

趋肤效应下导线的交流电阻模型

信院一班
李双彤

背景介绍

趋肤效应是当电子系统的频率升高后，回路中的导线的趋肤深度减小，从而使导线有效导电面积减小，交流电阻显著增大的过程。了解趋肤效应下导线的等效模型，对于设计电子系统以及维持电子系统的高频性能都有一定的现实意义。本文分析了高频情况下导线交流电阻的简化模型，在考虑趋肤效应基础上，同时考虑了导线的电感效应，并且利用电学仪器进行了验证，实验结果与理论推导具有很好的吻合效果

导线交流电阻理论推导

(1) 趋肤效应与趋肤深度

由电磁学基本方程

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\nabla \times \vec{H} \quad (3)$$

$$\nabla^2 \vec{E} = j\omega\mu\nabla \times \vec{H} \quad (4)$$

而在良导体内 $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, 于是(4)可表示为

$$\nabla^2 \vec{J} = j\omega\mu\sigma\vec{J} \quad (5)$$

对于圆柱形导线，电流密度分布沿轴心方向是均匀的，电流密度大小只与半径 r 有关

于是式 (5) 有方程

$$r^2 \frac{\partial^2 J_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial J_z}{\partial r} - j\omega\mu\sigma J_z = 0 \quad (6)$$

上面的是Bessel方程，再有电流的边界条件，求得

$$j = j_0 e^{-\frac{r}{\delta}}$$

其中 δ 为趋肤深度， r 为到轴心距离，且有

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

其中， σ 为电导率， μ 为磁导率。

可以认为在高频时，电流较为均匀的分布在 $r-\delta$ 到 r (r 为导线横截面半径) 的圆环内。

(2) 导线高频时等效模型

在趋肤效下时整体电阻值相当于许多小圆环电阻的并联。
对于一段长为 l 的圆形导线，其一段小圆环的电阻值为

$$dR = \frac{l}{2\pi\sigma r dr}$$

$$\frac{1}{dR} = 2\pi\sigma r dr / l$$

于是有整体并并联后的电阻值

$$\frac{1}{R} = \int_{r-\delta}^r 2\pi\sigma r dr / l dr$$

$$\text{解得 } R = \frac{l}{\sigma\pi(r^2 - (r-\delta)^2)}$$

当 $r \gg \delta$ 时，可近似有

$$R \approx \frac{l}{2\sigma\pi r \delta}$$

$$\text{带入 } \delta = \chi = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

$$\text{得到 } R \approx \frac{l}{2\pi r} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

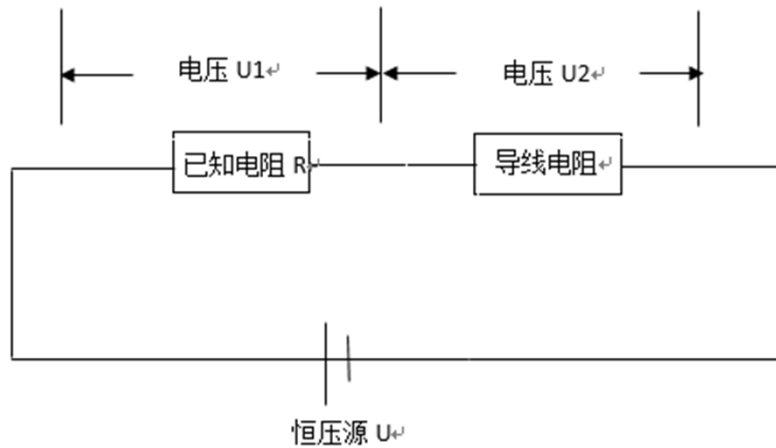
也即导线电阻 R 与频率的 $\frac{1}{2}$ 次幂成正比。

但是在实际导线中，高频情况下导线的感抗为 $j\omega L$ ，这个值随着频率的增大而增大。因此高频时导线电感的影响不可忽略。从而导线实际的交流电阻值应该为

$$R_{\text{导线}} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{\frac{f\mu}{4\sigma\pi r^2} + 4\pi^2 L^2 f^2}$$

也即 $R_{\text{导线}}^2$ 应该是频率 f 的二次函数。

实验验证

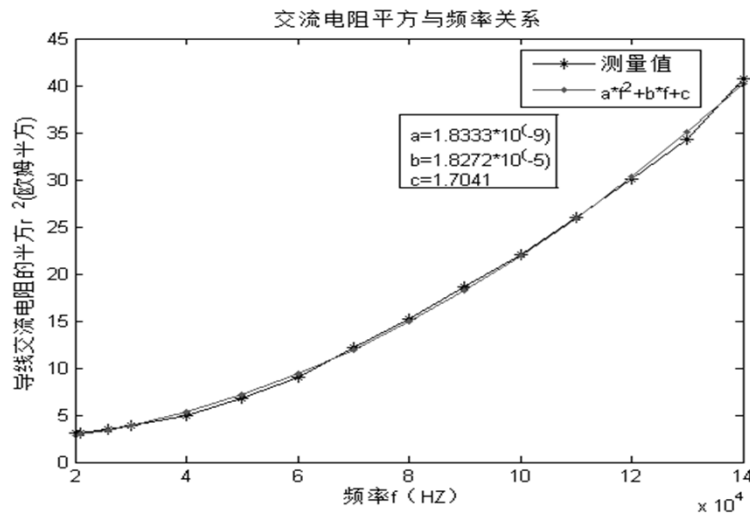


实验中，取已知电阻R为100欧姆，恒压源信号由函数信号发生器产生，提供不同频率的交流信号。U有效值取2vrms。为了增大导线电阻，将十二根导线串联在一起，记录U1，U2随频率f变化的值。则

$$R_{\text{导线}} = \frac{U_2}{U_1} R。 \text{实验时用万用表测得直流时导线电感为} 18\mu\text{H}。$$

频率f/HZ	电压U1/V	电压U2/mV	导线交流电阻R/欧姆	R ²
20000	0.409950000000000	7.14600000000000	1.74313940724479	3.03853499308970
21000	0.410730000000000	7.21400000000000	1.75638497309668	3.08488817371983
26000	0.411700000000000	7.67000000000000	1.86300704396405	3.47079524585967
30000	0.412960000000000	8.07200000000000	1.95466873304921	3.82072985596019
40000	0.416690000000000	9.30000000000000	2.23187501499916	4.98126608257750
50000	0.414050000000000	10.7830000000000	2.60427484603309	6.78224747368067
60000	0.407790000000000	12.2760000000000	3.01037298609579	9.06234551541525
70000	0.408220000000000	14.2720000000000	3.49615403458919	12.223093035743
80000	0.408190000000000	15.9290000000000	3.90234939611455	15.2283308093556
90000	0.408130000000000	17.5930000000000	4.31063631685982	18.5815854562308
100000	0.408970000000000	19.2280000000000	4.70156735212852	22.1047355666008
110000	0.409570000000000	20.8580000000000	5.09265815367337	25.9351670701758
120000	0.410250000000000	22.5100000000000	5.48689823278489	30.1060522169379
130000	0.411500000000000	24.0800000000000	5.85176184690158	34.2431167128530
140000	0.415360000000000	26.5000000000000	6.38000770416025	40.7044983051441

为了验证导线电阻 $R_{\text{导线}} = \sqrt{R^2 + (wL)^2} = \sqrt{\frac{f\mu}{4\sigma\pi r^2} + 4\pi^2 L^2 f^2}$ ，
以 $R_{\text{导线}}^2$ 为纵坐标，频率 f 为横坐标作图，作图如下：



其中，绿线为 matlab二次函数拟合所得到的曲线。拟合值为

$R_{\text{导线}}^2 = af^2 + bf + c$ 其中a,b,c值已经在图上标出。

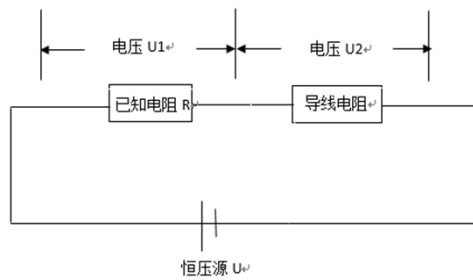
应有 $a = 4\pi^2 L^2$ ，计算出电感的理想值为 $17\mu\text{H}$ ，而实验时用万用表测得的直流时的导线电感值为 $18\mu\text{H}$ ，说明理论与实验结果吻合效果很好，较好的验证了理论推导式。

3结论：

可以看到，在考虑了导线的趋肤效应电阻和电感值后，实验曲线拟合的效果还是很理想的，说明至少在 $1\text{k}\sim 200\text{kHz}$ 范围内，导线都可以用一个趋肤效应的交流电阻和一个电感值进行等效。其中，电感值可以在低频情况下测出，并且当高频时可大体认为其电感值不变。此外，可以注意到在 140kHz 时导线的交流电阻是直流电阻的将近6倍，说明趋肤效应还是很明显的。这对于研究传输线上的趋肤效应与设计高频电子系统都具有一定的指导意义。

实验中一些问题的讨论：

- 1、连接电压表导线电阻是否影响导线电阻的测量值（待测导线电阻较大）
- 2、交流时标准电阻的电阻值问题
- 3、导线高频时电感是否变化
- 4、是否需要考虑导线电容值
- 5、为什么不接着测量频率 $\geq 200\text{kHz}$ 的交流电阻值



谢谢大家