

# 交变磁场下金属球内 磁场与电场分布探究

少年班学院 唐毅萌

01  
PART

## 问题提出

## 目录 >> CONTENTS

- 01 问题提出
- 02 理论分析
- 03 仿真模拟
- 04 总结与不足

### 问题提出

对于匀强磁场中的一个金属导体球，我们已经可以使用多种方法推出空间的磁场分布，即：球内为匀强磁场，球外为磁偶极子场。

设想若外磁场仍匀强，但是有一交变频率，此时会在球内激发感生电场，那么电场/电流密度会如何分布？球内外的磁场又将如何分布？

02  
PART  
理论分析

理论分析

介质中麦克斯韦方程组：

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

接下来将在球坐标下解这个方程。  
(注：如果不特别提及，场量的时谐因子将省略。)

理论分析

为方便近似求解，本问题的求解条件有：

中低频(GHz以下)，小球(球内没有推迟效应)，球体材质为良导体。

理论分析

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rE_\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (rE_\theta \sin \theta) \right] + k^2 rE_\theta = 0$$

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - i\omega \mu \sigma \approx -i\omega \mu \sigma$$

解得球内电磁场为：

$$E_\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} C \left( \frac{\sin kr}{k^2 r^2} - \frac{\cos kr}{kr} \right) \sin \theta \quad H_r = -\frac{2C}{i\omega \mu r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\sin kr}{k^2 r^2} - \frac{\cos kr}{kr} \right) \sin \theta$$

$$H_\theta = \frac{C}{i\omega \mu r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( -\frac{\sin kr}{k^2 r^2} + \frac{\cos kr}{kr} + \sin kr \right) \sin \theta$$

### 理论分析

同理可求得球外电磁场(本处省略)，利用边界条件确定各待定常数，在此给出C的实部虚部之比 $\beta$ ：

$$\beta = \frac{e^{a_0} + e^{-a_0}}{e^{a_0} - e^{-a_0}} \tan a_0, \text{其中 } a_0 = \frac{R}{\delta}, \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \text{ 为趋肤深度}$$

事实上，C的模是相当难解的，无法在此给出它的表达式。但是它的模与 $r$ 、 $\theta$ 无关，我们求场分布更关心相对大小，不妨设：

$$C \approx A(\beta + i)$$

## 03 PART

### 仿真模拟

### 理论分析

再利用下式可以得到实部所对应的物理解：

$$k = \sqrt{\omega\mu\sigma} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = -\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta}i$$

令 $a=r/\delta$ ，解为：

$$j = A' \left\{ \frac{1}{a^2} (\beta \sinh a \cos a - \cosh a \sin a) + \frac{1}{a} [(1 + \beta) \sinh a \sin a + (1 - \beta) \cosh a \cos a] \right\} \sin \theta$$

$$B = B' e^{\frac{r-R}{\delta}} \sin \theta$$

式中 $A'$  和 $B'$  均是与空间、时间变量无关的量。

### 仿真模拟

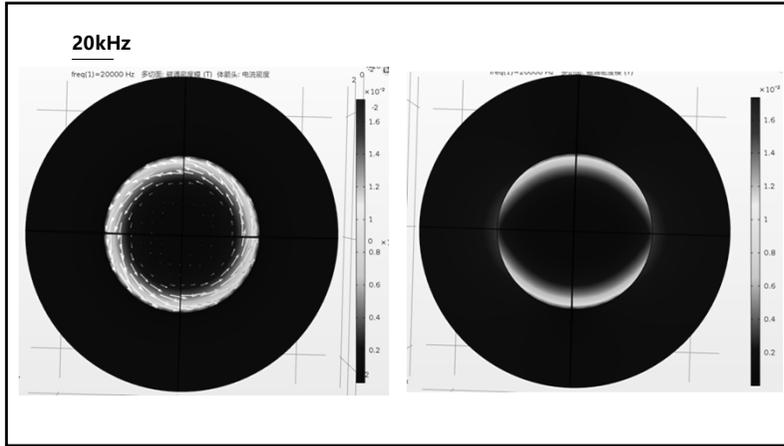
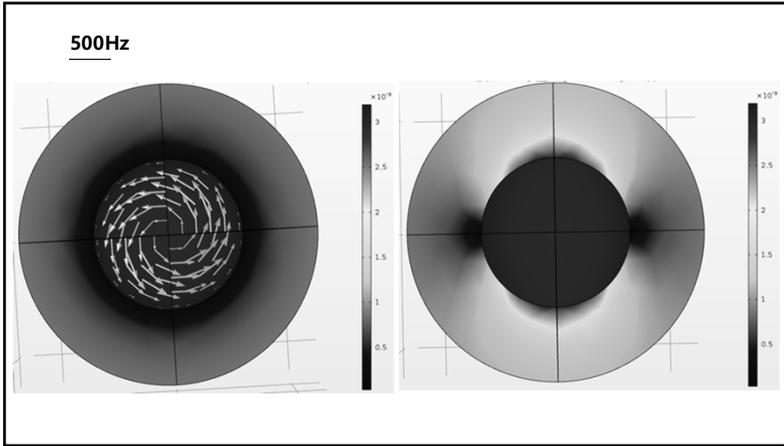
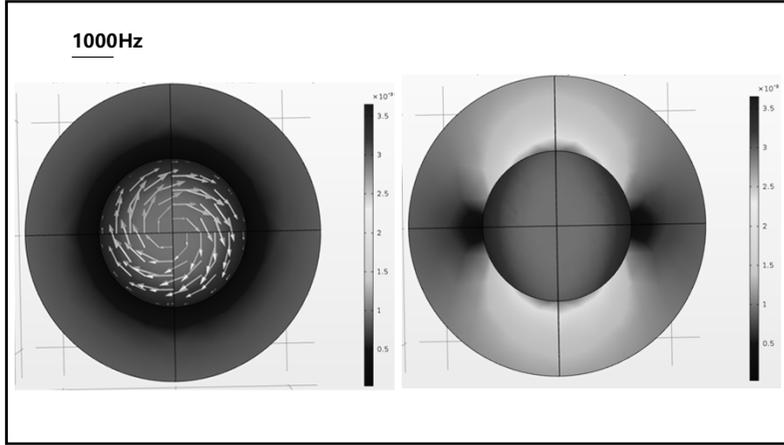
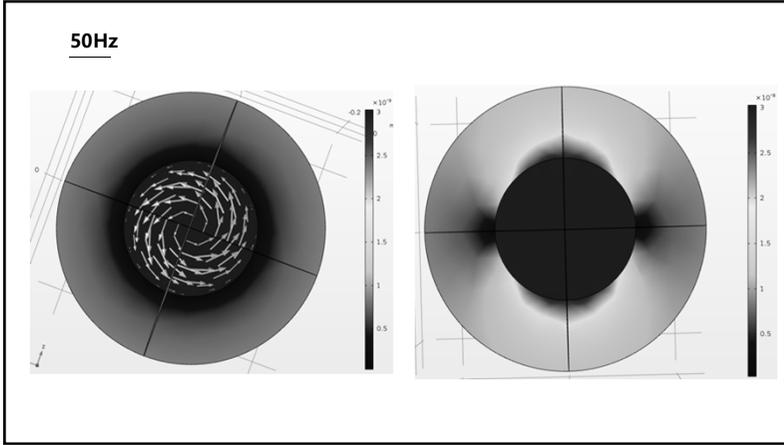
利用COMSOL进行有限元分析，并将结果输出到Origin上进行绘图。

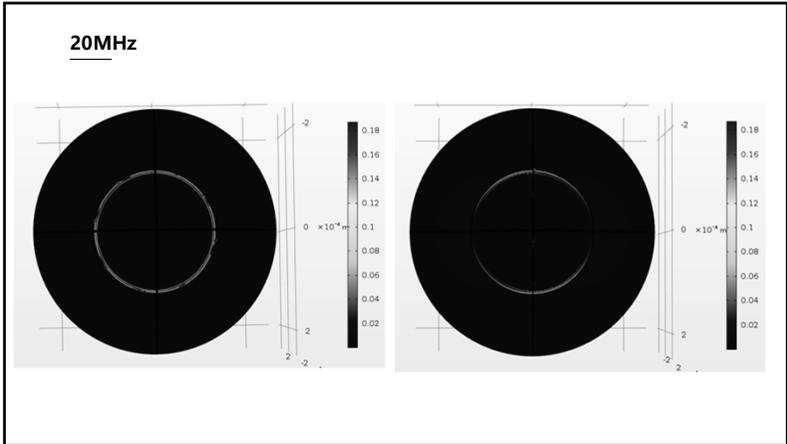
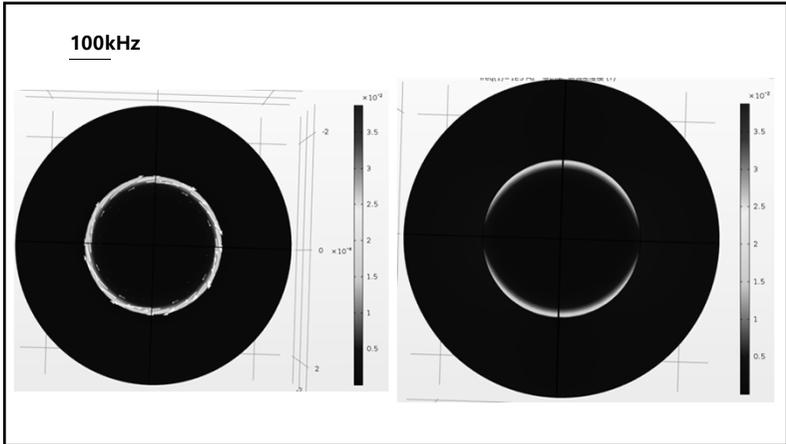
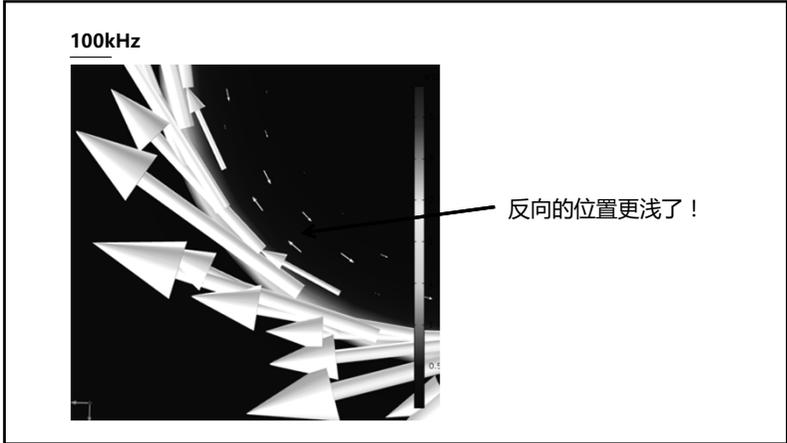
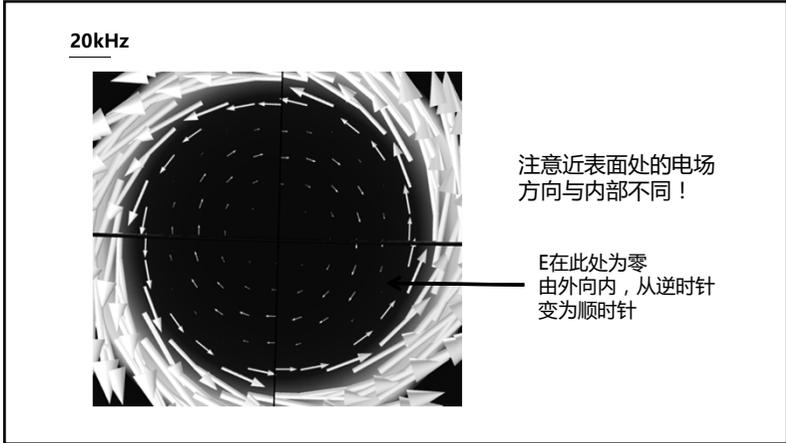
金属球参数：

半径125微米(小)，相对磁导率4000，

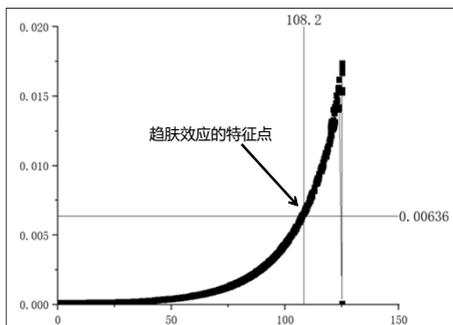
电导率 $1.12 \times 10^7 \text{ S/m}$ (良导体)，外加磁场振幅1mT。

周围是真空。





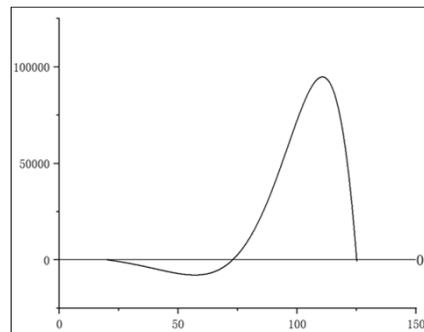
作图-20kHz



磁感应强度模 B-r曲线

之前提到的常数C的数值可以通过这个特征点确定。

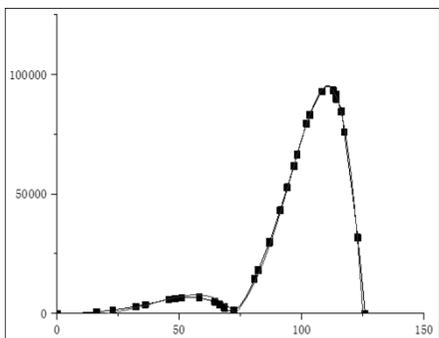
作图-20kHz



电流密度J-r曲线

图中可见的3个零点间距近似相等：52.84微米

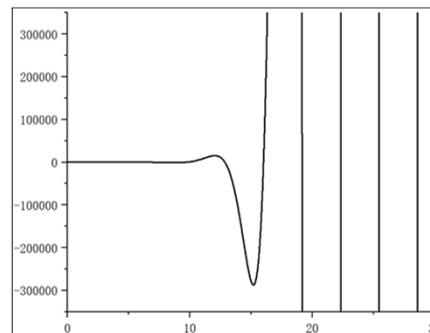
作图-20kHz



电流密度模 |J|-r曲线

C还可以通过图像的峰值确定

作图-解析解结果图像(部分未画出)



振荡，且振幅越来越大

零点周期： $\pi\delta$

20kHz下的理论零点周期为52.82微米，相差仅不到0.04%！

# 04

PART

## 总结与不足

### 总结与不足

不足之处在于，由于计算量太大，没有能够具体确定表达式中的几个常数的具体表达式，确定后可能会得到更多有价值的结论，如场强和频率的具体关系。

### 总结与不足

本文从多个角度半定量分析了交变磁场下金属小球内的磁场和电场分布情况，并定性给出了球外二次激发磁场的变化趋势。

内部反向的电流削弱了球内和球外的磁场，造成了球内球外磁场均趋于球表面的现象。

## 致谢

感谢陶小平老师的建议与指导！

**THANKS**