浅谈磁悬浮陀螺中的物理原理

报告人：张铭哲 蔡元昊

目录

- 磁悬浮陀螺简介
- 实物操作
- 理论建模与计算
- 结果分析与延伸
- 参考文献

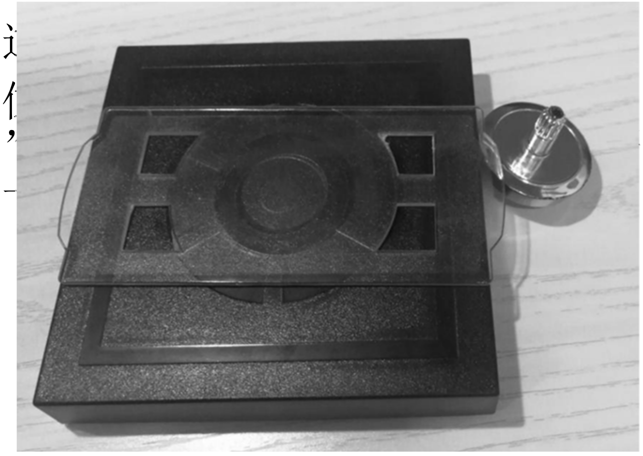
磁悬浮陀螺简介

磁悬浮陀螺简介

- 1842年，英国科学家Samuel Earnshaw就证明了，磁偶极不能在静磁场中保持稳定平衡的状态。

磁悬浮陀螺简介

- 不 ！
- 一 “民科” 制出了

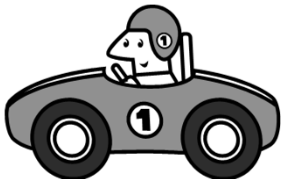


物理学大

朵乌云？

且看我们的亲手操作

实物操作



实物操作

实物操作

实物操作

- **大致步骤：**
- 第一步，用拇指和食指捏紧陀螺转轴，将陀螺下端置于磁性底盘上的塑料托片中心，使陀螺保持水平，然后稍加用力使陀螺能够平稳旋转。与普通陀螺不同的是，这一步非常困难，需要了大量的练习才能熟练掌握技巧。
- 第二步，在第一步成功后，缓慢抬起塑料托片3至4厘米，在调整好的情况下，陀螺会自动脱离底盘向上悬浮到平衡处，即陀螺成功悬浮。而若无法平衡，则需要调整。

实物操作

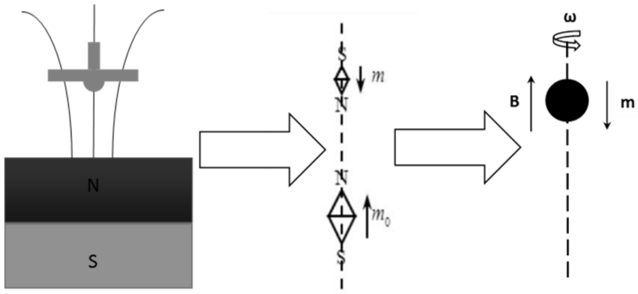
- 第三步，调整陀螺的质量和磁性底盘的水平。通过加减塑料盒铜质调整片来调整陀螺的质量，通过小塑料斜块调整底盘的水平。
- 未调整好的表现:
- 陀螺太轻：抬起托片时陀螺会飞弹出去。
- 陀螺太重：抬起托片时陀螺不会自动飞离托片或悬浮几秒后就掉落。
- 底盘未平行：陀螺质量大致调整好后，抬起托片，陀螺在飞离托片的过程中，倾斜飞向某方向并掉落，则说明该方向需要垫高。

理论建模与计算

一、理想情况下的模型

理论建模与计算

陀螺与陀螺下方的磁铁可视为为两个磁偶极，磁矩方向相反，陀螺形状简化为球形（忽略重力产生的力矩并简化计算），设陀螺的磁矩为$\vec{m}$，方向如图所示，转动惯量为 I，磁铁在陀螺处的磁感应强度为$\vec{B}$，陀螺初始转动角速度$\vec{\omega}$。



图一、抽象模型示意图

理论建模与计算

下面证明陀螺是稳定平衡。

陀螺动能：

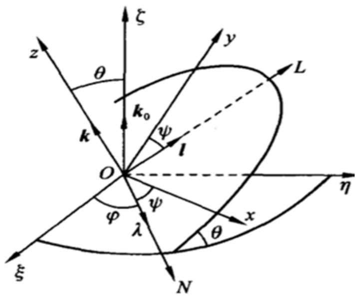
$$T=\frac{1}{2}(I_\xi\omega_\xi^2+I_\eta\omega_\eta^2+I_\zeta\omega_\zeta^2)$$

由球对称性：

$$I_\xi=I_\eta=I_\zeta=I$$

列出欧拉运动学方程：

$$\omega_\xi=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi$$
$$\omega_\eta=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi+\dot\theta\sin\psi$$
$$\omega_\zeta=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi$$



图二、欧拉角

理论建模与计算

代入 T 的表达式得：

$$T=\frac{1}{2}I(\dot\varphi^2+\dot\theta^2+\dot\psi^2+2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta)$$

陀螺势能：

$$V=mB\cos\theta$$

拉格朗日函数：

$$L=T-V=\frac{1}{2}I(\dot\varphi^2+\dot\theta^2+\dot\psi^2+2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta)-mB\cos\theta$$

总能量：

$$E=T+V=\frac{1}{2}I(\dot\varphi^2+\dot\theta^2+\dot\psi^2+2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta)+mB\cos\theta$$

理论建模与计算

由于 E 要表示成θ和$\dot{\theta}$函数，需要消去无关变量$\dot{\varphi}$和$\dot{\psi}$，借助拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \psi}=0$$

得：

$$I(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)=C_1$$

$$I(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)=C_2$$

初始时刻取$\theta=0$，$\dot{\varphi}=\omega$，$\dot{\psi}=0$，得：

$$C_1=C_2=I\omega$$

解方程得：

$$\dot{\varphi}=\dot{\psi}=\frac{\omega}{1+\cos\theta}$$

理论建模与计算

代入总能量的表达式中：

$$E=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{I\omega^2}{1+\cos\theta}+mB\cos\theta$$

得到有效势能的表达式：

$$U_{\text{eff}}=\frac{I\omega^2}{1+\cos\theta}+mB\cos\theta$$

理论建模与计算

求导得：

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{d\theta}=\frac{I\omega^2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}-mB\sin\theta$$

显然 $\theta=0$ 时，有效势能取到极值，因此在 $\theta=0$ 处可以平衡。进一步求二阶导数得：

$$\frac{\mathrm{d}^2U_{\text{eff}}}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0}=\frac{1}{4}I\omega^2-mB$$

由于陀螺转速很快，当 $\frac{1}{4}I\omega^2-mB>0$ 时，有效势能在 $\theta=0$ 处为极小值，因此陀螺处于稳定平衡状态。

- 二、实际情况的修正

理论建模与计算

然而在实际操作过程中，并不能严格保证磁矩方向与磁场方向完全平行。因此陀螺在绕磁矩方向自转的同时还会有绕磁场方向的公转（进动）。下面来计算进动角速度与自转角速度之间的关系。

磁偶极在磁场中受到的力矩：

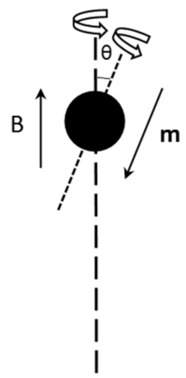
$$\left|\overrightarrow{M}\right| = \left|\vec{\mathrm{m}} \times \vec{B}\right| = \mathrm{m}B\sin\theta$$

同时由角动量定理：

$$\left|\overrightarrow{M}\right| = \left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = \Omega I\omega\sin\theta$$

联立解得：

$$\Omega = \frac{\mathrm{m}B}{I\omega}$$



图三、进动示意图

- 三、其它使陀螺平衡的方法

理论建模与计算

除了使陀螺旋转外，还可以在竖直方向附加一个高频交变弱磁场 $B_1 \cos\omega t$ 使陀螺保持稳定平衡。

由角动量定理：

$$I\ddot{\theta} = m(B_0 + B_1 \cos\omega t)\sin\theta$$

设 $\theta = \theta_0 + \theta_\omega$，其中 θ_0 为平稳变化项，θ_ω 为高频（频率 $\propto \omega$）微小振动项（$\theta_\omega << \theta_0 << 1$）。

理论建模与计算

代入微分方程得：

$$I(\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_\omega) = mB_0\theta_0 + mB_0\theta_\omega + mB_1 \cos\omega t\theta_0 + mB_1 \cos\omega t\theta_\omega$$

方程两边的高频振动项与平稳项分别对应，由于 $\theta_\omega << \theta_0$，

$I\ddot{\theta}_\omega \approx mB_1 \cos\omega t\theta_0$（忽略不含 $\cos\omega t$ 的平稳项与含 θ_ω 的高阶小量）

积分得：$\theta_\omega = -\dfrac{mB_1\theta_0 \cos\omega t}{I\omega^2}$

理论建模与计算

微分方程两边对时间求平均（该时间远大于高频项周期，但平稳项几乎无变化）$I\ddot{\theta}_0 = mB_0\theta_0 + \overline{mB_1\cos\omega t\theta_\omega}$

将所得的 θ_ω 代入上式得：$I\ddot{\theta}_0 = (mB_0 - \frac{m^2B_1^2}{2I\omega^2})\theta_0$

若使陀螺为稳定平衡，则方程是关于 θ_0 的简谐振动方程，交变弱磁场的振幅与频率满足关系：$mB_0 - \frac{m^2B_1^2}{2I\omega^2} < 0$

结果分析与延伸

结果分析与延伸

- **实验结果分析**
- 实验表明，磁悬浮陀螺确实可以在某点达到稳定平衡，但在实际操作过程中的成功率却很低，分析原因如下：
- ①实验中并不能保证磁性底盘严格水平（主要原因），使得陀螺在抬起过程中因受力不平衡而飞出。
- ②陀螺转动角速度偏小，使得该稳定平衡极易被一些小的扰动打破。
- ③陀螺和磁性底盘在生产过程中的缺陷等未知因素。
- 改进方案：每次实验前在磁性底盘上放置一个水准泡，先调节底盘水平，再进行实验。

结果分析与延伸

- **理论结果分析**
- 计算表明，理想情况下，在轴对称磁场中旋转的陀螺可以保持磁矩与磁场反向并达到稳定平衡。陀螺在绕磁矩方向自转的同时还会有绕磁场方向的公转（进动）。
- 由公式知，可以通过增大陀螺转动惯量、减弱磁场和减轻陀螺质量等方法来加强该稳定平衡。
- 除了使陀螺旋转外，还可以附加一个高频交变弱磁场使陀螺也达到稳定平衡。

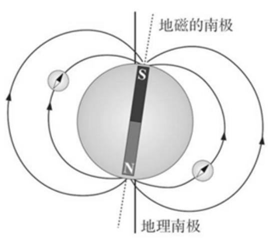
结果分析与延伸

- **磁悬浮陀螺的现在与未来**
- 这种原理目前正用于耗资巨大的科研实验中。比如用磁约束中子实验。因为中子不带电，不能用电场控制。但中子带有微小的磁矩，能够用磁场控制，可以说相当于一个小型磁悬浮陀螺。
- 除了我们介绍的磁我们悬浮陀螺外，抗磁悬浮（超导磁悬浮）也是我们所熟知的磁悬浮方式。那么是否可以用抗磁性材料或者超导体制作陀螺，将两种方式结合，创造出新型磁悬浮陀螺，从而大大提高磁悬浮陀螺的稳定性呢？这种方法的可行性等待着我们去探索。

结果分析与延伸

- **未来应用展望**
- 磁悬浮轴承，不存在机械接触，旋转过程中不会因摩擦而产生热能，同时不需润滑，易于保养和维护。
- 磁悬浮洗衣机，节约电能，清洗能力强。
- 磁悬浮卫星/空间站，地球本身也是一个大磁铁，想象一下，利用磁悬浮陀螺的原理，在南北极上空建造一颗旋转的卫星，实现和地球相对静止。

look forward to the future



参考文献

- 1.[俄]Л.Д.朗道、[俄]Е.М.栗弗席兹。理论物理 学教程 力学[M]。高等教育出版社，2007
- 2.蔡子星。第三届UPHO[M]。质心教育网，2016