

孤立导体表面电荷与曲率的关系

指导老师
邓友金 潘海俊

报告人
何姍美

目录

CONTENT

椭球

PART ONE

圆锥

PART TWO

一般柱体

PART THREE

致谢

PART FOUR

参考文献

PART FIVE

椭球

PART ONE

PART ONE 椭球 ○

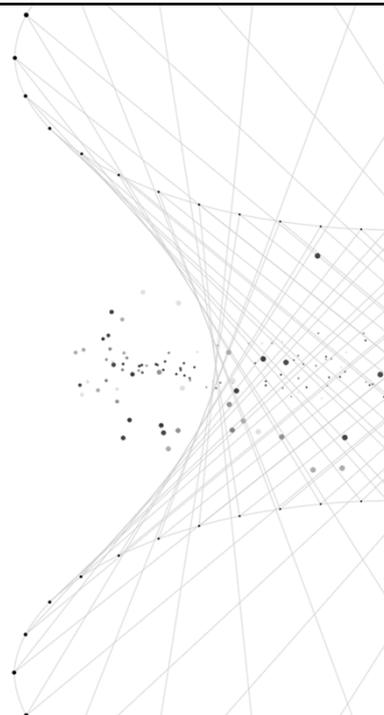
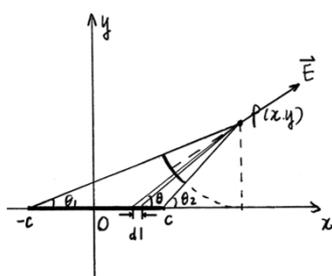
1、线电荷等效

对于在线段上均匀分布的线电荷系统来说，它的等势面是一个椭球。

这让我们想到，可以通过线电荷等效来研究椭球的电荷分布问题。

考虑这样一个系统：

在 x 轴上放置长为 $2c$ 的线电荷，设线电荷密度为 λ 。该线电荷在平面上任意一点 P 产生的电场与以 P 为圆心， y 为半径的圆弧所产生的电场相同。



PART ONE 椭球

对任意微元有

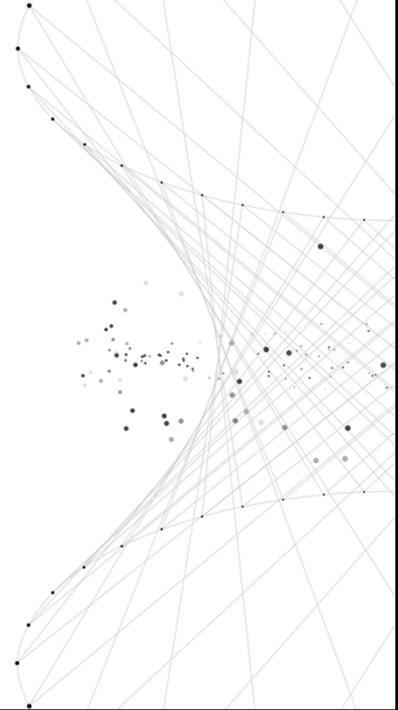
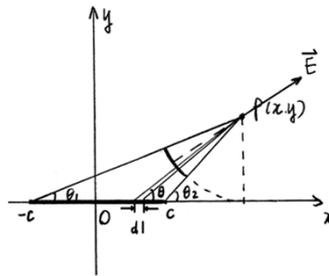
$$dl = ycsc^2\theta d\theta$$

$$\frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)^2} = \frac{\lambda ycsc^2\theta d\theta}{4\pi\epsilon\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)^2} = \frac{\lambda y d\theta}{4\pi\epsilon y^2}$$

证得，线段上一个小微元产生的电场与圆弧上小微元产生的电场相等

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon y} \int_{\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}^{\frac{\theta_2+\theta_1}{2}} \cos\phi d\phi$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon y} \sqrt{2(1 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 - \cos\theta_1 \cos\theta_2)}$$



可见平面上任意一点的电场方向沿角P平分线，又因为电场线与等势面垂直，可知线电荷的等势面为椭圆形，且椭圆的焦点位于 $(-c, 0)$ 和 $(c, 0)$ 。该性质拓展到空间依然成立，即线电荷的等势面为椭球形。

PART ONE 椭球

下面用线电荷等效出椭圆 $(b = c)$ 空间外电场，从而求出椭球的电荷分布。

$$\cos\theta_1 = \frac{x+c}{\sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}} \quad \cos\theta_2 = \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}} \quad \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon y} \sqrt{2\left(1 - \frac{x^2+y^2+z^2-c^2}{\sqrt{[(x^2+c^2)^2+y^2+z^2][(x^2-c^2)^2+y^2+z^2]}}\right)}$$

将以下三条式子代入 E 的表达式

$$x = a\cos\theta$$

$$\sqrt{y^2+z^2} = b\sin\theta$$

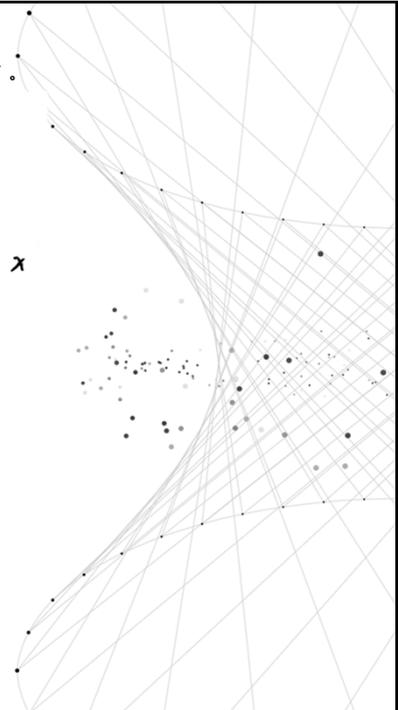
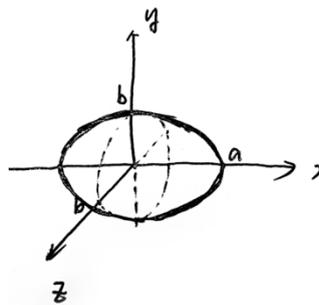
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon b\sin\theta} \sqrt{2\left(1 - \frac{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + a^2 - b^2}{\sqrt{[(a^2\cos^2\theta + a^2 - b^2)^2 + b^2\sin^2\theta][(a^2\cos^2\theta - a^2 + b^2)^2 + b^2\sin^2\theta]}}\right)}$$

$$= \frac{\lambda\sqrt{a^2-b^2}}{2\pi\epsilon b} \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$$

椭球的总电量： $Q = 2c\lambda$

$$\text{椭球的面电荷分布为：} \sigma = \frac{Q}{4\pi ab^2} \sqrt{\frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2+z^2}{b^4}}}$$

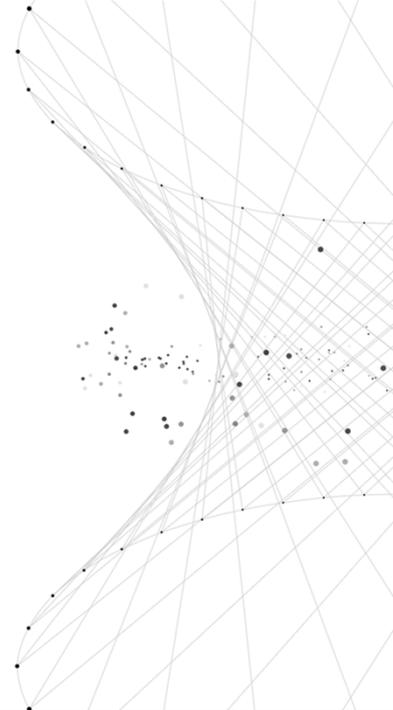


PART ONE 椭球 ○

由旋转椭球 ($b = c$) 的可推测普通椭球的面电荷分布为：

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi ab^2} \sqrt{\frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

该等效方法更为简单，但只能解决旋转椭球的面电荷分布，对于普通椭球只能猜测出它的面电荷的分布。



PART ONE 椭球 ○

2、正交曲线坐标系的求解：

与导体椭球面共焦的二次曲面为：

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

对于一组给定的 x, y, z ，关于 λ 的方程有 3 个实根，分别设为：

$$\lambda_1 = \xi \quad \lambda_2 = \eta \quad \lambda_3 = \zeta$$

用 ξ, η, ζ 表示 x, y, z 如下：

$$x = \pm \sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}} \quad y = \pm \sqrt{\frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b)}} \quad z = \pm \sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}$$

可将拉普拉斯方程化简为：

$$\frac{d}{d\xi} \left(R_\xi \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = 0$$

解得电势和面电荷分布：

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\epsilon} \int_\xi^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2)(\xi + b^2)(\xi + c^2)}$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi\sqrt{\eta\xi}} = \frac{Q}{4\pi abc} \sqrt{\frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$



PART ONE 椭球 ○

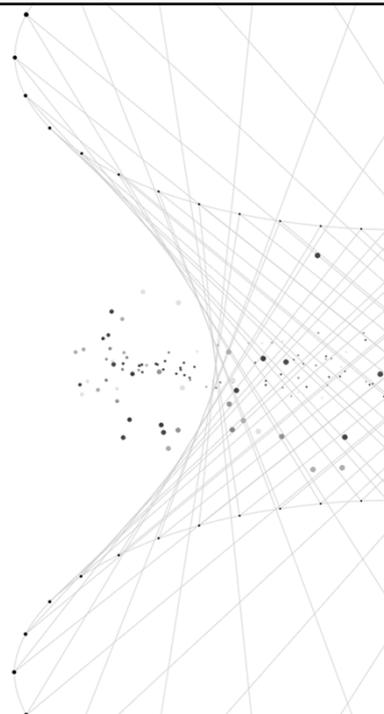
这里我们用高斯曲率来描述椭球表面的曲率（原因在后面给出分析），椭球的高斯曲率计算较为复杂，这里直接引用张金钟计算出来的结论：

$$K = \frac{1}{a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)}$$

可求得椭球表面电荷量与曲率的关系：

$$\sigma = \left(\frac{Q}{4\pi\sqrt{abc}} \right) K^{\frac{1}{4}}$$

笔者探索表面电荷量与曲率的关系的灵感来自于椭球这一模型，椭球模型的面电荷密度与曲率有非常好看的关系。



PART TWO 圆锥 ○

1、圆锥与平板组成的系统：

该空间中有两块无限大金属板，圆锥形金属板半张角为 α ，位于 xy 平面上的金属板电势为 0，锥形金属板电势为 V 。

因为给定的边界条件与 r 和 φ 无关，可设：

$$\varphi = \varphi(\theta)$$

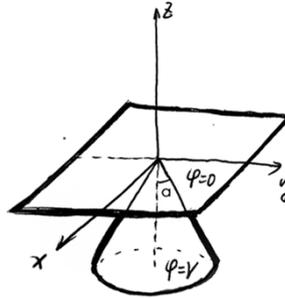
代入拉普拉斯方程可得：

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = 0$$

解得：

$$\varphi = A \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| \quad (A \text{ 为常数})$$

$$\sigma = \frac{\epsilon A}{r \sin\alpha}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi - \alpha$$



PART TWO 圆锥 ○

下面求解圆锥的两个主曲率：

显然，其中一个主曲率为 0。

$$k_1 = 0$$

另一个主曲率的求解过程为：

$$x = (h-z) \tan\alpha \cos\theta$$

$$y = (h-z) \tan\alpha \sin\theta$$

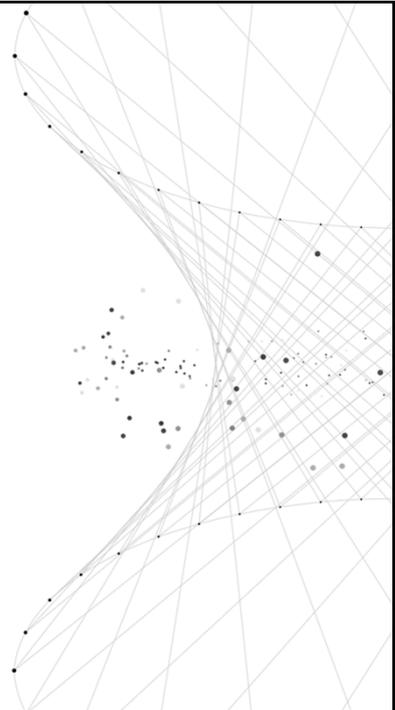
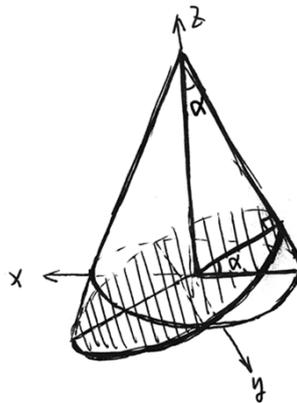
$$x = r \cos\alpha$$

$$z = r \sin\alpha$$

$$a = \frac{h \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$$

$$b = \frac{h(\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) \tan \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$$

$$k_2 = \frac{a}{b^2} = \frac{f(\alpha)}{h}$$



求解面电荷和主曲率统一同一物理量的表示字母后可得：

$$\sigma = \frac{A}{r \sin\alpha} \quad k_2 = \frac{f(\alpha)}{r}$$

面电荷与主曲率关系：

$$\sigma \propto k_2$$

PART TWO 圆锥 ○

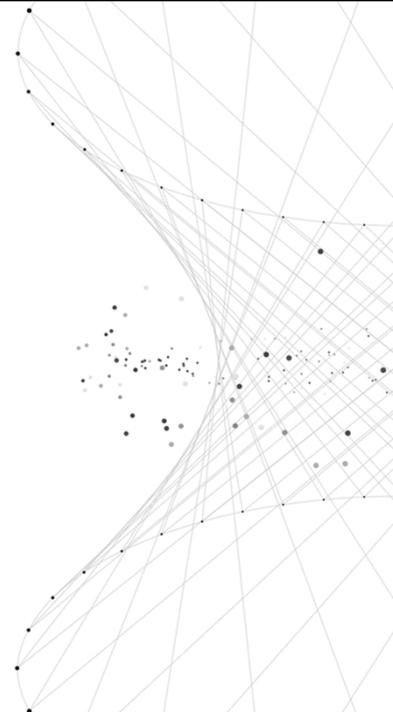
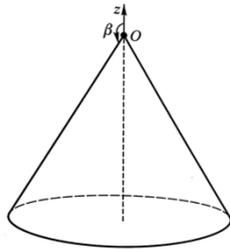
2、一般圆锥：

下面我们去掉 xoy 平面的导体板，试图求得更精确的解：
这个系统的拉普拉斯方程可以化为以下形式，得到对应的解为：

$$V(r, \theta) = R(r)P(\theta)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = v(v+1)$$

$$V(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^{\nu_k} P_{\nu_k}(\cos \theta)$$



PART TWO 圆锥 ○

$$r = 0 \text{ 附近 } V(r, \theta) = Ar^{\nu} P_{\nu}(\cos \theta)$$

$$E_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = Ar^{\nu-1} \sin \theta P'_{\nu}(\cos \theta)$$

$$P_{\nu}(\cos \theta) = K[1 + f(\theta)] \quad f(\theta) \ll 1 \quad \nu \ll 1$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dK[1 + f(\theta)]}{d\theta} \right) + v(v+1)K[1 + f(\theta)] = 0$$

$$f(\theta) = v \left[\ln 2 + \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) + \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \right] + C_1 \left[\ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) - \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \right] + C_2$$

$$f(\theta) \ll 1 \Rightarrow C_1 = -v, C_2 = -v \ln 2$$

$$f(\theta) = 2v \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)$$

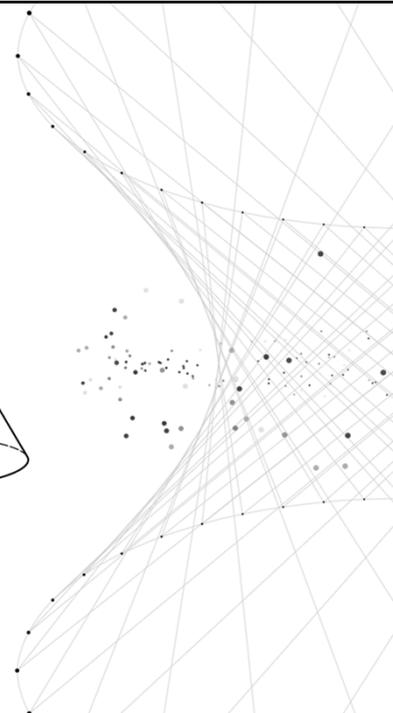
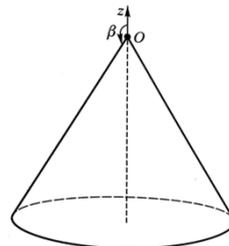
$$V(r, \theta) = Ar^{\nu} \left[1 + 2v \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$\forall r \in (0, +\infty) \quad r^{\nu} \left[1 + 2v \ln \left(\cos \frac{\beta}{2} \right) \right] = 0$$

$$v = -\frac{1}{2 \ln \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)} \quad \beta \rightarrow \pi, v \rightarrow 0$$

$$E_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} = Avr^{\nu-1} \tan \frac{\theta}{2} \vec{e}_{\theta}$$

$$\sigma = \epsilon Avr^{\nu-1} \tan \frac{\beta}{2}$$



PART TWO 圆锥 ○

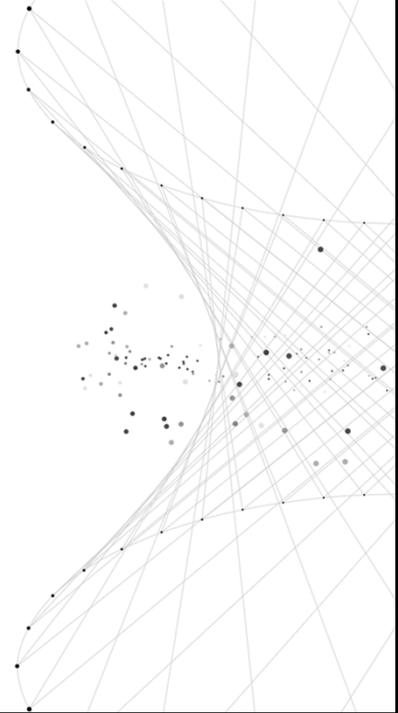
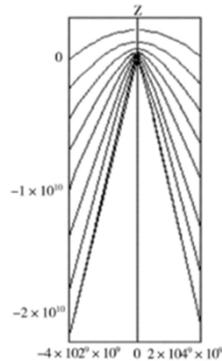
最终求得电势为：

$$V(r, \theta) = Ar^{\nu} \left[1 + 2\nu \ln \left(\cos \frac{\beta}{2} \right) \right]$$

等势线为：

$$e^{\frac{c}{2\nu Ar^{\nu}}} - \cos \frac{\beta}{2} = e^{\frac{1}{2\nu}}$$

对应的等势线图示为：



PART TWO 圆锥 ○

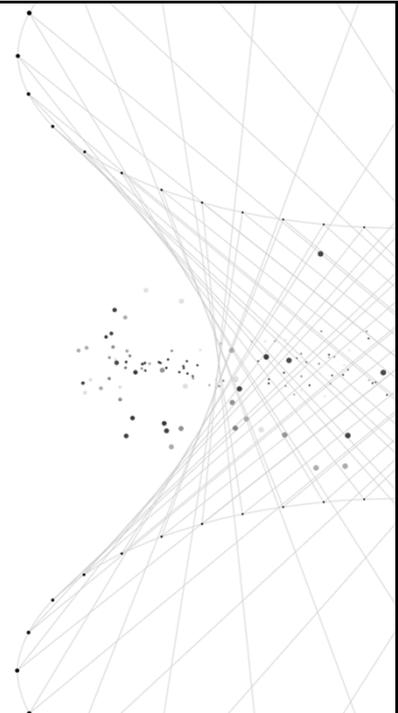
3、讨论：

由上述求解，我们可以得到尖端电荷大量聚集的结论。

对于尖端，面电荷与曲率有关系： $\sigma \propto k^{1-\nu} r \rightarrow 0$ 。

但该关系只在尖端处成立。对于不逼近尖端的位置，面电荷与曲率无简单的正比关系，由此可见，三维情形是非常复杂的。连圆锥这么基本的几何形状，面电荷与曲率的关系处处都不同，且无简单解析的比例关系。

首先，对于任意形状的孤立带电导体，绝对不存在曲率和表面电荷面密度的函数关系。因为曲率是局部概念，而电荷面密度是整体概念，改变其他部分的几何形状，会影响该处的面电荷分布。



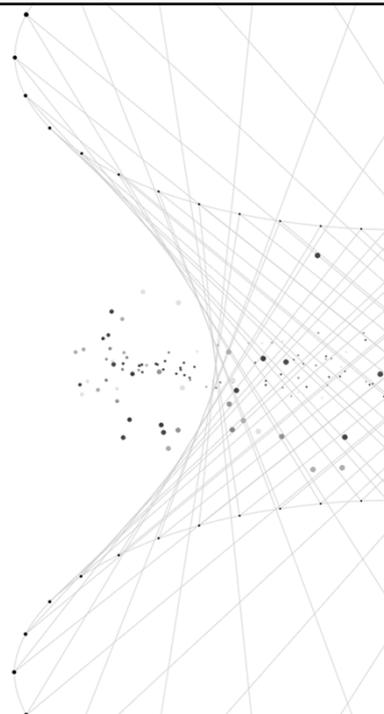
PART TWO 圆锥 ○

开始的时候，笔者试图找出具有一定对称性导体的曲率和表面电荷面密度的函数关系，但三维情况太过复杂，笔者认为难以找到解析的答案，理由如下：

1. 对很多规则几何体，电荷分布没有解析的结果；

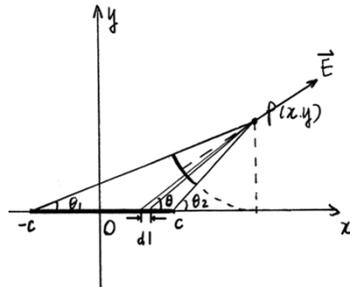
2. 空间曲面的各个方向曲率不相同，很难用一个标量（如高斯曲率或者平均曲率）完美地描述出该处的几何特性。如椭球的曲率用高斯曲率表示可与面电荷联系，但对于圆锥来说，其中一个主曲率为0，导致高斯曲率为0，只能用平均曲率，或直接用 k^2 描述其面的弯曲程度。综上，找出对称性导体的曲面和面电荷密度的函数关系也难以实现。

不过对于三维空间的尖端电荷分布情况，在尖端足够尖的情况下，最后那个例子的近似总是成立的，可以给出尖端电荷无限集中的结论。

**一般柱体
PART THREE**

PART THREE 一般柱体

1、椭圆柱：



椭圆的曲率：

$$K = \frac{x\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$K = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}$$

得：

$$\sigma \propto K^{-1/3}$$

由前面推导可知椭圆柱的面电荷分布应有如下形式：

$$\sigma = k \sqrt{\frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

PART THREE 一般柱体

2、一般柱体求解方法：

下对一般曲线沿 z 轴拓展形成的柱体进行讨论，这里笔者引用了徐九赐同学 17 年电磁学小论文的一个结论，具体情况如下：

$$F(x, y, z) = 0 \quad \varphi = \varphi(F)$$

$$\nabla \varphi = \frac{d\varphi}{dF} \nabla F$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \left(\frac{d\varphi}{dF} \nabla F \right) = \frac{d^2 \varphi}{dF^2} (\nabla F)^2 + \frac{d\varphi}{dF} \nabla^2 F$$

记：

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial F}$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \Rightarrow \frac{du/dF}{u} = \frac{d(\ln u)}{dF} = -\frac{\nabla^2 F}{(\nabla F)^2}$$

$$u = \frac{d\varphi}{dF} = \exp \left(-\int \frac{\nabla^2 F}{(\nabla F)^2} dF \right)$$

$$\varphi = \int \exp \left(-\int \frac{\nabla^2 F}{(\nabla F)^2} dF \right) dF$$

PART THREE 一般柱体

对二维情形做类似处理，可得：

$$\varphi = \varphi(x, y) \quad x = x(t) \quad y = y(t)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} = 0$$

$$-\left(\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3} + \frac{\ddot{y}}{\dot{y}^3}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{1}{\dot{x}^2} + \frac{1}{\dot{y}^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{du}{u} = \frac{\left(\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3} + \frac{\ddot{y}}{\dot{y}^3}\right)}{\left(\frac{1}{\dot{x}^2} + \frac{1}{\dot{y}^2}\right)} dt$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\dot{x}^2} + \frac{1}{\dot{y}^2}}}$$

$$\varphi = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\dot{x}^2} + \frac{1}{\dot{y}^2}}} dt$$

$$\sigma = \varepsilon \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(\dot{x}^3 \ddot{y} + \ddot{x} \dot{y}^3)}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}$$

$$K_z = \frac{\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

得到电场表达式为：

$$E = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(-\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(\dot{x}^3 \ddot{y} + \ddot{x} \dot{y}^3)}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}$$

与曲率的表达式有一定联系

PART THREE 一般柱体

2、一般柱体求解方法：

下对一般曲线沿 z 轴拓展形成的柱体进行讨论，这里笔者引用了徐九赐同学 17 年电磁学小论文的一个结论，具体情况如下：

$$F(x, y, z) = 0 \quad \varphi = \varphi(F)$$

$$\nabla \varphi = \frac{d\varphi}{dF} \nabla F$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \left(\frac{d\varphi}{dF} \nabla F \right) = \frac{d^2 \varphi}{dF^2} (\nabla F)^2 + \frac{d\varphi}{dF} \nabla^2 F$$

记：

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial F}$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \Rightarrow \frac{du/dF}{u} = \frac{d(\ln u)}{dF} = -\frac{\nabla^2 F}{(\nabla F)^2}$$

$$u = \frac{d\varphi}{dF} = \exp\left(-\int \frac{\nabla^2 F}{(\nabla F)^2} dF\right)$$

$$\varphi = \int \exp\left(-\int \frac{\nabla^2 F}{(\nabla F)^2} dF\right) dF$$

PART THREE 一般柱体

但经过笔者验证还有与徐九赐同学的讨论，我们发现该方法有问题。

$$F(x, y, z) = 0 \quad \varphi = \varphi(F)$$

这个假设问题出在最开始，将电势设成 $\varphi(F)$ 这一步。

但笔者认为该方法有其成功之处，以二维情况为例 $F(x, y) = 0$ ，这里少了一个自变量，导致后面的求解不可能正确。

但这种方法找到了一个非常有利的自变量，切向自变量，我们只需要想办法再找到另一个法相自变量，也许就可以实现解决该问题。

但法相自变量比较难以寻找，参考朗道用椭球正交坐标系的做法，可能可以寻得，但对于任意函数而言，法相自变量表示繁杂，并且，就算找到法相自变量，也不一定可以将拉普拉斯方程化简为可以求出通解的形式。

所以下文暂时不对该方法进行再探索。

PART THREE 一般柱体

3、保形变换法：

将在 z 平面无源区的电位函数设为 $\varphi(x, y)$ ，解析函数 $w = f(z)$ 将 D_z 平面变换为 w 平面的区域 D_w ，在 w 平面上的电位是 $\varphi_1(u, v) = \varphi(x, y)$ 。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2} \right) |f'(z)|^2$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon |f'(z)|^2}$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{|f'(z)|^2}$$

设区域 D_z 的边界为： $x = x(t)$ $y = y(t)$

则区域 D_w 的边界为： $u = u(x(t), y(t))$ $v = v(x(t), y(t))$

$$K_z = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad K_w = \frac{u\dot{v} - v\dot{u}}{(v^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

PART THREE 一般柱体

K_w 的化简较为复杂，这里直接给出化简结果：

$$K_w = \frac{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \dot{x} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \dot{y} \right] (\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + |f'(z)|^2 (\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})}{|f'(z)|^3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

综上所述可得：

$$\frac{\sigma^*}{\sigma} = \frac{1}{|f'(z)|^2}$$

$$\frac{K_w}{K_z} = \frac{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \dot{x} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \dot{y} \right] (\dot{x}^2 - \dot{y}^2)}{|f'(z)|^3 (\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})} + \frac{1}{|f'(z)|}$$

若变换前的区域 D_z 为单位圆，则单位面电荷与导体表面曲率均为常数，此时变换后的单位面电荷与曲率无简单的比例关系。

这与我们的直觉相符，指定孤立导体表面一点后，该点的曲率已经固定，但该点的面电荷分布却还和其他地方的导体形状有关。曲率是局域性质，而面电荷为整体性质，所以我们可以看到两者之比中有 $|f'(z)|$ 且无法通过比例系数约掉，这个因子， $f(z)$ 的选取与整体相关，这就解释的通了。

致谢
PART FOUR

PART FOUR 致谢

最后，在此鸣谢给予我小论文帮助和灵感的老师与同学。

首先要感谢许传奇同学在我写小论文的过程中，与我探讨了非常多的问题，也解答了我很多的疑惑，并且提供给我了一些相关资料。如经许同学提醒我才发现徐九赐同学上一年的电磁学小论文中有许多与我研究方向相关的东西。

徐九赐同学以及他上一年的电磁学小论文给了笔者非常多的灵感，并且关于一些重要问题与笔者进行了的探讨，同时也是徐同学告诉了我关于寻找面电荷与曲率关系的“不可能性定理”，该定理对笔者有很大的引导作用。

付湘睿同学与我一起探讨了关于保形变换从二维平面向三维空间的拓展。笔者本来认为，保形变换的轴对称情形可以通过旋转拓展到三维空间，后来经过讨论后发现，二维情形只能沿 z 轴拓展成三维平面。因该方法的不可行性，所以在小论文中没有提及。

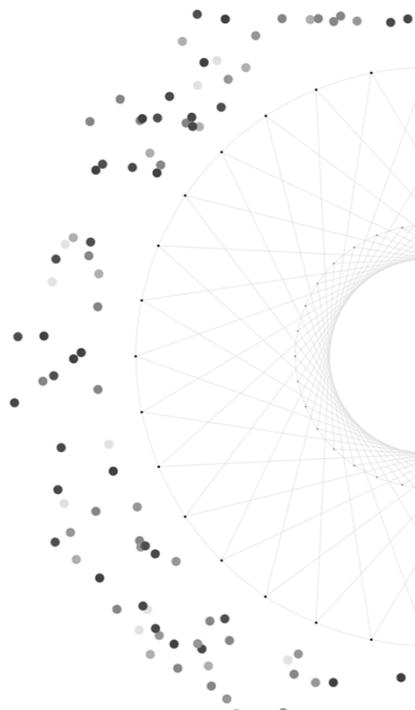
最后非常感谢潘海俊老师与邓友金老师。椭球求电荷分布的方法及圆锥的模型，均源于潘老师的ppt和作业，给予了笔者最开始的灵感。在笔者想到用保形变换解决该问题时，最初遇到了计算上的困难，是邓老师肯定了这种做法的可能性，才使笔者后来坚持做下去。并且邓老师提醒了笔者在三维空间中可以通过共形变换，可以用类似方法对导体的面电荷分布情况进行分析，但三维情况更为复杂，直接用数值的办法会更佳，在本论文中就不再研究了。

参考文献 PART FIVE

PART FIVE 参考文献 ○

参考文献

- [1] 《普通物理学教程电磁学（拓展篇）》 梁灿彬等著
- [2] 《数学物理方程》 季孝达等著
- [3] 《电磁学与电动力学》 胡友秋等著
- [4] 《数值保角变换及其在电磁学理论中的应用》 朱满座
- [5] 《尖端导体表面附近的电场特性》 重庆师范大学学报



THANK YOU FOR WATCHING

指导老师
邓友金 潘海俊

报告人
何姗美