

探究带电体在 偶极子场中的运动

作者:陈鲁同

时间:2017年6月21日

目录

Part 1:背景介绍

Part 2:模型建立

part 3:结果分析

Part 4:更多思考

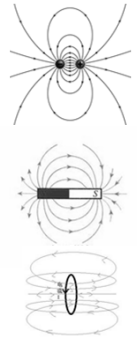
Part 1:背景介绍

Part 1:背景介绍

1、复杂的带电体系的电场、电荷分布往往不容易求解。人们往往采用电偶极子、电四极子，甚至电多极子叠加的方法给出结论。因此分析这些模型的相关物理性质是有必要的。

2、在分析永磁体、环形电流产生磁场或其他磁体问题时，采用磁荷的观点有时非常方便。而磁偶极子和电偶极子的物理规律有着高度的对称性。

3、解决复杂的实际问题时，计算机进行数值计算是十分方便、快捷的。



Part 2:模型建立

Part 2:模型建立

首先考察电偶极子在空间中产生的电场强度矢量为：

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{r}_+}{4\pi\epsilon_0 r_+^3} - \frac{Q\vec{r}_-}{4\pi\epsilon_0 r_-^3}$$

在满足远场条件，利用泰勒展开到二阶小量，化简后可以得到：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

其中，电偶极矩满足 $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$ 。然而实际计算的时候，由于使用正交直角坐标系方便，运动时远场条件可能不能够满足，所以仍然使用未近似的式子进行计算！

对于磁荷而言，仍然具有高度的对称性，例如磁荷的库仑定律：

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{q_{m1}q_{m2}}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$$

Part 2: 模型建立

由上式可以看书磁场与电场的形式应当相似。查阅有关资料可知，磁偶极子产生的磁场：

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

更精细的计算会使得磁偶极子中心产生奇点 $\delta(x)$ 。当运动物体不经过坐标原点时候，不考虑其影响。

两个电偶极子之间的受力。可以给出电偶极子在外电场中具有的能量：

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

。在本例中为另一个电偶极子在该电处产生电场强度因此，利用虚位移原理可以给出库仑力：

$$\vec{F} = -\nabla W$$

Part 2: 模型建立

下面考虑利用计算机进行数值计算的具体方法，主要思路是：计算机利用较短时间的差分计算代替微积分的运算。

不考虑其他外力作用，受力物体在t时刻收到的力F(x)是只与位置有关的函数，因此其加速度a(x, y, z)也是与位置唯一相关的函数。此时可以计算其速度：

$$\vec{v}_{t+\Delta t} = \vec{v}_t + \vec{a} \cdot \Delta t$$

其中 Δt 是迭代计算的时间小量。同理可以给出位移的迭代公式：

$$\vec{R}_{t+\Delta t} = \vec{R}_t + \vec{v} \cdot \Delta t$$

循环多次就可以描绘出运动的近似图像。然而，当运动物体靠近偶极子的时候，电场强度或磁感应强度将会发散，导致模型失效。此时可以通过设置更小的 Δt 。

Part 3: 结果分析

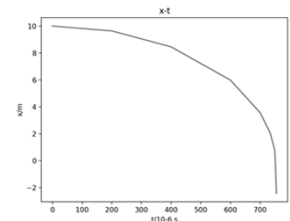
Part 3: 结果分析

Case 1: 在电偶极子连线上

假设电偶极子带电10库仑，相距0.1m。带电粒子重1kg，带电-1c，在连线10m处收到电场作用力开始运动。计算机计算出部分数据如下：

表1

t/10 ⁻⁶ s	x/m
0	10.000000
200	9.639617
400	8.455759
600	5.984192
700	3.569025
734	2.056536
748	0.902106
750	0.624001
755	-2.437460



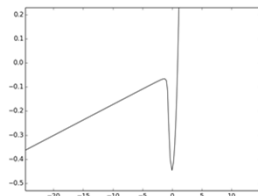
带电体向电偶极子方向做加速运动，模型与经验一致。在0.755ms左右靠近奇点，此后模型失效。

Case 2: 在空间任意一点

带电体在空间坐标(2, 0)处，禁止开始运动，计算机绘制出的运动轨迹如下：

表2

t/10 ⁻⁶ s	x/m	y/m
0	2.000000	2.000000
10	1.992841	1.978524
50	1.702013	1.213463
71	0.932578	0.015927
75	0.428665	-0.338675
77	-0.032964	-0.446944
84	-1.794058	-0.069101
95	-5.267854	-0.112100
100	-6.867993	-0.132635
110	-	-0.173854



带电体受到两个电荷作用，计算机可以模拟较为复杂的运动状态。

Part 3: 结果分析

Case 3: 两个电偶极子之间的相互作用

运动电偶极子与静止电偶极子朝向相同，相距2m， $p=0.1 \text{ C} \cdot \text{M}$ 。质量为1km，下面给出了部分结果：

表3

t/10 ⁻⁶ s	x/m
0	2.000000
10	1.988951
20	1.947005
30	1.871530
40	1.757403
50	1.594542
60	1.361620
70	1.000690
80	0.123740
81	-0.159820

Part 3: 结果分析

Case 3: 两个电偶极子之间的相互作用

结论:

- 1、运动电偶极子由静止开始不断加速，开始时电磁作用力极小，在1m左右时，作用力变大。在80微秒左右两个电偶极子碰撞。
- 2、81微秒之后，两个电偶极子的正负电荷之间距离很小，所受电场力发散，点电荷模型模型失效。之后给出的计算结果不再有意义。
- 3、这个模型也可以近似展示两个条形永磁铁或线圈之间的相互作用。

Part 4: 更多思考

Part 4: 更多思考

- 1、利用模型计算物理量，如计算复杂电荷分布时的电场、磁场、能量等其他物理量。
- 2、由于电磁的对称性，该模型也可以近似解决其他问题，比如线圈相互作用、磁铁间相互作用等。
- 3、也可以采用如下方式计算运动量：设定一个固定的 Δx 值。运动物体位移 Δx 后，就重新计算电磁力。而后迭代出速度的瞬时值。继而利用速度计算出 $\Delta t = \Delta x / v$ 。最终将 Δt 累加。
- 2、点电荷模型具有局限性。当电荷互相接近时。该方法计算可能会有模型失效的危险。

Thank you for listening!