应用拉普拉斯矩阵
计算复杂电阻网络阻值

张宇哲

1

〇、目录

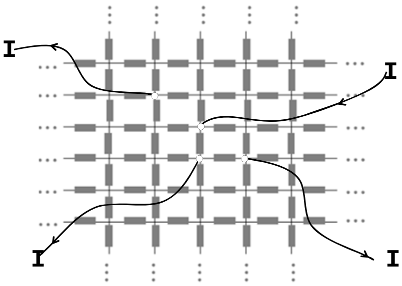
2

一、研究概述

3

问题提出的背景

一、研究概述



- 如何求解**任意两个节点**间（如两个位于正方形对角位置上的节点）的电阻？

4

问题提出的背景

一、研究概述

- 另外，实际的电路中也可能存在复杂的电阻网络。做理论计算时，我们需要一种**具有普适性的算法**计算其阻值。

5

研究成果

一、研究概述

- 本论文对于**复杂电阻网络**的特征做出描述，并将其**化归**为**等值有规律电阻网络**，之后运用**图论**相关概念对其进行建模。最后利用C语言与Matlab软件对无穷等值网格状电阻网络的多种阻值进行**模拟**，并进行**近似计算**。研究的成果（算法）计算复杂电阻网络阻值具有良好的可操作性

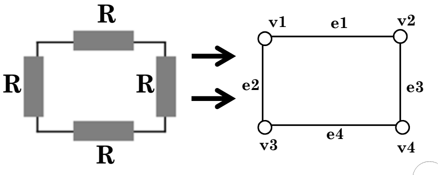
6

二、应用图论建模

图论简介

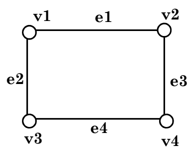
二、应用图论建模

- 图：由点和连接点的线组成。两点间的连线长度均为1.
  不考虑线的曲直



图论简介

二、应用图论建模

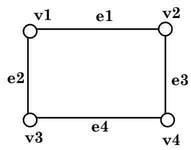


- 如图，该图由点集{v1,v2,v3,v4}与线集{e1,e2,e3,e4}组成.拉普拉斯矩阵按照以下规律写成。

图论简介

二、应用图论建模

- 首先将四个点分别写在矩阵相互垂直的两边上

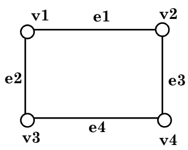


	v1	v2	v3	v4
v1				
v2				
v3				
v4				

图论简介

二、应用图论建模

- 在对角的位置写上该点的度（与多少个点相连）.如v1与v2, v3两个点相连，（v1,v1）上就写2

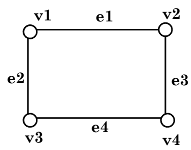


	v1	v2	v3	v4
v1	2			
v2		2		
v3			2	
v4				2

图论简介

二、应用图论建模

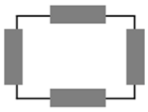
- 在非对角的位置写上，若对应的两点相连则写-1，不相连则写0.如v1与v2相连，（v1,v2）和（v2,v1）上就写-1



	v1	v2	v3	v4
v1	2	-1	-1	0
v2	-1	2	0	-1
v3	-1	0	2	-1
v4	0	-1	-1	2

图论简介

二、应用图论建模



	v1	v2	v3	v4
v1	2	-1	-1	0
v2	-1	2	0	-1
v3	-1	0	2	-1
v4	0	-1	-1	2

L

- 这样子就建立起了拉普拉斯矩阵，记为L。

13

图论简介

二、应用图论建模

- 根据**文献[3]**，若每条边上有一个**单位电阻**（阻值为1）任意两点vi, vj间的电阻距离R为

$$R=\frac{\det L\,(i,j\,|\,i,j)}{\det L\,(i\,|\,i)}$$

* 其中L(i,j|i,j)代表L中第i和第j行、第i和第j列的余子式，L（i|i）代表第i行第i列的余子式。分母上i换成j也可以

14

复杂电阻网络的建模

二、应用图论建模

- 首先，为了将一个实际的电网转化为满足图论中电阻距离理论的模型，电网需满足以下两个条件：
  - 1、**导线电阻不计**
  - 2、**所有电阻均为单位电阻**（阻值为1）
- 虽然为了建立起一个简单有效的模型，电网需要满足以上苛刻的条件，但是实际上**一切复杂电网**都可**转化**为满足上述条件的理想化电网

15

复杂电阻网络的建模

二、应用图论建模

- 理想化模型的推广：
  - 1、导线电阻不计

    ➔ • 将**导线转化为**串联在电路中的**电阻**
  - 2、所有电阻均为单位电阻（阻值为1）

    ➔ • 可先将**复杂电阻网络**转化为由**等值电**阻构成的网络，且**等值电阻**与**单位电**阻构成的网络的阻值存在**线性关系**

    • 该处需要证明合理性

16

复杂电阻网络的建模

二、应用图论建模

- 如何将**复杂电阻网络**转化为由**等值电阻**构成的网络？

10kΩ ➔ 100k × 0.1Ω

1kΩ ➔ 10k × 0.1Ω

0.1Ω ➔ 1 × 0.1Ω

- 针对由多个不等值电阻构成网络，显然存在**一个阻值为r**的电阻，使得所有电阻的阻值均为r的整数倍。再将原来的电阻**分割**为多个阻值为r的电阻，即实现了电阻网络的等电阻化

17

复杂电阻网络的建模

二、应用图论建模

- “**等值电阻**与**单位电阻**构成的相同网络的阻值存在**线性**关系”的证明
- 从电阻的计算公式

$$R=l\,/\,(\sigma\cdot S)$$

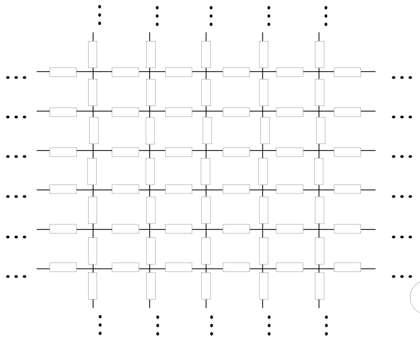
以及 $r\propto l\propto R$

因而R(r)是r的正比例函数，即**R(r)=rR(1)**。从微观上看，从电流流入点到流出点运动的距离（数学上抽象此“距离”为电阻距离，即信号传输的距离）正比于r。从这一点角度我们也可以证明等值电阻r组成的网络，阻值是单位电阻网络的r倍。

18

无穷单位电阻网络的建模

二、应用图论建模



19

无穷单位电阻网络的建模

二、应用图论建模

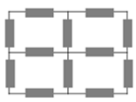
- 建立n×n（n阶）的电阻网络，可以得到相应的拉普拉斯矩阵。不断扩大n的值，计算并观察总阻值的收敛性，将结果与查阅文献所得的真值比较

20

无穷单位电阻网络的建模

二、应用图论建模

- 建立n×n（n阶）的电阻网络，可以得到相应的拉普拉斯矩阵。不断扩大n的值，计算并观察总阻值的收敛性，将结果与查阅文献所得的真值比较

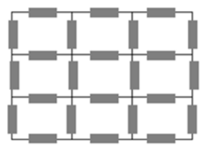


21

无穷单位电阻网络的建模

二、应用图论建模

- 建立n×n（n阶）的电阻网络，可以得到相应的拉普拉斯矩阵。不断扩大n的值，计算并观察总阻值的收敛性，将结果与查阅文献所得的真值比较

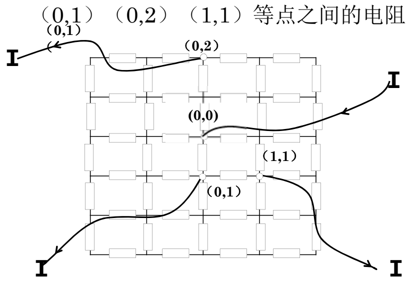


22

无穷单位电阻网络的建模

三、计算算法

- 具体做法是应用C语言编写出拉普拉斯矩阵，输入Matlab计算中心点(0,0)与周围（0,1）（0,2）（1,1）等点之间的电阻



23

利用稀疏矩阵对算法的优化

三、计算算法

- 由于本论文最终目标是设计一个计算复杂电阻网络的算法，算法可实现性（具有**收敛性**，可行）得到验证后，算法的**优化**程度决定了算法优劣高下。
- 实际中，拉普拉斯矩阵**大部分元素为0**.如本论文研究的n阶网格状单位电阻网络，对应的拉普拉斯矩阵共有n^4个元素，其中非0元为5n^2-4n个，占百分百为（5n-4）/n^3，当n>22时，非0元占所有元素的百分比**低于1%**。大量的非0元素占用大量**存储空间**，在运算中消耗大量**内存**。
- 使用稀疏矩阵，不仅大大减少了存储空间的需求，也使得行列式的计算更加快速。

24

存储空间上的优化

三、计算算法

Name	Size	Bytes	Class	Attributes
A	400x400	1280000	double	
a20	400x400	24656	double	sparse

* sparse表示稀疏矩阵

- 对比两种拉普拉斯矩阵，同样为400阶矩阵，稀疏矩阵占用的存储空间仅为普通矩阵的24656/1280000=1.93%,基本与普拉斯矩阵中非0元占元素总比例相同（n=20时为1.20%）

25

计算速度上的优化

三、计算算法

```
>> tic;det(A);toc;
时间已过 0.016126 秒。
>> tic;det(A);toc
时间已过 0.011400 秒。
>> tic;det(A);toc
时间已过 0.014871 秒。
```

普通矩阵的行列式计算平均用时：0.014132s

```
>> tic;det(a10);toc
时间已过 0.000591 秒。
>> tic;det(a10);toc
时间已过 0.000155 秒。
>> tic;det(a10);toc
时间已过 0.000412 秒。
```

* a10为稀疏矩阵

稀疏矩阵的行列式平均用时：0.000386s

- 对比两种拉普拉斯矩阵行列式计算的时间，同样为400阶矩阵，稀疏矩阵行列式平均计算时间仅为普通矩阵的0.000386/0.014132=2.73%

26

利用行列式的线性性对算法的优化

三、计算算法

m1524	9.1820e+272
m2324	8.1329e+272
m2424	8.7799e+272
m2524	9.3697e+272
m3424	9.1405e+272
m3524	9.6464e+272
m4524	9.9823e+272
t0124	8.6792e+272
t0224	8.6792e+272
t0324	8.6792e+272
t0424	8.6792e+272
t0524	8.6792e+272
t1224	8.6792e+272
t1324	8.6792e+272
t1424	8.6792e+272
t1524	8.6792e+272
t2324	8.6792e+272
t2424	8.6792e+272
t2524	8.6792e+272
t3424	8.6792e+272
t3524	8.6792e+272

- 在实际计算中，仅仅利用稀疏矩阵对算法进行优化，只能将计算电阻网网的最大规模**从20阶提升到24阶**。由于存放行列式的变量（双精度浮点数）存在最大值，到24阶（24^2=576阶矩阵）时行列式值大约是**10的272次方**量级，而到26阶（26^2=676阶矩阵）时行列式值**已经超过可存储最大值**。并且计算大数除法时运算速度大大降低。

27

利用行列式的线性性对算法的优化

三、计算算法

- 为了进一步优化算法，利用行列式是一个**多重线性**函数的性质，将其中每一个元素乘上相同的因子E(0<E<1)，将计算结果也乘E即可得到正确数值
- 取E为0.5，即可将计算能力**从24阶提升到40阶**。最大相对误差**从5%降低到1.6%**，并且进一步调整E的数值，可以继续计算更高阶的行列式

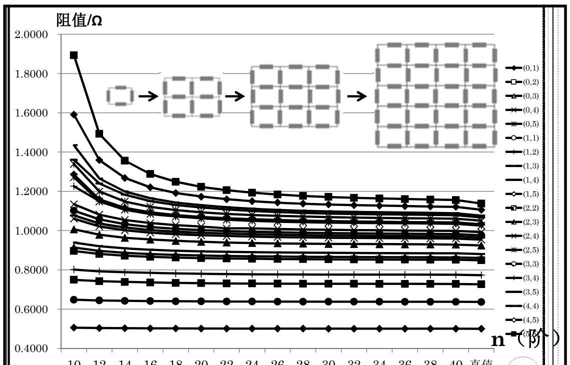
$$\mathbf{R=\frac{det\ L（i,j\,|\,i,j）}{det\ L（i\,|\,i）}}$$

28

三、计算算法

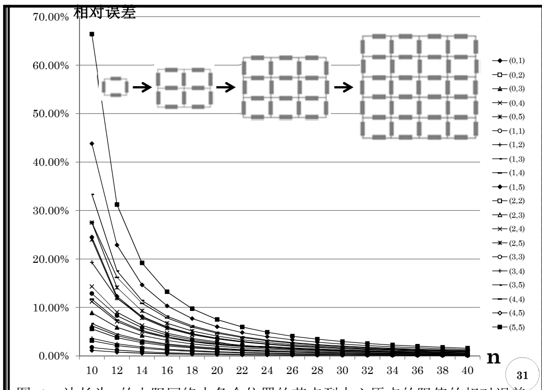
实验数据

29



图一：边长为n的电阻网络中各个位置的节点到中心原点的阻值与真值的比较

30



图二：边长为n的电阻网络中各个位置的节点到中心原点的阻值的相对误差（相对误差=（Matlab实验所得值-真值）/真值×100%）

31

实验结果分析与实验结论

三、计算算法

- 结果分析：
  - 本次基于C语言和Matlab的实验的计算结果显示以n阶单位电阻网络近似计算无穷单位电阻网络的阻值具有收敛性，即计算所得的近似结果随n的增大不断逼近查阅文献所得的电阻网络阻值
  - 计算得到网络阻值最小相对误差均在1.6%以内（20组数据中有20组最小相对误差在1.6%以内，19组小于等于1.5%，16组小于等于1%，8组小于等于0.5%）。
- 实验结论
  - 运用拉普拉斯矩阵针对n阶电阻网络阻值求解得到无穷电阻网络阻值的近似值的解法的可靠性得到了较好的验证

32

四、参考文献

- [1] 姜莉,仲嘉霖,凌寅生.无限电阻网络等效电阻的积分计算 [J].苏州:苏州城建环保学院学报, 2001(14):75-77
- [2] 田社平,陈洪亮,张峰.无限电阻网络等效电阻的计算.电气电子教学学报 第32卷　第2期 2010年4月
- [3](印) R.B.Bapat主编 吴少川译. 图与矩阵. 哈尔滨工业大学出版社,2014
- [4] (美) Fred Buckley, Marty Lewinter.李慧霸, 王凤芹译.图论简明教程.清华大学出版社,2005

33