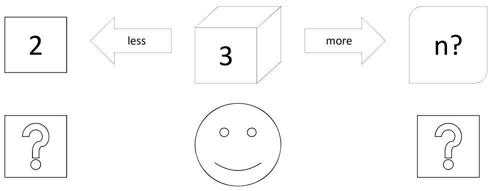
n维空间中静电学理论探讨

PB15020548 陈卓
2016/06/18

自己平时的猜想
漏洞很多

DIMENSION



2维

2

基本假设

牛二

力的量纲是
N，即$kg \cdot m \cdot s^{-2}$

牛三

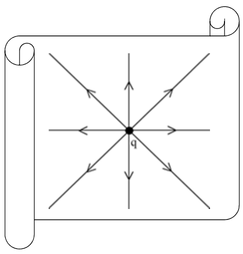
作用力和反作用力
等大反向

电荷守恒！

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$！

叠加原理！

$\boldsymbol{E} \propto q$！



电场强度正比于电场线密度

三维电场线密度为电场线条数除以通过这么多条电场线的球冠面面积

二维电场线密度为电场线条数除以通过这么多条电场线的弧长

电场线条数正比于圆心角

弧长正比于圆心角和距离

$E \propto \frac{1}{r}$！

$F \propto \frac{1}{r}$！

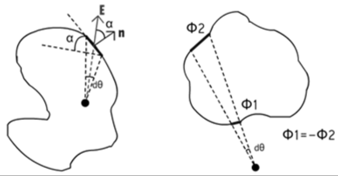
$F \propto q_0, F \propto q_1$　　$F \propto \frac{1}{r}$　　$F \propto \frac{q_0 q_1}{r}$

库仑定律

$$\boldsymbol{F_{10}} = \mathrm{k}\frac{q_1 q_0}{r_{10}^2}\boldsymbol{r}_{10} = -\boldsymbol{F_{01}}$$

黄色的字母表示矢量

高斯定理



$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dl = k\frac{q}{r}\cos\alpha\frac{rd\theta}{\cos\alpha} = kqd\theta$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dl = 2\pi kq$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dl = \oint_C \sum \boldsymbol{\Delta E}\cdot\boldsymbol{n}dl = \sum\oint_C \boldsymbol{\Delta E}\cdot\boldsymbol{n}dl = 2\pi k\sum\Delta q = 2\pi kQ_{内}$$

$$设k = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}$$

$$高斯定理\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dl = \frac{Q_{内}}{\varepsilon_0}$$

环路定理

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dl} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{dl} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}r\cos\theta\, dl = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dl} = \int_P^P \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = 0$$

电势

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$$

这里与三维空间明显不同的一点是，无论如何选取参考点，正点电荷周围的电势都是可正可负的！当$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$比$r_c = e^{\frac{2\pi\varepsilon_0\varphi_0}{q}}$要小时，电势大于零；而大于$r_c$时，电势小于零。无论如何选择参考点，总会存在一个电势由正到负发生转变的临界距离。

电势

我们不妨这样选取参考点，使得正点电荷自身处电势为正无穷大（与三维空间中一致），而无穷远处电势为负无穷大。这样选取参考点得出来的电势表达式为

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}ln|\boldsymbol{r}|$$

在二维空间中，若定义$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$

则有　　$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$

导体与电介质

$$\sigma_e = \sigma_{e0} + \sigma_e'$$
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$$
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$
$$\varepsilon = (1+\chi_e)\varepsilon_0 \text{(均匀、各向同性介质)}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \sigma_e$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \sigma_{e0}$$
$$\frac{\partial \mathrm{E}_x}{y} - \frac{\partial E_y}{x} = 0$$

应用举例：求电场分布

均匀带电细棒$E = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$

均匀带电圆环$\boldsymbol{E} = \begin{cases} 0 & ,\ \mathrm{r} < \mathrm{R} \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}, & r > R \end{cases}$

均匀带电圆$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{Qr}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{r}, & \mathrm{r} < \mathrm{R} \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}, & r > R \end{cases}$

n维

n?

适用于n维的数学工具

用dA来表示n维“体积元”，d￥表示n-1维体积元

n重积分$\iint \dots \int dA = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} dx_2 \dots \int_{a_n(x_1,\dots,x_n)}^{b_n(x_1,\dots,x_n)} f(x_1,\dots,x_n) dx_n$

n维的“球”坐标代换

$x_1 = r\cos\theta_1,$

$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2,$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,$

………………

$x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}$

适用于n维的数学工具

其雅可比行列式为

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})} = r^{n-1} sin^{n-2}\theta_1 sin^{n-3}\theta_2 \cdots sin^2\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}$$

n维“球”表面积为

$$￥_n = \underbrace{\overbrace{\int\int \cdots \int}^{n-1}}_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=r^2} r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin^2\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}d\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_n$$

$$= \begin{cases} \frac{2\pi^m}{(m-1)!}r^{n-1}, & n = 2m, \\ \frac{2(2\pi)^m}{(2m-1)!}r^{n-1}, & n = 2m+1. \end{cases}$$

n维点电荷周围电场线分布只能想象出来，无法绘图

电场强度正比于电场线密度

三维电场线密度为电场线条数除以通过这么多条电场线的球冠面面积

n维电场线密度为电场线条数除以通过这么多条电场线的n-1维几何体体积

电场线条数正比于圆心立体角

n-1维几何体正比于圆心立体角和距离的n-1次方

$E \propto \frac{1}{r^{n-1}}$ ！ $F \propto \frac{1}{r^{n-1}}$ ！ $\boldsymbol{F}_{10} = \mathrm{k}\frac{q_1 q_0}{r_{10}^n}\boldsymbol{r}_{10} = -\boldsymbol{F}_{01}$

高斯定理

n维立体角$\Omega \in (0, \frac{\text{¥}_n}{r^{n-1}})$

由线性代数的知识不难得出，n维线性空间中的n-1维线性几何体（子空间，如二维空间的直线和三维空间的平面）都存在与几何体中任意向量都正交的向量，即法向量。设n维几何体表面某处的n-1维几何体元与该处电场线的法n-1维几何体夹角为α（即它们的法向量夹角为α），则有

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, d\,\text{¥} = k\frac{q}{r^{n-1}}\cos\alpha\frac{r^{n-1}d\Omega}{\cos\alpha} = kqd\Omega$$

高斯定理

$$\oint_{\text{¥}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} d\Omega = \begin{cases} \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}kq, & n\text{为偶数} \\ \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!}kq, & n\text{为奇数} \end{cases}$$

$$\text{令}C_n = \begin{cases} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}, & n\text{为偶数} \\ \frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!}, & n\text{为奇数} \end{cases} \qquad \text{并令k} = \frac{1}{C_n\varepsilon_0}$$

高斯定理 $\oint_{\text{¥}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} d\,\text{¥} = \frac{Q_{\text{内}}}{\varepsilon_0}$

同样用类似的方法推导出环路定理

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl} = \frac{q}{C_n\varepsilon_0 r^n}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{dl} = \frac{q}{C_n\varepsilon_0 r^n} r\cos\theta\, dl = \frac{q}{C_n\varepsilon_0 r^{n-1}}dr$$

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl} = \int_P^P \frac{q}{C_n\varepsilon_0 r^{n-1}}dr = 0$$

电势

$$\varphi = \frac{q}{C_n r^{n-2}}$$

导体与电介质

$\rho_e = \rho_{e0} + \rho_e'$

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$

$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon\boldsymbol{E}$

$\varepsilon = (1+\chi_e)\varepsilon_0$(均匀、各向同性介质)

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \sigma_e$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \sigma_{e0}$

和$rot\boldsymbol{E} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{1}{|\Delta S|}\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl} = 0$

谢　谢　大　家