

基于Mathematica的电磁场可视化与计算

——马睿洋 PB16001775

目的

- 直观物理图像
- 复杂方程求解
- 高精度数值模拟

关于Mathematica



Mathematica 和 Matlab、Maple 并称为三大数学软件。
 Mathematica 是一款科学计算软件，很好地结合了数值和符号计算引擎、图形系统、编程语言、文本系统、和与其他应用程序的高级连接。很多功能在相应领域内处于世界领先地位，它也是使用最广泛的数学软件之一。

主要内容

- 静电场可视化
- 求解拉普拉斯方程
- 静磁场可视化及模拟

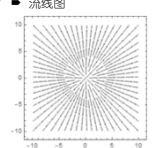
点电荷

$$\phi[x, y, z] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

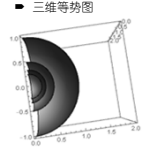
```

10[x, y, z] = Grad[phi[x, y, z], {x, y, z}]
StreamPlot[Rest[10[x, y, z]] /. x = 0 // Evaluate, {y, -10, 10}, {z, -10, 10}]
ContourPlot3D[phi[x, y, z] // Evaluate, {x, -1, 1}, {y, 0, 2}, {z, 0, 2}, Contours -> {0, 1, 2, 3, 4}, Mesh -> None]
    
```

■ 流线图



■ 三维等势面



电偶极子(理想)

利用的电偶极子电势公式 $V = (p \cos(\theta)) / r^2$
 用软件的求梯度及坐标变换功能

```

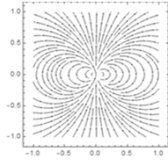
Vs = (p Cos[theta]) / r^2;
Es = -Grad[Vs, {r, theta, phi}, "Spherical"];
Ec = TransformedField["Spherical" -> "Cartesian", Es, {r, theta, phi} -> {x, y, z}];
StreamPlot[Rest[Ec /. {p -> 1, x = 0}] // Evaluate, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}];
Vx[x, y, z] = TransformedField["Spherical" -> "Cartesian", Vs, {r, theta, phi} -> {x, y, z}];
ContourPlot3D[Vx[x, y, z] /. p -> 1 // Evaluate, {x, -1, 1}, {y, 0, 1}, {z, -1, 1}, Contours -> {-7.5, -2.5, -1, 0, 1, 2.5, 7.5},
ContourStyle -> Table[Blue[i/7, 1, 1, 0.5], {i, 0, 6}], Mesh -> None];
Clear[Vs, Es, Ec, p, y, x, z, Vx]
    
```

电偶极子(理想)

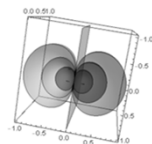
$$\vec{E} = \left\{ \frac{2p \cos[\theta]}{r^3}, \frac{p \sin[\theta]}{r^3}, 0 \right\}$$

$$\vec{E} = \left\{ \frac{3pxz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \frac{3pyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \frac{p(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{2pz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right\}$$

二维流线图

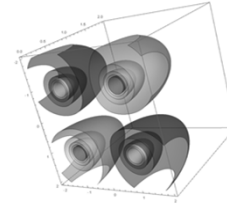


三维等势图



电四极子

对于电四极子，我们采用实际的电四极子会更加简单，取正方形的四个顶点放置电荷，由电势公式画出3D等势图



有限差分法

拉普拉斯方程

$$\nabla^2 V[\vec{r}] = 0$$

差分法

求解二维拉普拉斯方程。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_a - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_c}{h}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_a = \frac{V_1 - V_0}{h}, \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_c = \frac{V_0 - V_3}{h}$$

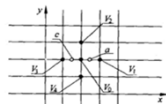


图 6-11 差分梯子的划分

求解

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{V_1 + V_3 - 2V_0}{h^2}$$

同理，

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{V_2 + V_4 - 2V_0}{h^2}$$

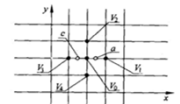


图 6-11 差分梯子的划分

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

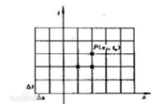
综上， $V_0 = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$

在微小正方形区域的划分下，一点的电势是周围四点上电势的平均值，区域各点的电势依次联系起来。

迭代法计算

```

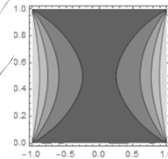
V0=1.0;b=1;a=1;
h=2*10^-2;m=b/n;n=a/h;
V=Table[V0,{2m+1},{n+1}];
Do[V[[1,j]]=V[[2m+1,j]]=V0,{j,n+1}];
Do[V[[i,1]]=V[[i,n+1]]=0,{i,2m+1}];
temp=V;
Do[
Do[temp[[i,j]]=(V[[i+1,j]]+V[[i-1,j]]+V[[i,j+1]]+V[[i,j-1]])/4,{i,2,2m}];
V=temp;{p,2500}
]
temp=[];
Do[
x=[i-m-1]*hy+[j-1]*h;
AppendTo[temp,{x,y,V[[i,j]]},{i,2m+1},{j,n+1}];
]
V=Interpolation[temp];
ContourPlot[V[x,y],{x,-m*h,m*h},{y,0,n*h}];
Plot3D[V[x,y],{x,-1,1},{y,0,1},PlotTheme->'Detailed'];
Clear[V0,b,a,h,m,n,V,temp,x,y,z];
    
```



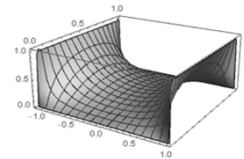
有限差分法

利用该方法，假设这样一个问题，一个无限长矩形管，长为2，宽为1，上下面电势为V0，左右表面电势为零，下面求解管内的电场分布

二维等势图



三维电势图



载流线圈的模拟

由Biot-Savart定律:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \times d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^2}$$

■ 各分量积分形式(忽略系数)


$$B_x = \int_0^{2\pi} \frac{z \cos(\varphi)}{(z^2 + (x - R \cos(\varphi))^2 + (y - R \sin(\varphi))^2)^{3/2}} d\varphi$$

$$B_y = \int_0^{2\pi} \frac{z \sin(\varphi)}{(z^2 + (x - R \cos(\varphi))^2 + (y - R \sin(\varphi))^2)^{3/2}} d\varphi$$

$$B_z = \int_0^{2\pi} \frac{R - x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi)}{(z^2 + (x - R \cos(\varphi))^2 + (y - R \sin(\varphi))^2)^{3/2}} d\varphi$$

利用mma的符号计算求解解析?

X分量计算了接近一小时后没有结果。。




采用数值积分

```

In[ ] := Integrate[z Cos[phi] / (z^2 + x^2 + y^2 + R^2 - 2 * x * Cos[phi] - 2 * y * Sin[phi])^(3/2), {phi, 0, 2Pi}, AccuracyGoal -> 6, MaxRecursion -> 12];
Out[ ] := Integrate[z Sin[phi] / (z^2 + x^2 + y^2 + R^2 - 2 * x * Cos[phi] - 2 * y * Sin[phi])^(3/2), {phi, 0, 2Pi}, AccuracyGoal -> 6, MaxRecursion -> 12];
In[ ] := Integrate[R - x Cos[phi] - y Sin[phi] / (z^2 + x^2 + y^2 + R^2 - 2 * x * Cos[phi] - 2 * y * Sin[phi])^(3/2), {phi, 0, 2Pi}, AccuracyGoal -> 6, MaxRecursion -> 12];
    
```

然而这并不能改变每张图的绘制需要半小时以上, 怎样改进?



储存插值函数

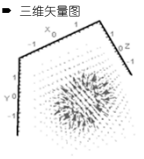
```

R = 1; n = 60; d = 2;
data = {};
Do[
  AppendTo[data, {R1/n, R2/n, 4d/n, R1/n, R2/n, 4d/n}], {i, -n/2, n/2}], {j, -n/2, n/2}], {k, -n/2, n/2}];
InterpolationFunction[
  InterpolatingFunction[
    Domain[{-4.5, 4.5}, {-4.5, 4.5}, {-4, 4}]
    Output scalar
  ]
]
    
```

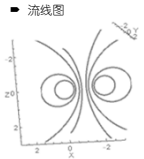
在指定的求解区间取足够多的点, 数值积分求出数值后利用插值函数得到磁场分量的近似函数具体地, 我们取半径R为1, $(\mu_0)/(4\pi)$ 为 $1 \cdot 10^{-7}$, 在求解空间为 $9 \cdot 9 \cdot 8$ 的长方体, 取216000个离散点。

载流线圈可视化结果

■ 三维矢量图



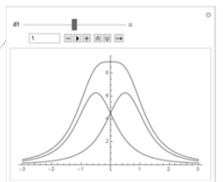
■ 流线图



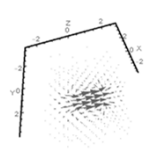
两个载流线圈?

考虑平行放置的两个载流线圈, 它们中心连线方向的磁场与两者间距有关, 我们画出Z轴磁场强度图, 可以编程验证, 当距离等于R时, 中心磁场最强, 也最平缓。

■ 轴向磁场强度



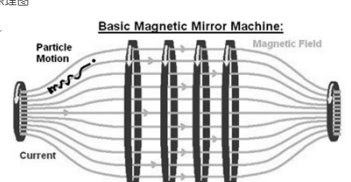
■ 亥姆霍兹线圈



磁镜装置

将两载流线圈间距设为3R, 形成中间弱两端强的特殊磁场位形, 构成简单的磁镜装置。磁镜装置是一种约束高温等离子体的磁约束装置。

■ 原理图

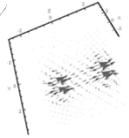


Basic Magnetic Mirror Machine:
Particle Motion, Magnetic Field, Current

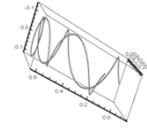
磁镜装置

根据绝热不变量，设置合适的位置及速度初始值，当电子由弱场进入强场区域，会受到反向作用力，使电子速度减慢，轨道半径缩短，然后z轴速度为零，并开始反向运动，从而电子就像在两个镜子之间来回反射。

磁场矢量图



电子运动轨迹图



电子运动轨迹

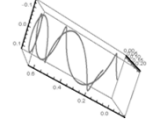
- 设置带电粒子的初始位置和初速度，数值求解轨迹方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = q \left(\frac{dy}{dt} B_z - \frac{dz}{dt} B_y \right)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = q \left(\frac{dz}{dt} B_x - \frac{dx}{dt} B_z \right)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = q \left(\frac{dx}{dt} B_y - \frac{dy}{dt} B_x \right)$$

电子运动轨迹图



```
equation =
{
x''[t] == -em (y'[t] * Bzt[x[t], y[t], z[t]] - z'[t] * Byt[x[t], y[t], z[t]]),
y''[t] == -em (z'[t] * Bxt[x[t], y[t], z[t]] - x'[t] * Bzt[x[t], y[t], z[t]]),
z''[t] == -em (x'[t] * Byt[x[t], y[t], z[t]] - y'[t] * Bxt[x[t], y[t], z[t]]),
x[0] == 0, y[0] == 0, z[0] == 0, x'[0] == vx, y'[0] == 0, z'[0] == vz;
solution = NDSolve[equation, {x, y, z}, {t, 0, times * tm}];
```

数值求解微分方程组

验证绝热不变量

- 在等离子物理中有带电粒子的运动有三种绝热不变量：

$$\mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2B}$$

- 旋转粒子的磁矩。当粒子经历较为缓慢的变化时，磁矩守恒。发生磁抽运或回旋加热时，守恒将被破坏。

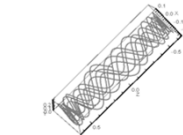
$$J = \int_a^b V_z ds$$

- 磁镜中粒子的纵向不变量。它在数值上等于两个回转折点之间速度在磁场矢量方向分量的积分。绝热条件在发生磁抽运时被破坏，即当磁镜的长度以一定频率震荡。

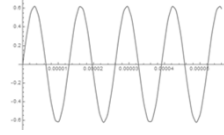
- Φ
由粒子飘移围成的面的磁通量。
因为飘逸速度相对缓慢，该不变量在现实模型中往往不能被观察到（因此我们不对其进行验证）。

验证磁矩守恒

- 我们使时间延长，并以此验证绝热不变量的守恒。



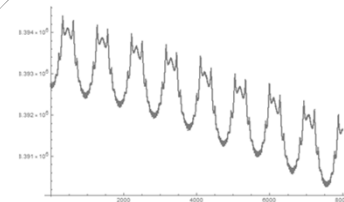
轨迹示意图



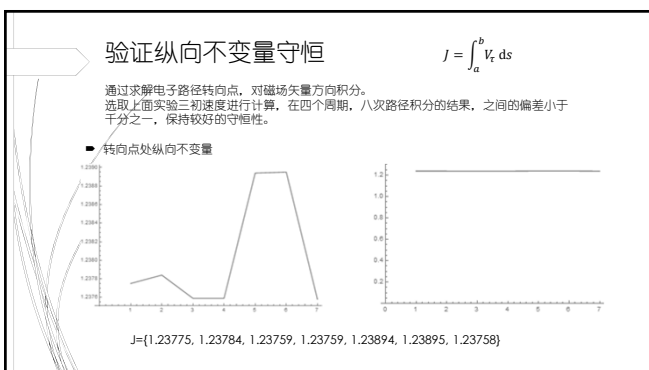
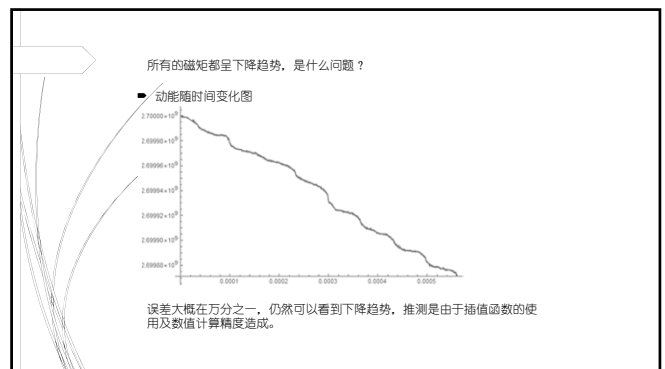
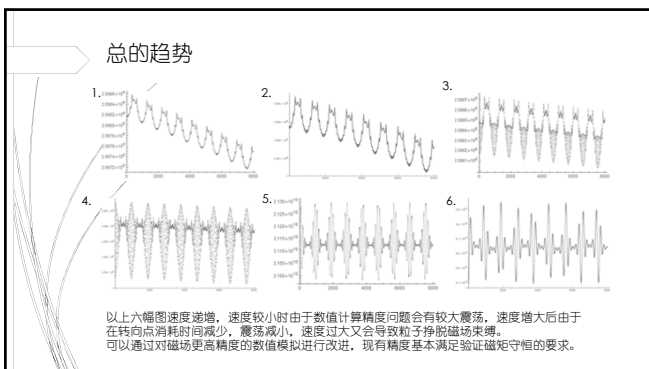
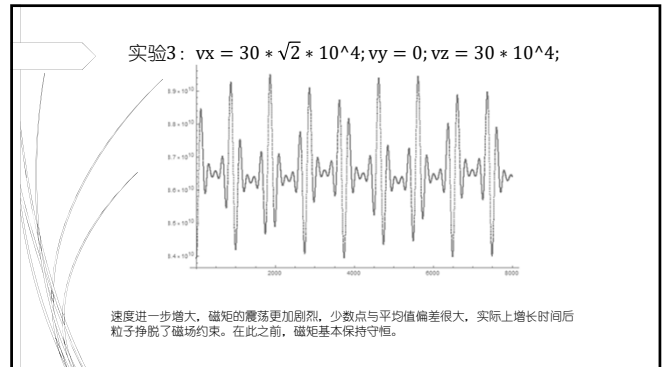
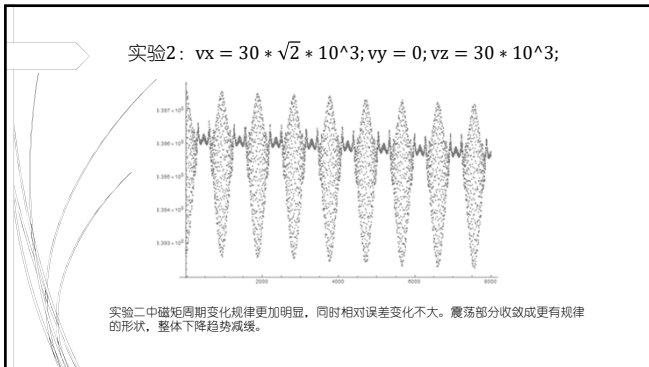
轴向位移图

下面每组实验中取不同的初始速度，并随之改变总时间，保证在回转折点进行四个周期的运动，以随时间分布的8000个离散点显示磁矩的变化。

实验1: $v_x = 30 * \sqrt{2} * 10^2; v_y = 0; v_z = 30 * 10^2;$



磁矩呈周期下降趋势，有扰动，但是对比坐标，相对改变小于千分之一。磁矩周期变化频率基本与z轴方向位移变化吻合，考虑到转向点除现有精度可能不足，属于数值运算的正常误差。



Q&A