



## 基于经典实验数据估测光子静止质量

“我好像是一个在海边玩耍的孩子，不时为拾到比通常更光滑的石子或更美丽的贝壳而欢欣鼓舞，而展现在我面前的是完全未探明的真理之海。”

俞颀颀  
张劭  
2018/7/2

中国科学技术大学

## CONTENTS 目录



- 1 背景概要
- 2 proca方程的导出
- 3 光子静止质量上限的估测
- 4 新的实验展望

中国科学技术大学

2



**PART ONE**

# 1.背景概要

“We are looking for a massive photon”  
-----physics professor Richard Milner from MIT

大学 3



1、这是对观测上限的挑战

2、这是对经典理论的严苛检验

3、这是通向新理论的桥梁

“回到物理学的根基，一遍又一遍地检验，以至无穷”

中国科学技术大学 4



# PART TWO

## 2.proca方程的导出

2.1proca方程的一种导出方式

2.2proca方程的一些重要性质

5

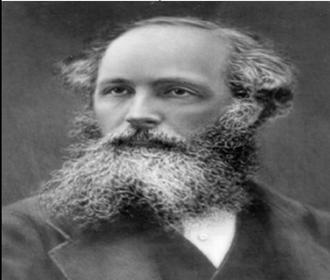


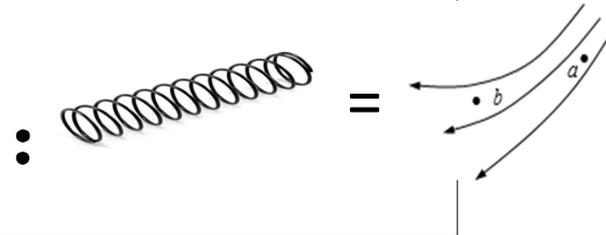
$\mu = \frac{m_\gamma c}{2\pi\hbar}$

## 1 方程的导出

Proca 方程的拉式量  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0}] - \rho\varphi + \vec{A} \cdot \vec{j} + \frac{1}{2}\epsilon_0\varphi^2 u^2 - \frac{u^2 A^2}{2\mu_0}$

其中  $\mu = \frac{m_\gamma c}{2\pi\hbar}$  我们知道, 谐振子的能量为  $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ , 同时在麦克斯韦的磁光理论中, 已经天才地建立起  $\vec{E}$  与  $\vec{v}$  的关系即  $\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$





考虑到  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  及  $\omega = \frac{E}{\hbar} = u_\gamma c$  我们便得到后两项

6

## 1 方程的导出



拉格朗日方程 
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_k} + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = 0$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - u^2 \varphi \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} - u^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

中国科学技术大学

7

## 2 方程的一些性质



- proca方程体系下Lorentz规范与电荷守恒定律等价，光子的偏振数仍为2。
- proca方程甚至比maxwell方程更为规范完善。
- proca方程与相对论兼容，两者并不矛盾。

中国科学技术大学

8

# PART THREE



## 3 对光子静止质量上限的估测

2.1 传统电磁学的估测方法

- 2.1.1 由真空色散效应测量  $m\gamma$  的上限
- 2.1.2 根据电力平方反比率测定
- 2.1.3 统计理论给出的质量下限

2.2 天体观测给出的质量下限

9

# 1

## 传统电磁学估测方法--真空色散



$$-\nabla^2 \vec{B} = -u^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -u^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

取平面波的解, 令  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - u^2$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$$

光的群速为  $v = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{u^2 c^2}{\omega^2}}$

光的相速为  $u = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2 c^2}{\omega^2}}}$

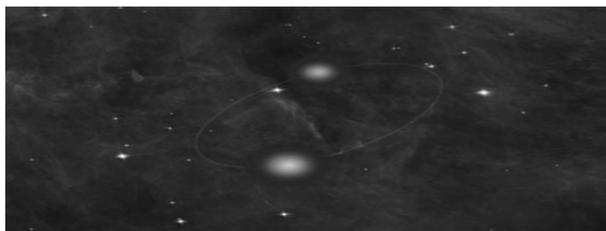
真空色散效应

$$\delta v = \frac{1}{2} u^2 c^2 \left( \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right)$$

中国科学技术大学

10

# 1 传统电磁学估测方法--真空色散



$$\delta t = \frac{L}{c} \frac{u^2}{8\pi^2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$$

可以通过双星掩食现象来确定光子静止质量的上限由光的食毕时间差，即不同频率的光经过相同路程的时间差，可以估算出光子的静止质量上限。

代入天文观测数据  $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 5.0 \times 10^{-13} m^2$  以及  $L \sim 10^3 l.y.$ , 我们估算出  $m_\gamma < 10^{-46} g$

中国科学技术大学

11

# 1 其它传统电磁学估测方法



根据电力平方反比率测定

在 proca 方程体系下，电荷之间的作用力加入了一项指数修正项，采用卡文迪许当年测定平方反比率的实验装置，得到  $m_\gamma < 10^{-50} g$

统计理论给出的质量上限

- 由 proca 方程引入，磁场压强将附加  $\frac{\mu^2 A^2}{2\mu_0}$  这暗示着磁场压强与气体压强大致相同。
- 星际磁场的磁感应强度可由 Zeeman 效应得出，根据具体的观测，磁静压强约和星际气体压强处于同一个数量级，得到  $m_\gamma < 10^{-66} g$ .

不足之处

- 所用方法明显过于粗糙，各种近似是否妥当还是有待商榷

12

## 2 天体观测给出的质量上限-光线偏折



13

## 2 天体观测给出的质量上限-光线偏折



在Schwarzschild时空下，度规张量

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2GM}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

光子在引力场中的拉式量

$$\mathcal{L} = g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

选取  $\theta = \pi/2$

$$\begin{cases} (1 - \frac{2GM}{r}) \frac{dt}{ds} = l_0 \\ r^2 \frac{d\phi}{ds} = l_1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$l_0$  是运动积分，取  $r \rightarrow \infty$   $l_0 = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \frac{u^2}{c^2})}} = \frac{\omega}{u}$  运动积分  $l_0$  表征了光子的静止质量

第四个运动积分  $g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j = 1$  带入得  $(\frac{dr}{ds})^2 = l_0^2 - (1 - \frac{2GM}{r})(1 + \frac{l_3^2}{r^2})$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \left(\frac{GM}{l_3}\right)^2 + 3u^2$$

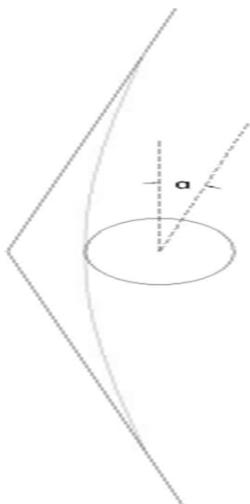
$$l_3 = r_0 \left[ l_0^2 \left(1 - \frac{2GM}{r_0}\right)^{(-1)} - 1 \right]^{(\frac{1}{2})}$$

14

## 2 天体观测给出的质量上限



取光被中心天体散射时，离其最近的距离为  $r_0$   $l_3 = r_0[l_0^2(1 - \frac{2GM}{r_0})^{(-1)} - 1]^{(\frac{1}{2})}$



采用弱场近似条件求解其一阶

$$l_3 \approx r_0(l_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$u^{(0)} = u_0 \cos(\theta)$$

$$u^{(1)} = u_0^2(1 + \sin^2(\theta)) + \frac{u_0^2}{l_0^2 - 1}$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{u_0^2}{l_0^2 - 1} + 3u_0 \cos^2(\theta)$$

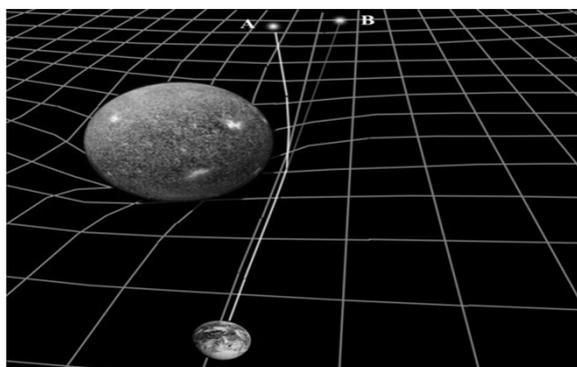
$$u = u_0 \cos(\theta) + u_0^2(1 + \sin^2(\theta)) + \frac{u_0^2}{l_0^2 - 1}$$

$$\Theta = \frac{4GM}{c^2 r_0} \left(1 + \frac{1}{2(\frac{\omega}{u_\gamma c})^2 - 1}\right)$$

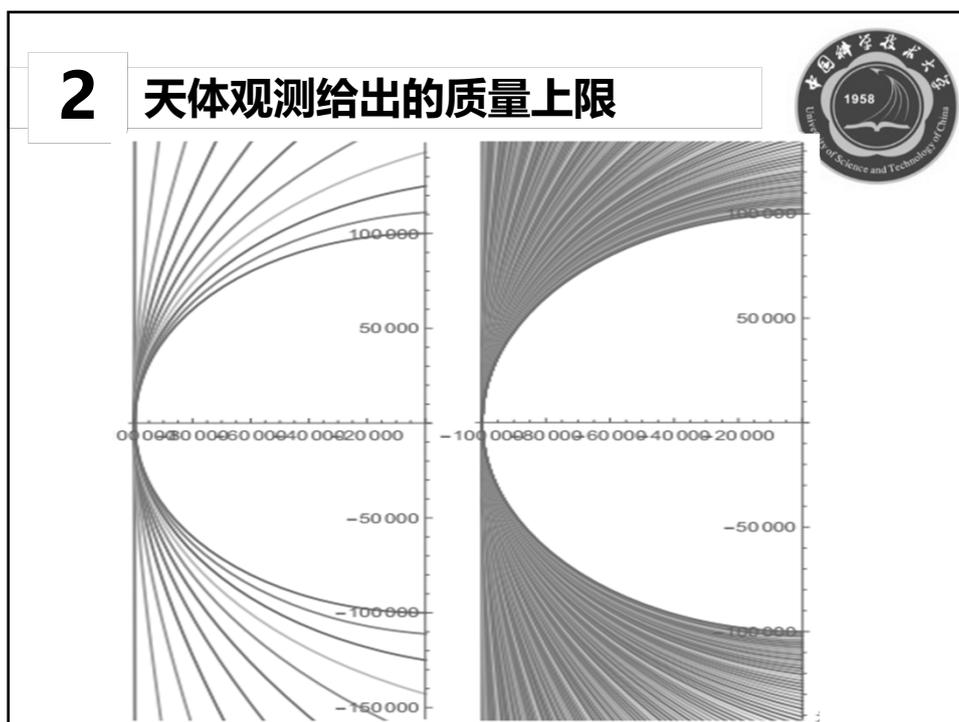
## 2 天体观测给出的质量上限



$$\Delta\theta = \theta_0 \frac{1}{2[(\frac{\omega}{u_\gamma c})^2 - 1]}$$



中国科学技术大学



## 2 天体观测给出的质量上限

观测仪器	频率	角分辨率
Very Long Baseline Antenna	1MHz	$(10^{-5})''$

我们采用艾丁顿当年的数据，可以得到光子静止质量上限为  $10^{-37}$  克，采用现在的观测数据，可以提升到  $10^{-50}$  克。



10<sup>-37</sup>

**中国科学技术大学**

- 光线被大质量星体（例如黑洞）所偏转的现象相当可观的，Maxwell 光线在黑洞引力场下可达到 1000rad 的偏转量，造成的 proca 光与 maxwell 的差距明显
- 实验条件：观测范围中发现符合条件的大质量星体（例如黑洞）以及被观测天体
- 在大质量星体即强引力场下的情况，弱场近似不再成立，须重新进行数值计算，而无法采用任何近似处理

## 2 天体观测给出的质量上限-引力红移



引力波的典型度规张量为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + h \cos[\omega_g(z-t)] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - h \cos[\omega_g(z-t)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{取 } l_\beta = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

经过一系列推导，可以得到

$$\Delta l_0 = \frac{h}{2} \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_0 + l_3} \cos \phi(\tau)|_0^\tau = \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_0 + l_3} \sin\left[\frac{\omega_g}{2}(t_0 + t)\right] \sin[\omega_g t_0 - \frac{\omega_g}{2}(t_0 + t)]$$

中国科学技术大学

## 2 天体观测给出的质量上限-引力红移



下面分别讨论 Maxwell 光和 proca 光的性质

Maxwell 光

$$\frac{\Delta l_0}{l_0} = h \cos(2\theta) \sin\left[\frac{\omega_g}{2} r\right] \sin[\omega_g t_0 - \frac{\omega_g}{2} r]$$

proca 光

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\Delta l_0}{l_0} = h \frac{l_0^2 - 1}{l_0^2} \cos(2\theta) \sin\left[\frac{\omega_g}{2} \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 - 1}} r\right] \sin\left[\omega_g t_0 - \frac{\omega_g}{2} \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 - 1}}\right]$$

我们将上式与 Maxwell 光的情况作对比，可以得到 proca 光与 Maxwell 光的差值为：

$$\Delta \left| \frac{\Delta \omega}{\omega} \right| = h \left( \frac{u_\gamma c}{\omega} \right)^2$$

中国科学技术大学

## 2 天体观测给出的质量上限-回波效应



采用雷达回波延迟效应设计检验光子静止质量上限的实验

度规张量

$$g \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2GM}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{2GM}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{2GM}{r} \end{pmatrix}$$

Maxwell光

$$\frac{dt}{dx} \approx 1 + \frac{2GM}{r}$$

光线的传播时间为

$$\Delta t = 2 \frac{x_B^1 - x_A^1}{c} + \frac{4GM}{c^3} \ln\left(\frac{4r_A r_B}{b^2}\right)$$

proca 体系下的 shapiro time delay

$$\Delta t = 2\left(1 - \frac{1}{\beta_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{x_B^1 - x_A^1}{c} + \frac{2GM}{c^3} \frac{2 - \frac{3}{\beta_0^2}}{\left(1 - \frac{1}{\beta_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \ln\left(\frac{4r_A r_B}{b^2}\right)$$

中国科学技术大学

## 2 天体观测给出的质量上限-回波延迟



A

天体	距离	频率	时间分辨率
地球到火星	2.5 A.U.	1MHz	纳秒



$$m_\gamma < 10^{-55} g$$

这已经是相当高精度的观测了，但离我们的目标仍然还有距离。

B

中国科学技术大学



## PART FOUR

# 3. 新的理论展望

23

## 3 新的实验展望



Maxwell 方程体系下的光子与光子并无相互作用，这是由于光子为玻色子导致的。引入光子静止质量后，光子将不再是玻色子，两个光子会存在相互作用。

**通过两束激光器对打，探测光子的散射分布，由此给出光子静止质量的下限**

相互作用的有效作用范围  $u^{-1}$       $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \exp(-ur)$

对于钢球模型，散射截面  $d\sigma_1 = a^2 |\cos\theta_1| d\omega_1$

每秒被散射的光子数约  $(\frac{P}{h\omega})^2 \frac{a^2}{W_0^2}$



设计十天的实验，确定光子 Compton 波长的下限为  $u_\gamma > 10^{14} \text{cm}^{-1}$

代入  $u_\gamma = \frac{m_\gamma c}{\hbar}$  可以得到  $m_\omega$  的下限为  $m_\gamma > 10^{-31} \text{g}$

结合先前得到的关于  $m_\gamma$  上限的估计，可彻底解决光子是否有静止质量问题

24



# PART FIVE

## 5. 总结、展望与致谢

5.1 总结

5.2 展望与致谢

5.3 参考文献

25



# 5

## 总结

- 首先从拉式量出发导出了 **proca** 方程并讨论了它的电磁学性质
  - ① **proca** 方程与相对论是兼容的,
  - ② **proca** 方程自身就蕴含了 Lorentz 规范条件
- 采用各种实验方法对光子静止质量的上界做出估算包括
  - ① 经典电磁学与统计力学的方法
  - ② 将 **proca** 方程与相对论的三大预言相结合

目前来看，通过天文观测的方法给出的上界最精确，将光子放在宇宙空间的背景下测量其质量上界可能是将来这一研究的主要方向与突破口。
- 提出一个设想将 **proca** 光子与量子论结合起来设计实验测量其质量下限从而彻底解决这一问题

**中国科学技术大学** 26

## 5 展望与致谢



### 接下来的研究方向与致谢

- ① 数值解 proca 方程在强引力场下的轨迹，并与 Maxwell 光作对比，得出强引力天体造成的偏折角的变化，从而更精确的测定光子的静止质量。
- ② 利用量子场论的知识精确计算出两个光子之间的相互作用，从而算出其散射角，用我们论述的最后一个实验方案确定光子的质量下限，从而达到彻底解决这一问题的目的。

在此特别感谢张劭同学在本文写作的过程中给予的帮助和鼓励，进行了方案构思与理论构想。感谢邹长铃老师提供的关于两束激光对撞的想法，感谢叶邦角老师的思路引导

中国科学技术大学

27

## 5 参考文献



- 1、 Advances in High Energy Physics Volume,2013,Article ID 967805,"closing a Window for Massive Photons",by Sergio A. Hojman and Benjamin Koch
- 2、 Theoretical Concepts in Physics
- 3、 电磁学专题研究
- 4、 弯曲时空中 Proca 光子的静质量效应
- 5、 不同时空度规下的 Proca 效应
- 6、 Weak field tests of GR:the gravitational redshift,deflection of the light, and Shapiro delay. Caltech M/C 350-17, Christopher M. Hirata

中国科学技术大学

28

THANKS

请老师批评指导