

对无限网格电路模型的 探讨及研究

报告人:张之昊

指导老师:张一飞

计算机科学与技术学院

目录

概述.....	3
1 有限至无限的递推.....	4
1.1 有限网格电路	
1.2 无限网格电路猜想及递推	
2 一般性阻值的推广.....	8
2.1 猜想及推广下的公式	
2.2 电路简化	
3 等比例无限网格电路的推广.....	11
3.1 猜想及推广下的公式	
3.2 数学性质的研究	
3.3 线性无限网格电路推广的充要条件	

4 一般性结构的推广.....	17
4.1 广义无限网格电路与单位电路	
4.2 猜想及推广下的公式	
5 无限网格电路的数学模型构建与解释.....	20
总结.....	21

2

概述

无限网格电路是一种非常常见的模型, 本文将对这一模型进行探讨及研究, 给出推广后一般意义上的阻值公式, 发掘其中的相关性质和意义, 并从数学模型上给出公式的解释。

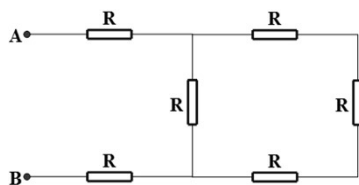
3

1 有限至无限的递推

1.1 有限网格电路

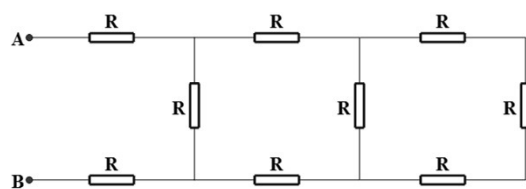


$$R_{AB} = R + R + R = 3R$$

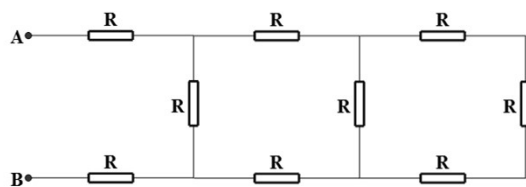


$$R_{AB} = R + \frac{R \cdot 3R}{R + 3R} = 2.75R$$

4



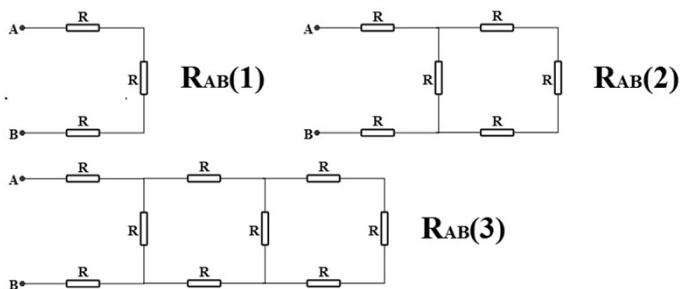
$$R_{AB} = R + \frac{R \cdot 2.75R}{R + 2.75R} = 2.733R$$



... .. $R_{AB} = ?$

5

1.2 无限网格电路猜想及递推



$$R_{AB}(n) = R + \frac{R \cdot R_{AB}(n-1)}{R + R_{AB}(n-1)} \quad R_{AB}(1) = 3R \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_{AB}(n) = ?$$

6

我们将有限电路化为一个递推数列,而无限电路就是这一数列的极限,对无限电路的求解就化为了求数列极限的问题。

$$R_{AB}(n) = R_{AB}(n-1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_{AB}(n) = (\sqrt{3} + 1)R$$

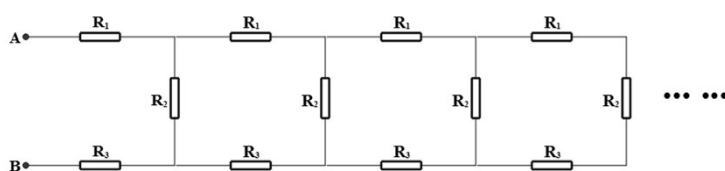
令第n-1项与第n项相等,我们求出了数列极限,而这也就是无限电路的阻值。

7

2 一般性阻值的推广

2.1 猜想及推广下的公式

$R_{AB}(n)=R_{AB}(n-1)$ 在无限电路下的成立,使得我们猜测这一特点与具体的阻值无关,因此我们在保持这一特点存在的情况下对阻值进行推广。



8

$$R_{AB}=R_1+R_3+\frac{R_2 \cdot R_{AB}}{R_2+R_{AB}}$$

对方程进行化简

$$R_{AB}^2-(R_1+R_3)R_{AB}-(R_1R_2+R_2R_3)=0$$

$$R_{AB}=\frac{R_1+R_3 \pm \sqrt{R_1^2+R_3^2+4R_1R_2+2R_1R_3+4R_2R_3}}{2}$$

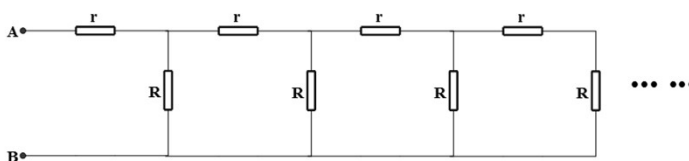
实际意义下 $R_{AB}>0$,舍去负数解

$$R_{AB}=\frac{R_1+R_3+\sqrt{R_1^2+R_3^2+4R_1R_2+2R_1R_3+4R_2R_3}}{2}$$

9

2.2 电路简化

为了后面研究的方便,在这里对电路进行了简化, R_1 和 R_3 地位相同,将它们合并成 r , R_2 简计为 R 。



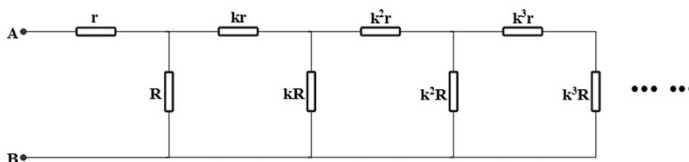
前面公式可化简为
$$R_{AB} = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4Rr}}{2}$$

10

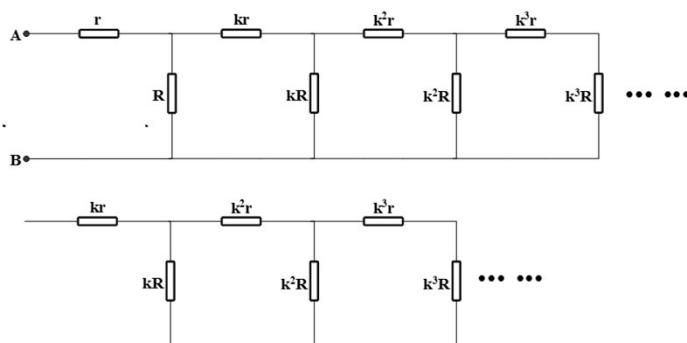
3 等比例无限网格电路的推广

3.1 猜想及推广下的公式

根据我们的推导, $R_{AB}(n)$ 和 $R_{AB}(n-1)$ 只要保持等比例就能保持公式的成立,所以我们可以做进一步的推广,将无限网格电路放在等比例的情况下讨论。



11



$$R_{AB}(n-1) = k * R_{AB}(n)$$

$$R_{AB}(n) = r + \frac{R * R_{AB}(n-1)}{R + R_{AB}(n-1)}$$

12

$$R_{AB} = r + \frac{R * k * R_{AB}}{R + k * R_{AB}}$$

对方程进行化简

$$kR_{AB}^2 - [(k-1)R + kr]R_{AB} - Rr = 0$$

$$R_{AB} = \frac{(k-1)R + kr \pm \sqrt{(k^2 - 2k + 1)R^2 + k^2r^2 + (2k^2 + 2k)Rr}}{2k}$$

实际意义下 $R_{AB} > 0$, 舍去负数解

$$R_{AB} = \frac{(k-1)R + kr + \sqrt{(k^2 - 2k + 1)R^2 + k^2r^2 + (2k^2 + 2k)Rr}}{2k}$$

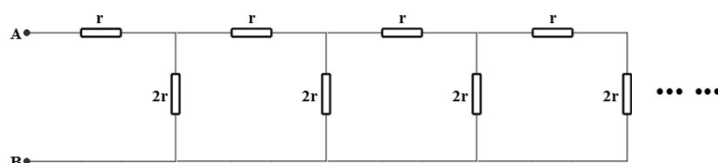
13

3.2 数学性质的探究

在这里我们只做简单的说明:

(1) $R_{AB}=r$, 解出 $R=0$, 电路退化为一个电阻;

(2) $R_{AB}=R$, 解出 $R=(k+1)r$, 我们称该电路电阻稳定, 由于 $k>0$, 电阻稳定时总有 $R>r$ 。

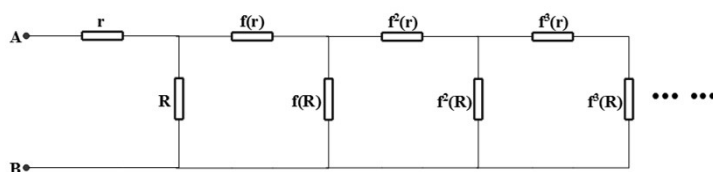


这是 $k=1$ 的情况, 无限网格电路总阻值为 $2r$ 。

14

3.3 线性无限网格电路推广的充要条件

我们想把等比这一关系推广到线性, 如果真的存在这一公式, 那它对任意 R, r 均成立。记这一关系为 $f(x)$, 迭代 n 次为 $f_n(x)$ 。



其中 $f(x)=ax+b$, 这是我们猜想成立得出的假想模型。

15

我们利用反证法来简要说明这一问题,假设推广成立,则有下面成立:

$$R_{AB} = r + \frac{R * f(R_{AB})}{R + f(R_{AB})}$$

其中 $f(x) = ax + b$,固定 a ,假设 b 不等于0,由于 $b=0$ 成立,得出公式在阻值增量相同时保持成立这一结论,由于 $R_{AB}(n)$ 和 $R_{AB}(n-1)$ 要保持等比才有递推公式成立,所以 $a=1$,则这一结论至多局限于 $a=1$ 的情况,推广不成立。

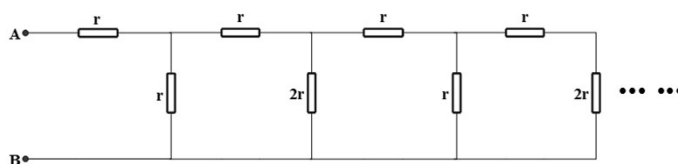
所以 $b=0$,当且仅当等比结构公式成立。

16

4 一般性结构的推广

4.1 广义无限网格电路与单位电路

这里给出另一个模型:



先给出方程:
$$R_{AB} = r + \frac{r * \left(r + \frac{R_{AB} * 2r}{R_{AB} + 2r} \right)}{r + \left(r + \frac{R_{AB} * 2r}{R_{AB} + 2r} \right)}$$

17

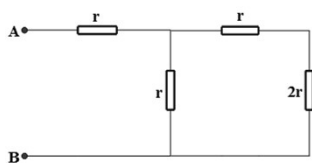
化简后有:

$$4R_{AB}^2 - 3R_{AB} * r - 6r^2 = 0$$

解出

$$R_{AB} = \frac{\sqrt{105+3}}{8} r$$

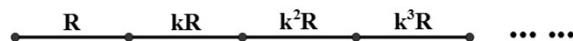
这也是一种无限网格电路,我们称为广义无限网格电路,而电路中最小的重复单位称为单位电路,该模型的单位电路如下:



18

4.2 猜想及推广下的公式

利用自相似性,可以将无限网格电路抽象成如下模型:

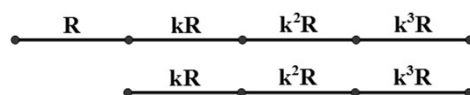


R 代表单位电路,则无限网格电路就是等比结构下的单位电路连接而成,单位电路各阻值为 R_1, \dots, R_n 并构成一个 $n+1$ 元函数,则我们可以给出推广公式:

$$R_{AB} = f(k * R_{AB}, R_1, R_2 \dots R_n)$$

19

5 无限网格电路的数学模型构建与解释



无限网格电路具有自相似结构,如上图,在去掉一段单位电路以后,整体上依然保持结构不变,这在数学上被称为分形结构,正是这一特点我们才能建立 $R_{AB}(n)$ 与 $R_{AB}(n-1)$ 的数学关系,最后推广的式子就是自相似性的数学表达形式。

20

总结

我们进行了几次推广,核心在于无限网格电路是由单位电路叠加而成,去掉一段单位电路后结构不变,所以可以利用递推公式前后项的数学关系求解。碰到这一类模型,我们都可以利用这种递推思想解决,根据具体的单位电路结构列出方程并带入求解,从而解决问题。

21

谢 谢 聆 听