}{r_1^3}+\frac{1}{r_1}\right)+q_2(-\frac{(x-a)^2}{r_2^3}+\frac{1}{r_2})}{-y(\frac{q_1(x+a)}{r_1^3}+\frac{q_2(x-a)}{r_2^3})}$$

从而 $\lim\limits_{x\to -a}\frac{dy}{dx} = -\frac{q_1\left(-\frac{(x+a)^2}{r_1^3}+\frac{1}{r_1}\right)}{-y\left(\frac{q_1(x+a)}{r_1^3}-\frac{q_2}{4a^2}\right)} =$

$$-\frac{q_1\left(-(x+a)^2+r_1^2\right)}{-y\left(q_1(x+a)-\frac{q_2}{4a^2}r_1^3\right)} = \frac{q_1(y)}{\left(q_1(x+a)-\frac{q_2}{4a^2}r_1^3\right)}$$

$$= (constant - q_2)\frac{y}{\sqrt[2]{(x+a)^2+y^2+z^2}}$$

数学运算导出结果

现在有 $(x+a) = (\frac{q_2(C-1)}{q_1})r_1$，取极限, 这时显然有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+a}$$

将上式代入，立即有

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{(\frac{q_2(C-1)}{q_1})^2} - 1}$$

不妨更进一步

上述讨论对三个乃至n个电荷系统也是成立的, 但是传统的Gauss定理就遇到了问题. 作为一个例子，我们来计算4个电荷系统的情况.

$$q_1 \frac{(x+a)}{\sqrt[2]{(x+a)^2+y^2+z^2}}+q_2 \frac{(x-a)}{\sqrt[2]{(x-a)^2+y^2+z^2}}$$

$$+q_3 \frac{(x+a)}{\sqrt[2]{(x+a)^2+(y-p)^2+z^2}}+q_4 \frac{x-a}{\sqrt[2]{(x-a)^2+(y-p)^2+z^2}}=c$$

不妨更进一步

正方形顶点分布的电荷系统的电场线

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(x-x_i)}{r_i^3}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{r_i^2}}}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(y-y_i)}{r_i^3}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{r_i^2}}}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(z-z_i)}{r_i^3}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{r_i^2}}}$$

Wolframalpha Mathmatica

复杂不对称	数值近似解	
简单高度对称		精确解析解

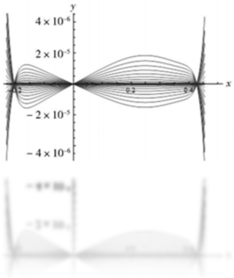
$$\frac{dx}{dt}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(x-x_i)}{r_i^3}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{r_i^2}}}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(y-y_i)}{r_i^3}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{r_i^2}}}$$

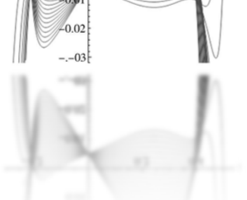
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(z-z_i)}{r_i^3}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{r_i^2}}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \cos\theta_i = constant$$

$$\sum_{i=1}^{3} q_i \cos\theta_i = constant$$



$$\sum_{i=1}^{3} q_i \cos\theta_i = constant$$



$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial z}$$

恰当的在平时的学习中引入比较先进的数学工具，能有效地简化运算和讨论，所得结果还具有普适性和简洁性.

参考文献与致谢

Thanks for your
Listening
and consideration.

[1] 刘耀康. 准确绘制在直线上的电荷系的电场线[J]. 高师理科学刊, 2008, 28(5):63-66.
[2] 叶邦角. 电磁学 [M]. 中国科技大学出版社, 2008.
[3] 舒幼生. 物理学难题集萃[M]. 高等教育出版社, 1999.
[4] 常庚哲. 数学分析教程[M]. 中国科学技术大学出版社, 2012.
[5] 梁灿彬 秦光戎 梁竹建. 电磁学(第2版)[M]. 高等教育出版社, 2006
[6] 邓卫娟. 两种绘制一维点电荷系电场线方法的比较[J]. 河池学院学报, 2011, 31(2):29-31.
[7] 陈伟, 易志俊, 丁益民. 利用Matlab模拟点电荷系的电场线和等势面[J]. 大学物理实验, 2014, 27(3):94-96.