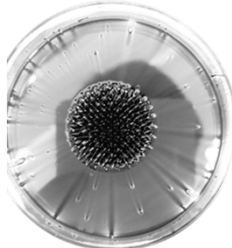


磁流体在外磁场下表面形貌研究

作者：
羊达明 16-002班 PB16000647
梁骥原 16-002班 PB16000680

概述

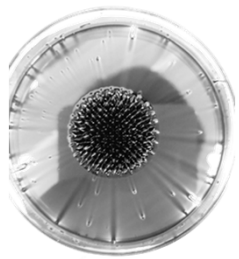


磁流体是一种在磁场中会被磁化的液体，最初作为火箭燃料而被发明出来。它是由纳米级的磁性粒子和载体溶剂组成。

Rosenweig最初发现当磁流体暴露在足够强的外磁场中时，液体表面会产生不稳定性。而后也进一步发现这种不稳定性是多样的，或者说最后表面的形状是有各种可能的。

接下来，我们将对如左图的“磁丘”进行一定的研究。

概述



我们的研究内容是：
为何会产生这样的形貌？表面峰数与外磁场有何关系？

磁丘现象的初步解释

初看磁流体的形状，一般都会认为它是不能达到稳定的：



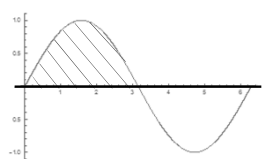
从能量角度考虑，重力势能和液体表面能都增大了（表面积增大），由能量最小原理，这是不稳定的。

但事实上，对于整个体系而言，能量反而是降低的。

磁丘现象的初步解释

- 能量角度考虑
- 色散关系考虑：

$$\omega^2 = g_0 q + \frac{\sigma}{\rho} q^3$$
- 即波频率 ω 和波数 q 的关系式。 g_0 为重力加速度， σ 为液体表面张力系数， ρ 为液体密度。

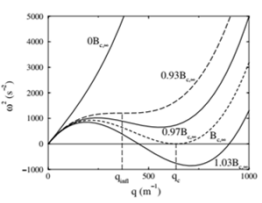


不稳定性的产生

- 磁流体色散关系：

$$\omega^2 = g_0 q + \frac{\sigma}{\rho} q^3 - \frac{(\mu_r - 1)^2}{\rho(\mu_r + 1)\mu_0 \mu_r} B^2 q^2$$
- 纯虚数解的含义是什么？
- 表面微扰变化规律：(A代表 Amplitude, 液面高度)

$$A = A_0 R [e^{-(\alpha - \beta^2 t^2)}]$$



说明


- 开始时也提出了,这种论述实际上只能说明不断增加磁场,液体表面会产生一个“不稳定性”。
- 为了正面去分析磁流体会形成如何的表面形貌,还需要更深入的数学分析研究。



磁流体理论研究基本思路

由上文描述可知,磁流体表面形貌的研究是从能量入手的,同时对象又是一个可以简化成三角函数波的表面。所以研究的基本思路可以即是:


- 得到表面高度 $\zeta(x,y)$ 表达式。一般而言,我们可以利用Fourier分解的低阶部分。
- 得到体系能量表达式
- 上述两个方程连立,求解使得能量最低的 ζ 分布。利用到了泛函的知识,超出了我们的数学水平,故只对现有方法进行一定程度的解释。



体系能量方程

由上文,体系能量包括三部分:重力势能,表面能,磁能。以下表达式对各个能量取了平均,取平均的原理以重力势能为例进行阐述:

$$f[\zeta(x,y)] = \left\langle \frac{\rho g_0}{2} \zeta^2(x,y) \right\rangle - \left\langle \frac{\mu_0 - 1}{2\mu_0} \int_{-\infty}^{\zeta(x,y)} BH(x,y,z) dz \right\rangle + \left\langle \sigma \sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2} \right\rangle$$

$$\langle f(x,y) \rangle = \lim_{S \rightarrow \infty} S^{-1} \iint_S f(x,y) dx dy$$


$$\rho dV g \bar{h} = \rho (dx dy h) g \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2(x,y) dx dy$$

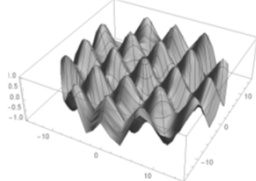
表面形貌方程

为了便于刻画一个更一般的外磁场下磁流体“磁丘”的形貌,我们做出以下假设:

- 磁流体与底面接触面为无限大平板
- 外磁场是竖直的磁场
- 磁流体上方为真空

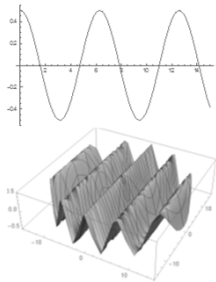
设 $\zeta(x,y)$ 为Oxy平面一点对应磁流体表面高度函数,目前认为是未知、任意的。

不过,考虑以上假设,Oxy无限大时 ζ 是周期的,所以可以由若干个平面波叠加而成,对于二维情形就是傅里叶变换。三维中需要考虑每个叠加波的方向。



一个平面波扩展到三维空间

首先考虑考虑一个平
 $y = 0.5 \cos(\dots)$
 取它在平面 $y = 0$ 上, 则, 则它的方向可 向量 $\vec{e}_y = (1,0)$ 表示
 $\zeta(x, y) = 0.5 \cos[\vec{e}_y \cdot \vec{r}] = 0.5 \cos(y \cos \theta)$



这种方法的含义大致是: 将一个立体的波分解成许多二维的波, 而每个 二维的波在平面方向用平面波来描述。但在其他 方向也许没有影响, 利用向量点乘给一个波 拓展整个空间。

多列波的合成

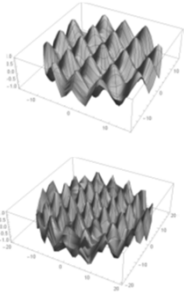
当引入两列主波时, 会形成如右图的情形。

文献[4]中提出, 这种分解不仅需要考虑各列主波, 也要考虑主波之间产生的高阶谐波, 文献[4]给出的公式为:

$$\zeta(x,y) = \sum_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) = \sum_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\delta) = \sum_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} \cos((\vec{k} \pm 2\vec{k}) \cdot \vec{r} + \delta + \delta)$$

右下图就是右上图考虑谐波后的情形 (同时放大了坐标)



方程的求解

- 解上述两个方程的过程需要进行对我们而言非常高深的数学分析，我们尝试了很久仍未理解，遂放弃。在此不对此部分进行讨论。
- PS：文献[2] [3] [4] [5] [6] 利用若干个方法对这组方程(事实上表面形貌的方程也不尽相同，文献[4]能量方程也有修)进行了求解

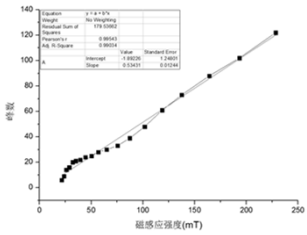
实验设计



- 具体操作：
 - i) 测量亚克力板 n1 的四个角的厚度，取平均作为该亚克力板厚度 d1
 - ii) 利用特斯拉计多次测量 n1 正上方磁场强度，取最大值 b1 (由对称性，最大值最接近轴线磁场强度)
 - iii) 稳定后磁流体呈现磁丘状，记录此时磁流体表面峰数
 - ... 对 n2 重复上述操作。

实验数据及结果

磁感应强度	峰数
1 228.3333	122
2 193.2667	102
3 164.1	88
4 137.6667	73
5 118.6333	61
6 101.6	48
7 87.3333	39
8 76.4	33
9 64.8333	30
10 56.9	28
11 50.2667	25
12 44.3667	24
13 39.5333	22
14 35.1333	21
15 31.8	20
16 28.7667	16
17 26	14
18 23.6333	9
19 21.4333	6

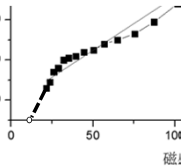


实验数据及结果

- 更进一步，由最开始的色散关系式：

$$\omega^2 = gq + \frac{\sigma}{\rho} q^3 - \frac{(\mu - 1)^2}{\rho(\mu + 1)\mu\mu_0} B^2 q^2$$
- 可以得到当：

$$B = \sqrt{\frac{2\mu\mu_0(\mu + 1)\sqrt{\rho g \sigma}}{\mu - 1}}$$
- 不稳定性产生： $\mu = 3.64$
- 代入参数： $\rho = 1210 \text{ kg/m}^3$
 $g = 9.79 \text{ m/s}^2$
 $\sigma = 0.024 \text{ N/m}$
- 得到 $B = 0.0111 \text{ T} = 11.1 \text{ mT}$
- 而在实验中，将最后的曲线沿最后几个点反向延长，得到的横轴交点，接近这个计算值。可以说一定程度上，实验是很准确的。

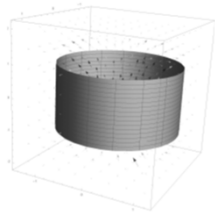


实验数据及结果

- 需要补充说明的是：
- 最终的曲线图横轴所选用的磁感应强度仅是中心一点处的磁感应强度，仅能定性的对磁流体在磁场进行分析，下面我们假设磁铁均匀磁化做一些计算来对磁场进行更丰满的描述。

强磁铁的磁场

一旦假设了我们所用的强磁铁是均匀磁化的，就可以通过特斯拉计测量出的磁感应强度分布计算出全空间的磁感应分布，这样就可以对磁流体所在磁场进行进一步的描述。



// 均匀磁化假设模型

假设磁铁表面磁化电流均匀分布

$$I' = idz$$

(R, φ, z) I'

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'd\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 idz}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

其中 $r = \sqrt{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho) + (z - z_0)^2}$

// 均匀磁化假设模型

展开得

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} idz(R \cos \varphi(z_0 - z)d\varphi + R \sin \varphi(z_0 - z)d\varphi + R(R - \rho \cos \varphi)d\varphi)$$

分解得

$$dB_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} iR \cos \varphi(z_0 - z)dzd\varphi$$

$$dB_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} iR \sin \varphi(z_0 - z)dzd\varphi$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} iR(R - \rho \cos \varphi)dzd\varphi$$

积分得


$$B_\rho = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{R \cos \varphi(z_0 - z)dz}{r^3} d\varphi$$

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{R \sin \varphi(z_0 - z)dz}{r^3} d\varphi = 0$$

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{R(R - \rho \cos \varphi)dz}{r^3} d\varphi$$

// 均匀磁化假设模型

在螺线管的轴线上有



$$dB_z = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

积分得

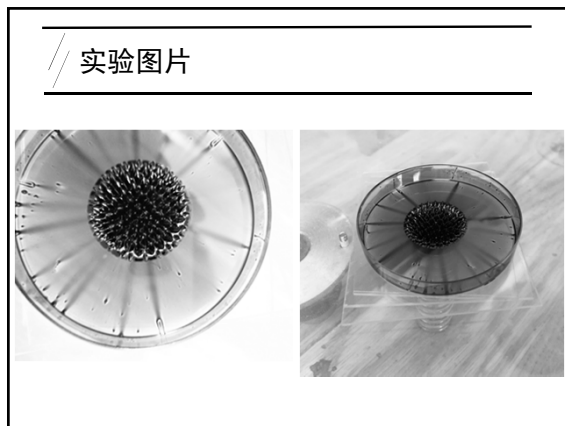
$$B_z = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{i\mu_0}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$

// 计算结果

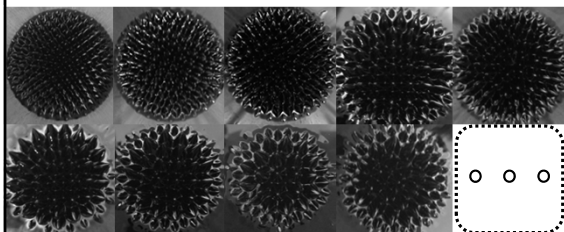
材料	h/cm	z0m	z1m	z2m	半径	B1mT	B2mT	B3mT	半径	z0cm	z1-z0cm	cosβ1	cosβ2	μ² 磁电度量表 1
材料1	1.36	5.85	5.95	5.91	5.9075	229	229	228.3333	5.9075	66.4675	0.701565	0.99999	1551.400366	
材料2	1.3	1.28	1.28	1.13	1.2475	192	194	193.2667	7.205	67.765	0.76844	0.996103	1697.623666	
材料3	1.34	1.31	1.26	1.31	1.305	134	139.7	137.5667	9.7975	70.3175	0.851838	0.995379	1903.493212	
材料4	1.38	1.24	1.31	1.25	1.295	118	119	118.6333	11.0525	71.6125	0.878851	0.995008	2016.589555	
材料5	1.34	1.3	1.3	1.34	1.33	101	102	101.8	101.8	12.3825	72.9425	0.899918	0.994634	2100.993008
材料6	1.33	1.25	1.33	1.31	1.305	87	87.7	87.3	87.33333	13.6875	74.2475	0.915865	0.994751	2159.530354
材料7	1.36	1.35	1.35	1.25	1.3275	75	75.5	75.7	75.4	15.015	75.575	0.928805	0.994863	2209.240597
材料8	1.38	1.25	1.24	1.24	1.2775	64	64.7	65.2	64.83333	16.2025	76.525	0.93836	0.994969	2213.631209
材料9	1.38	1.32	1.35	1.25	1.325	55	57.5	58.2	56.9	17.6175	78.1775	0.946608	0.995068	2255.263287
材料10	1.35	1.31	1.3	1.24	1.3	49	50.7	51.1	50.26667	18.9175	79.4775	0.953205	0.995163	2287.054581
材料11	1.34	1.3	1.32	1.25	1.3025	43	45	45.1	44.36667	20.22	80.78	0.958863	0.995253	2300.595052
材料12	1.33	1.34	1.24	1.24	1.2875	38	39.3	40.1	39.53333	21.5075	82.0675	0.963221	0.995338	2317.479533
材料13	1.35	1.25	1.24	1.25	1.2825	34	35.4	36	35.13333	22.79	83.35	0.967047	0.995416	2313.533352
材料14	1.32	1.25	1.25	1.34	1.2925	31	32	32.7	31.9	24.0825	84.6425	0.970338	0.995497	2349.105912
材料15	1.28	1.25	1.25	1.35	1.3	28	28.2	28.5	28.76667	25.3825	85.8225	0.97314	0.995577	2354.927295
材料16	1.25	1.34	1.27	1.24	1.275	25.6	26.1	26.3	26	26.6375	87.1975	0.975504	0.995641	2354.778881
材料17	1.34	1.27	1.27	1.35	1.3075	23	23.5	24	23.63333	27.845	88.505	0.977714	0.99571	2354.266422
材料18	1.31	1.27	1.31	1.38	1.3175	21.2	21.4	21.7	21.43333	29.2825	89.8225	0.97962	0.995776	2360.911287

从数据来看，在距离较短时计算结果与测量结果偏差较大，或者说将测量结果的磁场套入均匀磁化的假设中，将得到差异较大的环形电流值。

而在距离较长时，可以看出测量值对应的环形电流大小相近，此时假设成立。



实验图片



磁流体表面研究的意义

磁流体表面的不稳定性一直以来是磁流体研究的一个符号化代言形象，但同时，这一对象也确实有其研究的意义：

1. 对于非线性动力学研究的意义。

各种由非平衡态趋于平衡的过程一直以来都备受人们关注，因为非线性动力学的自组织现象和上述过程是息息相关的，而包括人在内的生物本身又是非线性动力学典型的对象。

在实验中若要对这些趋于平衡态的过程进行研究，就要对它们有较好的控制。实际操作中，电磁问题相较于力学问题更易控制。

而文献[2]中指出，磁场相较于电场更利于控制。

磁流体表面研究的意义

2. 技术层面的意义

技术层面上，有真正价值的并不是我们讨论的不稳定性，而是其反面铁磁流体的**稳定性**。比如利用磁流体定位和发电的装置中，Rosenweig不稳定性是需要避免的。

3. 对磁流体研究的意义

通过磁流体表面在磁场下的不稳定分析，我们可以间接研究磁流体的**性质**。由于磁流体本身不透光，许多研究手段诸如影相法、激光多普勒测速法都失效了。

参考文献

- [1] 李艳琴，磁性流体Rosenweig尖峰的磁控研究
- [2] R.Richter, A.Lange. Surface Instabilities of Ferrofluids
- [3] Rosenweig. Ferrohydrodynamics
- [4] A.Gailitis. Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field
- [5] R.Friedrichs, A.Engel. Non-linear analysis of the rosenweig instability
- [6] Rene Friedrichs. Low symmetry patterns on magnetic fluids