论四元数，SU2群在电磁学中的应用

USTC，物理研讨组，赵天鸿

论四元数及SU2群在电磁学中的应用

关键词：数学物理，规范场论，电磁学，群论，四元数

目录

- 我们先来介绍下四元数集合H
- 类似于复数域中把复数域看作实数域的线性空间，基底为：1，i
- 也就是：$C = R + Ri$
- 四元数中我们有：$\mathrm{H} = R + Ri + Rj + Rk$
- 也就是其中每个元素具有形式：$U = U_0 + U_1 i + U_2 j + U_3 k$
- 这里，i, j, k 为四元数的3个基底。类似于虚数单位i。
- 他们满足代数关系：$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
- 注意四元数中交换律不成立。容易知道：$ij = -ji = k$
- 类似于复数情形，四元数还可定义虚部和实部，模长和共轭等等。

1.经典电磁学中的应用

- （本文使用单位制为：$\varepsilon_0 = \mu_0 = \frac{h}{2\pi} = c = 1$
- 经典Maxwell方程组为：

$$\nabla \bullet E = \rho$$
$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$\nabla \bullet B = 0$$
$$\nabla \times B = j + \frac{\partial E}{\partial t}$$

- 通常来说四个方程是两个矢量场，两个标量场方程，但是可以知道，如果我们把矢量理解为四元数的虚数部分，标量则对应实数部分，我们将进一步简化，而化简出来的结果将与应用狭义相对论化简出来四维方程不同。

- 引入四元数哈密顿算子：

$$\Delta=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k$$

- 这里，i,j,k是四元数基底。
- 并且改写电磁场为：$E=E_x i+E_y j+E_z k$，$B=B_x i+B_y j+B_z k$
- 我们有：$\Delta E=-\nabla\bullet E+\nabla\times E=-\rho-\frac{\partial B}{\partial t}$

$$\Delta B=-\nabla\bullet B+\nabla\times B=\frac{\partial E}{\partial t}+j$$

- 上面的方程还可以进一步简化，我们再引入复数单位 z
- 它满足：$z^2=-1$
- 这里记号与通常不同，是避免与四元数单位重复。

- 那么我们就有：

$$\Delta(E+zB)=-(\rho-zj)+z\frac{\partial}{\partial t}(E+zB)$$

- 即：

$$\left(z\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)(E+zB)=\rho-zj$$

- 注意上式不同于四维形式的Maxwell方程，但是它同样与Maxwell方程组等价。为了求解此方程，我们考虑点源产生的场：

$$\left(z\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)(E+zB)=\delta^4(x,y,z,t)$$

$$\left(z\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\left(E+zB\right)=\delta^4\left(x,y,z,t\right)$$

我们做傅里叶变换得到：

$$\tilde{E}+z\tilde{B}=\frac{\omega+z\vec{k}}{\left(2\pi\right)^2\left(\omega^2-\left|\vec{k}\right|^2\right)}$$

这是一个点源的格林函数。

这样，我们再傅里叶逆变换回去就能得出点源产生的场。一般的电动力学参考书上都有，这里不再赘述。

- 这个理论中，我们并不需要引入四维势或者场张量。
- 麦克斯韦当年也想用四元数表述他的方程，但是还是改用了分量形式表述。但事实上，四元数作为一种数学工具，仍然不失为一种极佳的表述方式。
- 下面我们研究四元数代数与相对论代数的关系。

- 我们再考虑这样的事情，对于度规为：

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

- 的闵氏时空，我们有代数同构：

$$P^{\mu}\leftrightarrow P^{0}+z\vec{P}\leftrightarrow P^{0}+z\left(iP^{1}+jP^{2}+kP^{3}\right)$$
$$\leftrightarrow\left(P^{0},\ P^{1},\ P^{2},\ P^{3}\right)$$

- 这里定义如前，z 是虚数单位，i,j,k 是四元数基底，并且除此之外还有极佳的代数性质，众所周知，四元数的共轭可以写成：

$$K:P^{0}+z\left(iP^{1}+jP^{2}+kP^{3}\right)\rightarrow P^{0}-z\left(iP^{1}+jP^{2}+kP^{3}\right)$$

- 可以马上发现，取共轭把逆变四维矢量变成协变四维矢量。

- 这种四元数模长平方为：

$$|P|^{2}=\left(P^{0}+z\left(iP^{1}+jP^{2}+kP^{3}\right)\right)\left(P^{0}-z\left(iP^{1}+jP^{2}+kP^{3}\right)\right)=P^{0\,2}-\vec{P}^{2}$$
$$=P^{\mu}P_{\mu}$$

- 这说明取共轭运算对应着将逆变四维矢量变成协变四维矢量，并且取四元数模长的运算自动对应于取四维矢量的模长，他们代数同构。
- 唯一不足的是，模长意义下他们同构，四维内积意义下则并不如此。
- 但至少说明，四元数的电磁学理论自动也与相对论代数结构一致。很优美。

2.规范场论中的应用

- 设SU2群作用到希尔伯特空间H上，这意味着对于每一个
- $U \in SU_2$ 会给出群同态：$SU_2 \to Aut(H), U \to \rho_U$
- 我们直接将 ρ_U与U 不加区分。这作用要给出物理上等价的态，要保持内积，加法，数乘，它必定是幺正算符。
- 我之所以考虑SU2，是在看到QED的U1规范理论中，所谓规范变换就是态乘上一个模为1的复数相因子，进而考虑乘上四元数会发生什么事情，而我们知道，单位四元数群：
  $H \cong S_3 \cong SU_2$
- 进而，查阅进一步的资料发现这项工作是杨—米尔斯规范场论的内容。本人水平有限，又对SU2及四元数比较熟悉，于是自己推导了SU2情形。

- 在规范变换U的作用下，我们有：
  $\psi \to U\psi$
  $\partial_\mu \psi \to \partial_\mu (U\psi) = U(\partial_\mu + U^+ \partial_\mu U)\psi$
- 但是拉氏量中必然包含关于 ψ 的导数项。从而在定域规范变换下，运动方程会发生改变，这是不可接受的。我们由此引入规范场场强 A_μ 及协变导数 $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$
- 在规范变换的作用下，协变导数发生变换：
  $D_\mu \psi \to D_\mu^{'} \psi = U(\partial_\mu + U^+ A_\mu U + U^+ \partial_\mu U)\psi$
- 我们求得：$A_\mu^{'} = U^+ A_\mu U + U^+ \partial_\mu U$
- 这样，得到的运动方程就具有规范不变性。
- 其中第一项U1规范中为 A_μ第二项则可以写成一个四维梯度。

- 上述的规范场强数学上对应纤维丛上的联络。
- 广义相对论中，曲率张量由下式定义：

$$F_{\mu\nu} = \left[D_{\mu}, \ D_{\nu}\right] = D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu}$$

- 回忆起相对论中电磁场拉氏量的构造，我们也同时构造SU2规范场的拉氏量为：

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

- 对于U1规范理论，有：

$$F_{\mu\nu} = D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

- 对于非U1的规范理论，有：

$$F_{\mu\nu} = D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - \left[A_{\mu}, \ A_{\nu}\right]$$

$$F_{\mu\nu} = D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - \left[A_{\mu}, \ A_{\nu}\right]$$

- U1是一个阿贝尔群，不存在第二项的对易子项。因此一般的SUn规范场论又被称作非阿贝尔规范场论，而电磁场的规范场论则是被称为阿贝尔规范场论。
- 对于SU2规范场论，我们把A_{μ}表示为四元数的基底。

$$A_{\mu} = A_{\mu}^{0} + A_{\mu}^{k}e_{k}$$

- 四元数又构成一个李代数，它与泡利矩阵同构，但是我们这里仍将采用四元数来表述。
- 那么我们有：$\left[A_{\mu}, \ A_{\nu}\right] = 2A_{\mu}^{i}A_{\nu}^{j}\varepsilon_{ij}^{k}e_{k}$
- 这样我们的拉氏量密度可以写成：

- 这样我们的拉氏量密度可以写成：

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\frac{1}{4}\left(\left(\partial_\mu A_\nu^k-\partial_\nu A_\mu^k\right)e_k+\partial_\mu A_\nu^0-\partial_\nu A_\mu^0-2\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}A_\mu^i A_\nu^j e_k\right)$$

$$\left(\left(\partial^\mu A^{\nu,l}-\partial^\nu A^{\mu,l}\right)e_l+\partial^\mu A^{\nu,0}-\partial^\nu A^{\mu,0}-2\varepsilon_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{l}}A^{\mu,a}A^{\nu,b}e_l\right)$$

- 再由： $e_k e_l=-\delta_{kl}+\varepsilon_{kl}^c e_c$
- 我们可以发现拉氏量应由四项组成，分别对应四元数的四个基底。
- 代入欧拉-拉格朗日方程：

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu^n\right)}\right)=\frac{\partial L}{\partial A_\mu^n}$$

- 取n=0，我们得到：

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}=\partial_\nu\left(\left(\partial^\mu A^{\nu,k}-\partial^\nu A^{\mu,k}\right)e_k+\partial^\mu A^{\nu,0}-\partial^\nu A^{\mu,0}-2\varepsilon_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{k}}A^{\mu,a}A^{\nu,b}e_k\right)=0$$

- 再取四元数的实部，我们可以得到真空中四维形式Maxwell方程，亦即： $\mathrm{Re}\left(\partial_\nu F^{\mu\nu}\right)=0$

$$\partial_\nu\left(\partial^\mu A^{\nu,0}-\partial^\nu A^{\mu,0}\right)=0$$

$$\Rightarrow\partial_\nu\left(\partial^\nu A^{\mu,0}\right)=0$$

- 再取四元数的虚部，我们可以得到：（已将指标变动）

$$\mathrm{Im}\left(\partial^\nu F_{\mu\nu}\right)=0\Rightarrow\partial^\nu\left(\partial_\mu A_\nu^k-\partial_\nu A_\mu^k\right)=2\varepsilon_{ij}^k\partial^\nu\left(A_\mu^i A_\nu^j\right)$$

$$\Rightarrow\partial^\nu\left(\partial_\nu A_\mu^k\right)=-2\varepsilon_{ij}^k\partial^\nu\left(A_\mu^i\right)A_\nu^j$$

- 推导中已经利用洛伦兹规范条件：

$$\partial^{\mu} A_{\mu}^{0} = 0, \quad \partial^{\mu} A_{\mu}^{k} = 0$$

- 上面总共有4*4=16个独立的方程，一起正好可以完全地描述规范场强（它的独立分量也正好有16个）的行为。至于$n \neq 0$时对应的拉格朗日方程所描述的系统的运动，我暂时没算出来。我认为应当与上面不独立。
- 上面的推导中没有考虑荷的作用，现在来模仿电磁理论，可知：

$$\partial^{\nu}\left(\partial_{\nu} A_{\mu}^{0}\right) = J_{\mu}^{0}$$

$$\partial^{\nu}\left(\partial_{\nu} A_{\mu}^{k}\right) = -2\varepsilon_{ij}^{k} \partial^{\nu}\left(A_{\mu}^{i}\right) A_{\nu}^{j} + J_{\mu}^{k}$$

- 我们很容易发现有：$\partial^{\mu} J_{\mu}^{k} = 0$ 成立，众所周知这是荷守恒律。

总结

- 我们发现，在规范理论中，不论是荷，还是规范场强（在电磁理论中就是四维势），它们都必须是矩阵 Λ_{l}^{k} 形式。尽管理论的出发点是SUn作用到希尔伯特空间上，形似一个量子理论，但实质上还是经典的（能导出Maxwell方程）也就是在经典意义下，荷也必须用矩阵来表达。这是很奇妙的。