用数学方法探究孤立导体电容的稳定性

粟文泽 2016/12/25

- 研究目的
- 孤立导体电容的数学表达
- 孤立导体电容“稳定性”分析
- 结论

一、研究目的

孤立导体的电容$C(\Omega)$取决于孤立导体的外表面$\partial\Omega$ 。如果$\partial\Omega$受到一个小扰动，$C(\Omega)$的变化大不大？本论文用数学中稳定性的概念来研究这个问题。

二、孤立导体电容的数学表达

（令导体电势为1，则电容$C = Q = \varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}$）

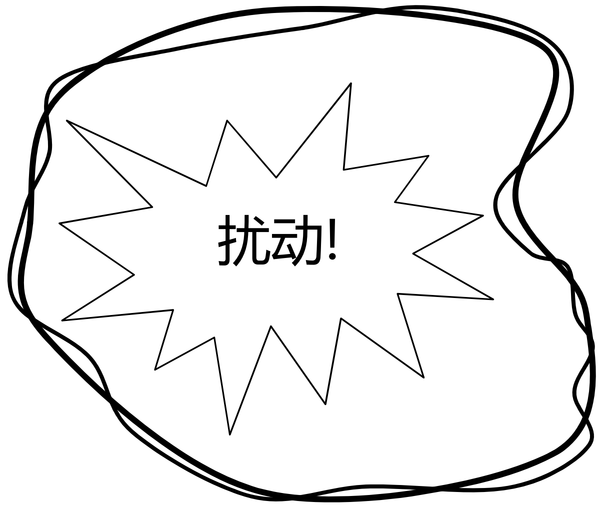
数学问题：

有界区域$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, Dirichlet外问题:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}, \\ \varphi(x) = 1, & x \in \partial\Omega, \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} \varphi(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega} \end{cases}$$

$C(\Omega) = \varepsilon_0 \oiint_{\partial B_R(0)} |\nabla\varphi(x)|\, dS$, 这里$B_R(0) \supseteq \overline{\Omega}$

三、孤立导体电容“稳定性”分析



2、基本问题: 给导体曲面$\partial\Omega$一个扰动, $C(\Omega)$是否稳定?

“电容的稳定性”的数学表达：$|C(\Omega)-C(\Omega')|<\varepsilon$, 扰动后的电容变化很小.

由于并非所有的导体及所有的扰动都能保持电容稳定, 我们需要找出那些保持稳定性成立的条件.

3、用到的数学定理

- 引理1(平均值定理). 如果φ在闭球$B_R(0)$上调和, 那么

$$\varphi(0) = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{B_R(0)} \varphi \, dV$$

- 引理2(调和函数的光滑性和解析性). 如果φ在区域Ω上调和, 则它在Ω上无穷可微并且在每点附近可以展开成收敛于自身的Taylor级数.

- 引理3(微商的估计)

如果φ在闭球$B_R(0)$上调和, 那么对于每个满足$|\alpha| = k$的多重指标, 有估计：

$$|D^\alpha \varphi(0)| \le \frac{C_k}{R^{k+3}} \|\varphi\|_{L^1(B_R(0))}$$

其中：

$$C_0 = \frac{3}{4\pi}, C_k = \frac{3(3 \cdot 48k)^k}{4\pi}$$

- 引理4(最大值原理)

如果φ在区域Ω上调和, 那么它的最大最小值均在边界取到.

如果它在区域Ω内部某点取到最大或最小值, 那么它是常函数.

4、关于电势, 电容的引理

- 引理5. 导体外(不包含表面)的电势严格地介于0到1之间.

  数学表述: 设有界区域$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, 若$\varphi$满足:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}, \\ \varphi(x) = 1, & x \in \partial\Omega, \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} \varphi(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega} \end{cases}$$

则$\forall x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}, 0 < \varphi(x) < 1$.

证明需要用到平均值定理(引理1)和最大值原理(引理4).

- 引理6. 单个导体的电容等于一个外导体趋于无穷大时的电容器的电容.

  数学表述:设有界区域$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$包含原点, $B_R(0) \supseteq \overline{\Omega}$, 若$\varphi_R$满足:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_R(x) = 0, & x \in B_R(0) \backslash \overline{\Omega}, \\ \varphi_R(x) = 1, & x \in \partial\Omega, \\ \varphi_R(x) = 0, & x \in \partial B_R(0) \end{cases}$$

取一个固定的r使$B_R(0) \supseteq B_r(0) \supseteq \overline{\Omega}$, 则有

$$C(\Omega) = -\varepsilon_0 \lim_{R \to +\infty} \oiint_{\partial B_r(0)} \nabla\varphi_R(x) \cdot d\vec{S}$$

证明需要用到微商的估计(引理3)和最大值原理(引理4).

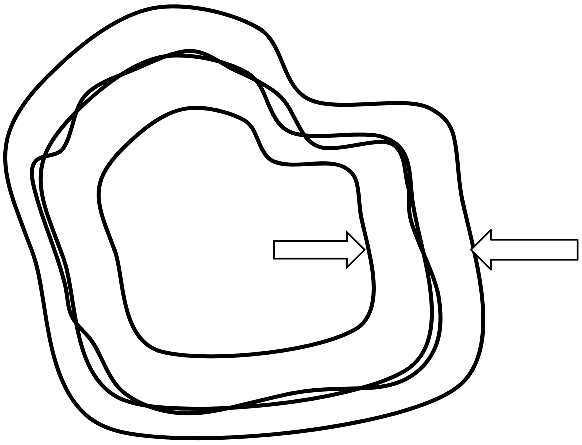
- 引理7. 如果一个导体可以包含另一个导体, 那么大的导体电容更大.
  数学表述:设有界区域$\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$, 如果$\overline{\Omega} \subseteq \Omega'$, 则$C(\Omega) \leq C(\Omega')$.
  证明需要用到引理6以及最大值原理(引理4).

稳定性分析

关键:

位似变换. 用两个原导体的位似像去夹住扰动后的导体曲面(为了严格地保证夹住需要对原导体加一些形状上的限制, 数学表述比较像Lipshitz条件). 放大t倍时电容也增大t倍.

夹逼定理. 扰动后的电容处在两个位似像的电容之间, 从而电容的变化很小.



稳定性分析的结果

- 如果包含原点的有界区域Ω满足:

  (1). Ω关于原点位似放大的像包含Ω, 位似缩小的像被Ω包含.

  (2). 位似放大缩小时像$f(x)$到原像x的距离关于位似比满足类似Lipshitz条件的条件(PPT中不具体写出).
- 如果扰动保持边界一致接近.
- 那么Ω的电容关于该扰动稳定.

四、结论

- 我们证明了, 对于较广泛的一类导体, 在保持表面一致接近的扰动下电容稳定.
- 也就是说, 在工业制造上, 我们只需要保证制造出的导体表面与标准导体表面一致接近, 即可保证电容是符合制造要求的.