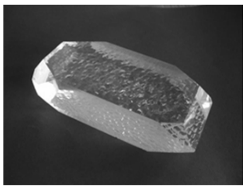
压电振子在谐振电路中的应用

---韩子戌pb15000163

压电效应简介

- 某些电解质在沿一定方向上受到外力的作用而变形时，其内部会产生极化现象，同时在它的两个相对表面上出现正负相反的电荷。当外力去掉后，它又会恢复到不带电的状态，这种现象称为正压电效应。当作用力的方向改变时，电荷的极性也随之改变。相反，当在电介质的极化方向上施加电场，这些电介质也会发生变形，电场去掉后，电介质的变形随之消失，这种现象称为逆压电效应

- 压电晶体



- 我们考虑压电体在绝热过程中的状态。常常取T，E作为独立的自变量（T为应力，E为电场强度），考虑系统的焓变，于是有

$$dH = -S_i\, dT_i - P_m\, dE_m$$

(S为应变，P为极化强度，在没有吸热的情况下，焓变为做功的负值)

对上述的应变和极化强度进行偏微分并用电位移矢量来代替极化强度

$$Si = \frac{(\partial S_i)}{(\partial T_j)} T_j + \frac{(\partial S_i)}{(\partial E_n)} E_n$$

$$D_m = \frac{(\partial D_m)}{(\partial T_i)} T_i + \frac{(\partial D_m)}{(\partial E_n)} E_n$$

其中我们将对应的偏微分设为常数当做物体本身的性质

$\frac{\partial S_i}{\partial T_j} = S^E{}_{ij}$ 是恒 电恒电场弹性柔顺 矩阵阵元

$\frac{\partial D_m}{\partial E_n} = \varepsilon^T{}_{mn}$ 是恒 应恒应力介电常数 元；

$\frac{\partial S_i}{\partial E_n} = d_{ni}$ 是压压电应变常数转置 阵元；

$\frac{\partial D_m}{\partial T_j} = d_{mj}$ 是压压电应变常数矩阵 ；

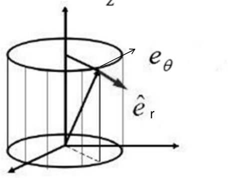
径向振动薄圆片振子

- 下面我们对于一种特殊类型的压电材料进行分析（例如钛酸钡，铌酸锂）

振动薄圆片模型

钛酸钡晶体

- 由于圆对称性压电常数 $d_{31}=d_{13}$ 和弹性柔顺常数 $S_{11}=S_{22}$的薄圆片压电晶体，且圆片很薄，为简便计算将采用柱坐标系来进行研究。我们可以近似认为上述圆片只有以下变量:沿切线方向的应力沿切线方向的应力 T_θ，沿径向方向上的应力 T_r，以及沿Z方向上的电位移矢量 D_Z 。



所以我们可以得到

$$S_r = S^E{}_{11}\,T_r + S^E{}_{12}\,T_\theta + d_{31}\,E_z$$

$$S_\theta = S^E{}_{12}\,T_r + S^E{}_{11}\,T_\theta + d_{31}\,E_z$$

$$D_z = d_{31}\,T_r + d_{31}\,T_\theta + \varepsilon^T{}_{33}\,E_z$$

通常在试验中，我们用杨氏模量Y，伯松比σ来代替弹性柔顺常数 $S^E{}_{11}\ S^E{}_{12}$ ，Y=1/ $S^E{}_{11}$ ，σ=-$S^E{}_{12}/S^E{}_{11}$带入上式，可得：

$$T_r = \frac{Y}{1-\sigma^2}(S_r+\sigma S_\theta) - \frac{d_{31}Y}{1-\sigma}E_z$$

$$T_\theta = \frac{Y}{1-\sigma^2}(S_\theta+\sigma S_r) - \frac{d_{31}Y}{1-\sigma}E_z$$

$$D_z = \frac{d_{31}Y}{1-\sigma}(S_\theta+S_r) - \frac{2d_{31}Y}{1-\sigma}E_z + \varepsilon^T{}_{33}E_z$$

- 上式为一个径向振动薄圆片振子的压电方程。其中应变 $S_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$是沿r方向的伸缩应变；$S_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial r}$ 。因为这是一个圆片，所以切向上是对称的所以 $\frac{\partial u_\theta}{\partial r}=0$ 即 $S_\theta = \frac{u_r}{r}$ 。

根据牛顿第二定律的微观形式:

$$\nabla \bullet T + F = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

不妨设 $u_r = A(r)\,e^{i\omega t}$带入上式，可得

$$\frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2} + \frac{\partial A(r)}{r\partial r} + \left(\frac{w^2}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right)A(r) = 0$$

其中 $\frac{Y}{\rho(1-\sigma^2)} = b^2$

- 我们设kr=R，则原式就可变成一阶的贝塞尔方程

$$\frac{\partial^2 A(R)}{\partial R^2} + \frac{\partial A(R)}{R\partial R} + \left(1-\frac{1}{R^2}\right)A(R) = 0$$

其解为 $u_r = CJ_1(Kr)e^{i\omega t}$

其中$J_1(Kr)$为贝塞尔级数

- 常数C由边界条件来确定。若边界是自由的，则可以得到：

$$C = \frac{d_{31}Y(1+\sigma)E_0}{KJ_0(Ka) - (1-\sigma)\frac{J_1(Ka)}{a}}$$

所以

$$u_r = CJ_1(Kr)e^{i\omega t} = \frac{d_{31}Y(1+\sigma)J_1(Kr)E_0e^{i\omega t}}{KJ_0(Ka)-(1-\sigma)(J_1(Ka))/a}$$

从而求得薄圆片的振动方程

三：薄圆片压电振子的振动的阻抗

- 下面我们对压电振子的阻抗进行计算。电压可以通过施加的电场来求出，而电流I则可以通过电位移矢量算出。薄圆片上具有的电荷量为

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^a D_z r dr d\theta$$

而其中电位移矢量 D_Z 为：

$$D_z = \frac{d_{31} Y}{1-\sigma}[CKJ_0(Kr)e^{i\omega t}] - \frac{2d_{31} Y}{1-\sigma} E_z + \varepsilon^T_{33} E_z$$

- 而电流I为：

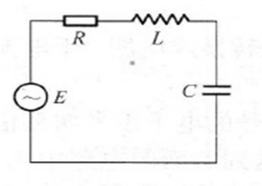
$$I = dQ/dt = i\omega e^{i\omega t}\{2\pi a \frac{d_{31} Y}{1-\sigma} C J_1(Ka) - \pi a^2 (\frac{2d_{31} Y}{1-\sigma} E_0 - \varepsilon^T_{33} E_0)\}$$

薄圆片上压电振子做径向双元振动的等效阻抗为：

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{i\omega[2\pi a \frac{d_{31} Y}{1-\sigma}\frac{C}{E_0} J_1(Ka) - \pi a^2(\frac{2d_{31} Y}{1-\sigma} - \varepsilon^T_{33})]}$$

- 可以看出上述阻抗只有虚数部分，可以等效为下述的电路图

而由于电阻只有虚数部分可知等效电路图中实电阻为0，所以当发生谐振时其阻抗为0



（a）谐振电路

- 当阻抗为0时，压电振子处于谐振状态

则：$(1-\sigma)[aKJ_0(Ka) - (1-\sigma)\ J_1(Ka)] = 0$

由于伯送比 $\sigma \le 0.5$，则仅当

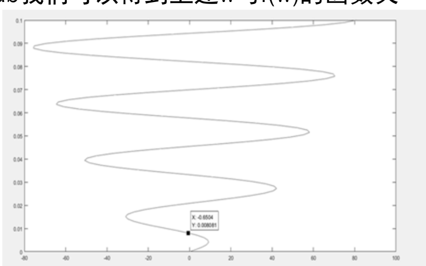
$$[aKJ_0(Ka) - (1-\sigma)\ J_1(Ka)] = 0$$

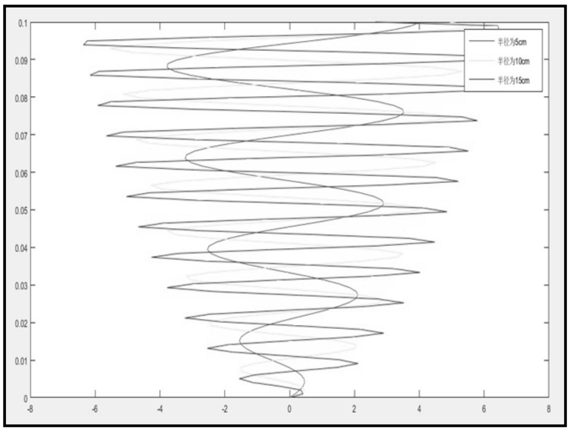
时原函数为0

设f（w）=$[aKJ_0(Ka) - (1-\sigma)\ J_1(Ka)]$

- 我们对于泊松比为0.3，杨氏模量为2×10^{11}pa

半径为0.5cm的材料。k=5157.3w。借用matlab我们可以得到上述w与f(w)的函数关系图





- 我们由此可以知道
- 1.不止一个频率会是薄片谐振，在一定范围内的频率均能使其谐振。
- 2.通过上图可以得到当半径越来越大时，两个谐振频率之间的间距会更小，导致施加频率的误差相对较小
- 所以在选择压电振子做谐振振子的时候要选择大小适当的振子作为谐振条件。