静电理论求解其他问题（静电模拟）

PB17111636 徐宇鸣

在本次报告中我将会从以下几个方面简要的阐述我论文中的内容：

1.选择课题的原因与启发
2.通过传热学中的一个问题来探讨静电模拟的可行性。
3.通过扩散问题提出静电模拟存在的局限性
4.总结以及参考文献

1.原因与启发

在学期中的一次电磁学小测中有一道题：请用电流连续性方程推导出流体方程。在这之后我就有了一个小的想法，是否存在一部分，甚至有可能是绝大多数问题都能通过电磁学的理论来求解?

在之后的电磁感应学习过程中，我注意到了一个我觉得特别有意思的地方：
电感相关的一系列方程，与速度相关的一系列方程十分相似。

速度	电感
v	I
X	Q
mv	LI
mdv / dt	$-LdI / dt$
$mv^2 / 2$	$LI^2 / 2$
$mv^2 / 2 + kx^2 / 2 = C$	$LI^2 / 2 + Q^2 / 2C = C$

经过考虑与调研，我最终决定探究与讨论静电场理论的类比问题

2.通过传热学中的一个问题来探讨静电模拟的可行性。

在静电学的学习中，我们知道了，静电学的方程组是：

高斯定理：（其中ρ0指的是自由电荷密度）

$$\nabla \bullet \left(\varepsilon_r \vec{E}\right) = \rho_0 / \varepsilon_0$$

环路定理：

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

注：这里选取的是静电场中的环路定理，而不是麦克斯韦方程组中的环路定理形式。且选取了含有电介质形式的静电学方程组。

又有：

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \qquad \nabla \bullet \left(\varepsilon_r \nabla \varphi\right) = -\rho_0 / \varepsilon_0$$

注意到，有许多物理问题及其数学方程都具有相同形式。有一个势函数的梯度乘以一标量函数（这个标量函数通常与环境有关（所处环境的材质等），该积的散度等于另一标量函数。同时势函数的梯度的旋度为0。

因为温度就是一个典型的势函数，因此我们来做一个传热学模型：

1存在一个区域，其内部温度是连续变化的。这些温度变化的结果是产生一股热流，用矢量h表示，代表每秒通过垂直于流向的单位面积的热量（在我们的类比中与电场强度矢量E相似），h的散度表示热量从该区域单位体积离开的速率。假设区域内部存在一个热源，将热源每秒在单位体积中所产生的热量设为g，由于我们所讨论的是类比静电场的传热学模型，静电场并不考虑时间的变化，因此设单位体积的内能U为不变量，由于热传导中，单位时间内有

物体热量的改变量（dU）=物体自身的发热量（g）-流出物体的热量（h的散度）

故有：

$$\nabla \bullet \vec{h} = g$$

我们用另一个方程来描述热的流动规律。在许多情况中，热流近似正比于温度对位置的变化率：温差越大，热流越强。因此，我们假定热流与温度梯度成正比，比例系数K为热导率（与材料性质有关），即：

$$\vec{h} = -K\nabla T$$

将该式代入上式，我们得到：

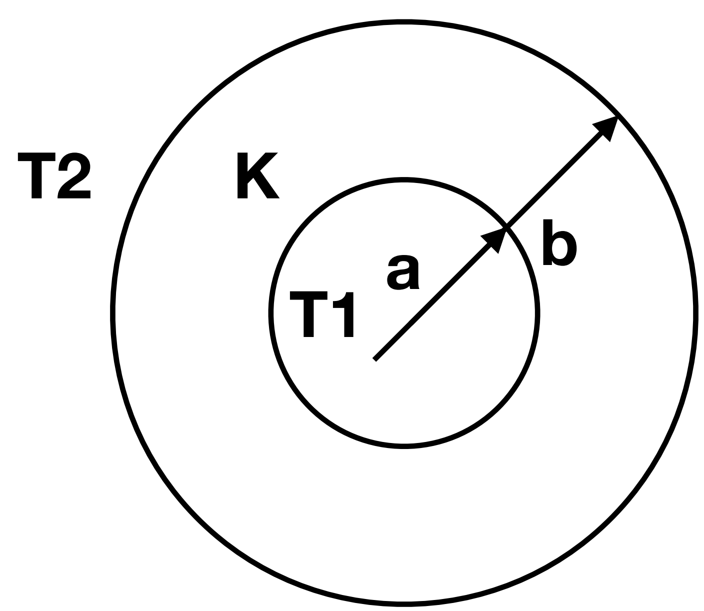
$$\nabla \bullet \left(K\nabla T\right) = -g$$

T————————————φ（势函数）

h————————————E（矢量）

ε—————————K（取决于材料等标量函数）

考虑一个简单的例子，假设有一个半径为a、温度为T1的无限长圆筒，该温度由筒内所产生的恒温电阻丝通电维持，圆筒的外面覆盖着一层绝缘材料的同心护套，这种材料的热导率为K。绝缘套的外半径为b，套外温度为T2，试求一段长度为L的圆筒管道每秒所损失的总热量G。



由于前面的分析，我们可知这个问题与静电场问题相似，因此我们先进行类比，我们熟悉的类似的静电学问题是同轴电缆问题：同轴电缆内外电势差为U（$\phi1-\phi2$），内半径为a，外半径为b，内部填充了一层同轴的电介质材料。既然热流矢量h对应电场矢量E，我们所要求的G就应是长度为L的同轴电缆的电场通量。

由对称性可知，h仅取决于与轴心间的距离r。因此我们取一个长为L、半径为r的高斯圆柱面。由高斯定理我们可知：

$$2\pi rL|\vec{h}| = G\left(2\pi rL|\vec{E}| = q/\varepsilon_0\right)$$

又热流与温度梯度成正比：

$$\vec{h} = -K\nabla T$$

在这种情况下，由于对称性，温度T应只取决于与轴心间的距离r，于是：

$$\vec{h} = -K\left(dT/dr\right)\vec{e}_r$$

联立各式，得

$$dT/dr = -G/\left(2\pi KLr\right)$$

从r=a到r=b进行积分，便得

$$T_2 - T_1 = -G / \left(2\pi KL\right) \ln\left(b / a\right)$$

因此

$$G = 2\pi KL\left(T_2 - T_1\right) / \ln\left(b / a\right)$$

注意到对于同轴电缆（设单位长度线电荷密度为λ），我们在课本习题2.40的解答中中得出

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r U / \ln\left(b / a\right)$$

3.局限性

- 但是，静电模拟得出来的结果并不一定完全与真实情况（或是用原本问题的求解方法得出的结果相同），我们取扩散问题作为例子

试求一块无限大区域中的中子的平均流动（速度场）。

设N（x，y，z）ΔV代表点（x，y，z）处体积元ΔV中的中子数，由于运动，就有些中子会离开ΔV，而其它一些将进入。若在一个区域里有比其邻区更多的中子，则流入邻区的中子会比流入该区域的中子数多，这将有个净流，设流矢量J来描述该净流，则应有（参考费恩曼物理学讲义第一卷得出的公式）：

$$\vec{J} = -D\nabla N$$

其中D代表扩散系数。之后以之前推导热力学模型时类似的方式求解

$$\nabla \cdot \left(-D\nabla N\right) = S - \partial N / \partial t$$

由此，考虑与静电场类似的情况，方程也与静电场方程高度相似。

但是我们又从已知的知识得知，中子的扩散并不是如我们想象的这样连续光滑的变化，由热力学知识知每个中子都是在向各处跑动，从热力学的知识中我们可以得知我们做的上述关于中子的推导只是在宏观条件下求出的统计平均 (即我们观察的尺度远大于平均自由程）（此时我们将中子在空间视为连续分布而其实不然）适用，一旦我们观察的尺度缩小，我们根据静电模拟推导出来的式子就不再适用了。

4.总结

通过静电模拟，能够解决一些相似的问题：如热流问题

但也并不是所有相似的问题得出来的结果就一定是准确的：如扩散问题

类比是一种重要的推理方式，比较两者之间的本质上的一些相似处能给我们带来一定的启发

除了静电理论，我们应该也可以通过其他的方程之间的对比来解决其他的问题（如最初提到的速度与电感之间的对比）

参考文献

1《费恩曼物理学讲义》（第一卷）（第二卷），（美）费恩曼 莱顿 桑兹著，上海科学技术出版社
2《热学》，张玉民，科学出版社
3《电磁学》 叶邦角著，中国科学技术大学出版社

谢谢！