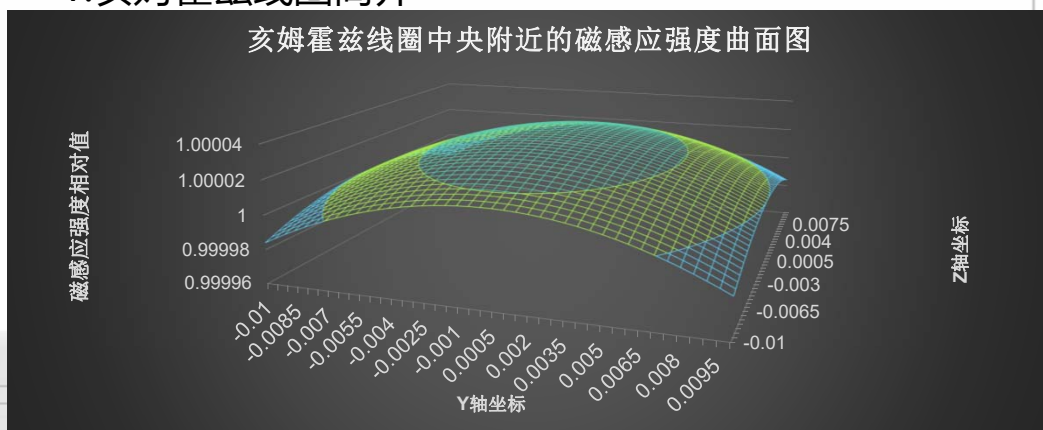


2018中国科大电磁学小论文比赛 张思远

数值差分法探究亥姆霍兹线圈的较优改良方法

二、对亥姆霍兹线圈的分析

▪ 1.亥姆霍兹线圈简介



注：本文中所有计算基于由我自己编写的C#程序，并通过并行计算进行加速。

二、对亥姆霍兹线圈的分析

▪ 2.对亥姆霍兹中心磁场的分析

我们明显地可以看到磁场有着中心强两边弱的趋势。不过在测量的这块很小的区域内起伏不大，相对偏移大约在 10^{-5} 量级。但是这尚未达到我们的需求，我们需要更加精准更加平缓的极均匀磁场。

如何优化线圈产生的磁场？

二、对亥姆霍兹线圈的分析

▪ 2.对亥姆霍兹中心磁场的分析

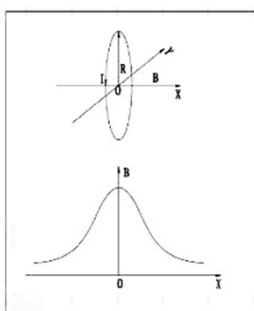


图1. 单个圆环线圈磁场分布

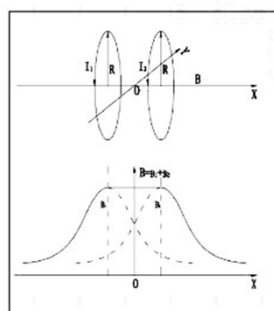
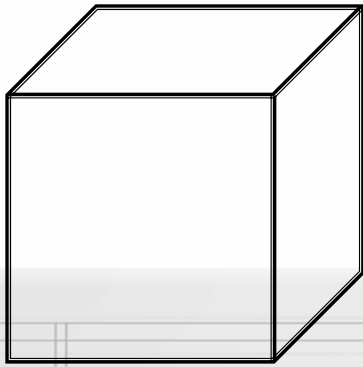


图2. 亥姆霍兹线圈磁场分布

先来看看亥姆霍兹线圈产生的磁场为何如此平缓：一个线圈产生的磁场梯度很大，十分不平均。单线圈中心场强最大，并向两边递减。而亥姆霍兹线圈巧妙地选择了合适的线圈距离，将两个磁场极大值点分开了一段距离，使两个线圈产生的磁场的递减部分互相叠加，磁场梯度相互抵消。这样就消除了原单线圈磁场的较大的变化率，大大增强了磁场的均匀性。

二、对亥姆霍兹线圈的分析

▪ 2.对亥姆霍兹中心磁场的分析

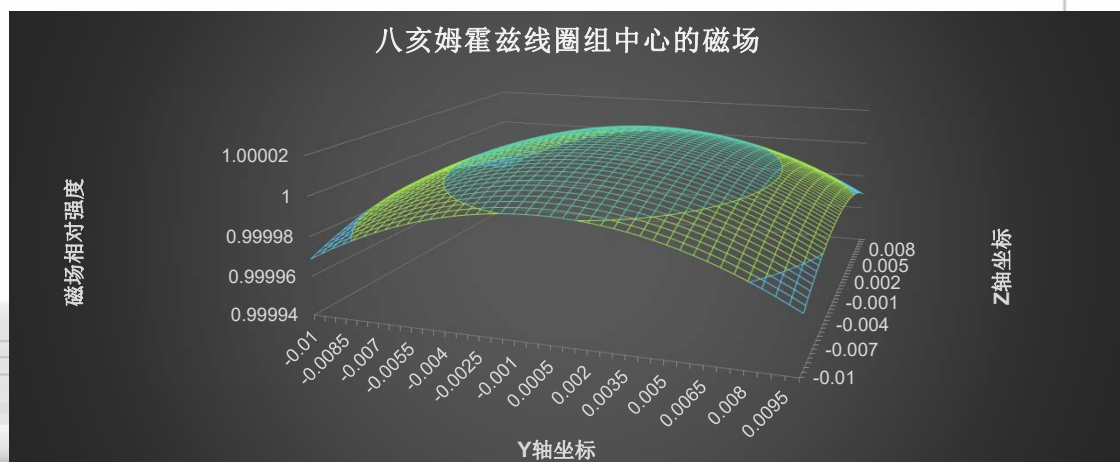


我们在改良亥姆霍兹线圈的时候也可以参照这样的方法。

线圈组对产生的磁场中心强度大，四周强度小，那么如果我们可以合理的位置摆放八组线圈，让它们产生的磁场极大值点分别位于一个小正方体的八个顶点，并且正方体内磁场相互叠加，场强变大到和八个原来的极大值相似的水平。那么这样在这个小正方体内我们就可以获得非常均匀的磁场。

二、对亥姆霍兹线圈的分析

▪ 2.对亥姆霍兹中心磁场的分析



三、动态规划的自动化算法

▪ 1. 基于二分法的算法

我们先来看一下单个亥姆霍兹线圈的情况。

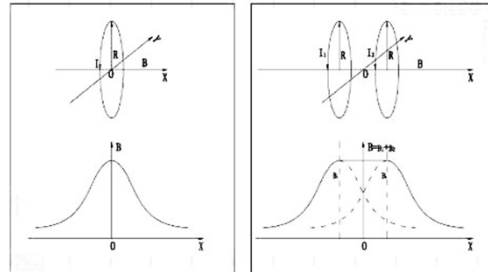


图1. 单个圆环线圈磁场分布

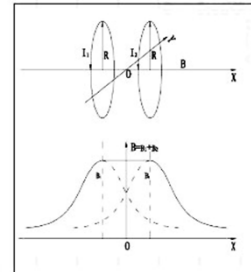


图2. 亥姆霍兹线圈磁场分布

如果我们发现场强有起伏，那应该怎么改进呢？仿照前面，如果中央磁场偏小，那么我们应该尝试一下把线圈靠的近一点；中心偏大则反之。

三、动态规划的自动化算法

▪ 1. 基于二分法的算法

首先，我们利用采样法对磁场进行采样以避免巨大的运算量。我们分别在中心、轴向（z方向），垂直轴向（x方向）离中心点0.005距离单位的地方取样。将之与中心点的磁场采样值进行比较，如果中心较大就视为凸起，如果中心较小就视为下凹。这样做之后，我们就不再需要计算整个磁场了，而只要计算采样点的值就可以进行预估。这样的预估可以大致描绘磁场的形态。

在计算开始时，我们先确定线圈组相隔的最大距离，并在这个距离内搜索。我们暂且把最大距离定为4。

三、动态规划的自动化算法

▪ 1.基于二分法的算法

确定下最大距离后，我们进行采样。

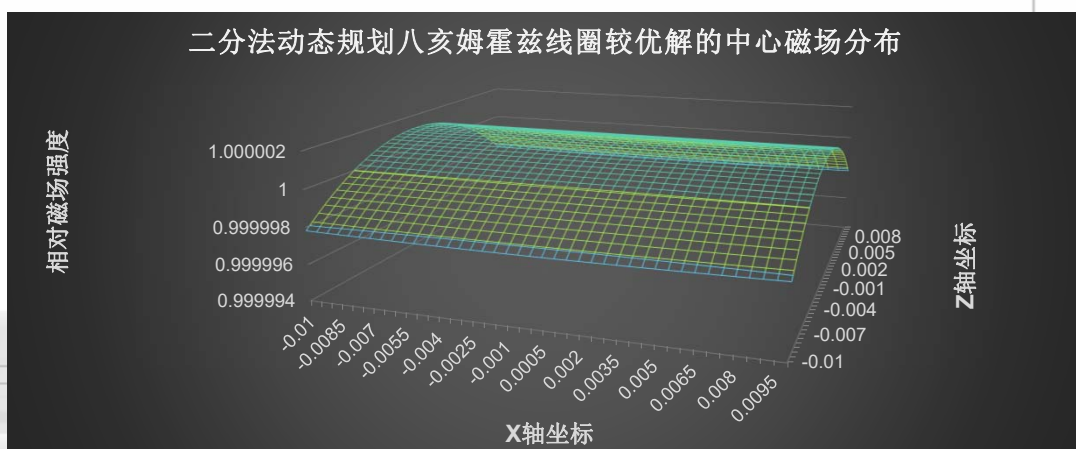
如果采样表明磁场“下凹”，那么表明理想情况下线圈间距应该小于目前的间距，所以我们把当前的间距设定为最大间距，设定这个间距与最小间距（初始值为0）的和的一般为下一个测量的间距。反之亦然。

重复以上过程，不断减小搜索区域，逼近最优解法。

三、动态规划的自动化算法

▪ 1.基于二分法的算法

二分法动态规划八亥姆霍兹线圈较优解的中心磁场分布



三、动态规划的自动化算法

▪ 1.基于二分法的算法

由图我们明显地可以看到，磁场随X坐标变化几乎不变，沿X轴方向十分均匀。但是Z轴方向上还是改变得比较明显。实际上，磁场沿X轴的变化率已经小于double字段的最小精度值，可以予以忽略，而沿Z轴的变化率，大约是普通的八亥姆霍兹线圈组的十分之一。

计算方法的问题：框死某个变量导致后期修正不足。

评价：这个算法将磁场的精度向前推进了一个数量级，并且耗时不长，是一个很不错的运算策略。

三、动态规划的自动化算法

▪ 2.基于遗传算法的采样点动态位置修正

如果x轴磁场中心较大，而且x轴部分比z轴不均匀，那么增大x轴的线圈间隔；

如果z轴磁场中心较大，而且z轴部分比x轴不均匀，那么增大x轴的线圈间隔；

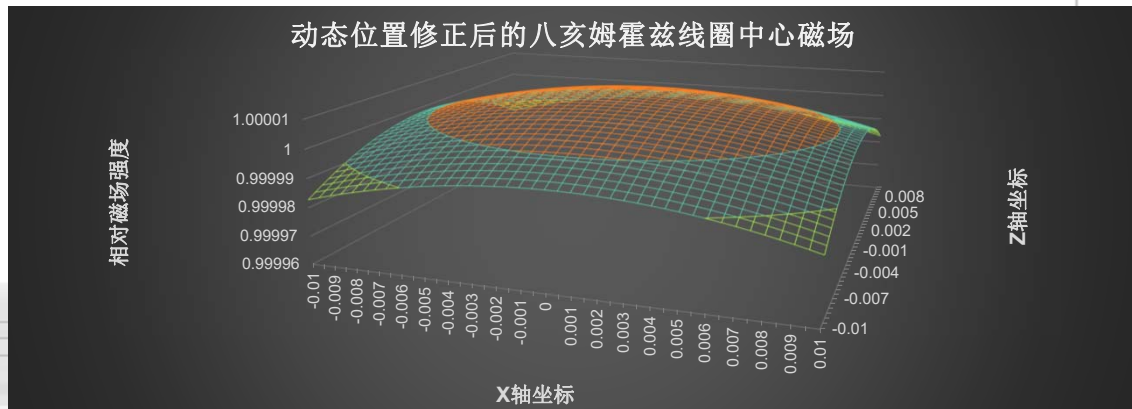
相反亦然。

由于绝对偏差值和离小偏差点的距离存在相对的正相关关系，所以，我们每次对于线圈间隔的增大和缩小的程度是基于磁场的偏差大小的。其大小暂定为相对误差的40倍的单位长度（单位长度即线圈半径）。

经过200次遗传演化后，我们得到了如下结果。

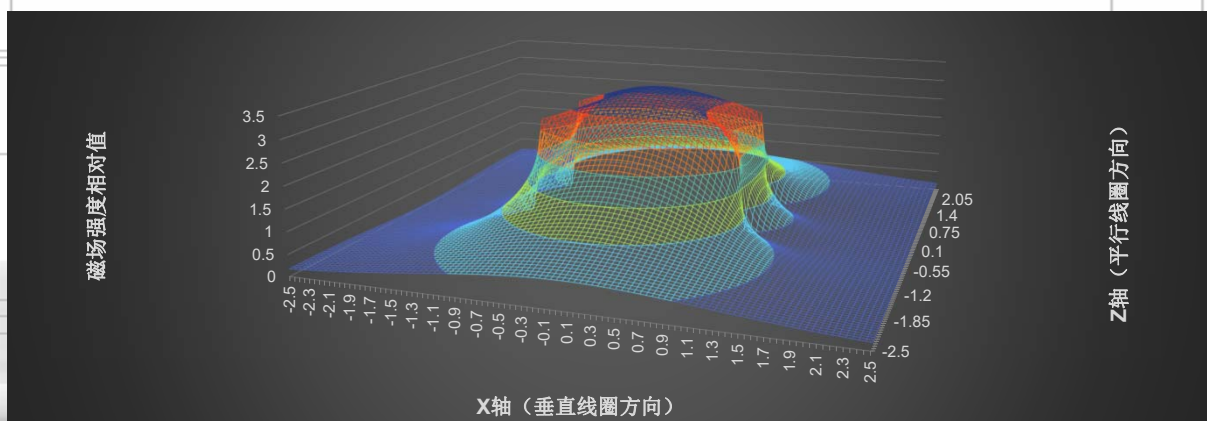
三、动态规划的自动化算法

▪ 2.基于遗传算法的采样点动态位置修正



三、动态规划的自动化算法

▪ 2.基于遗传算法的采样点动态位置修正 重新以更广阔的视角观察亥姆霍兹线圈周围的磁场



三、动态规划的自动化算法

- 2.基于采样点数据的动态位置修正

问题的原因：对于较为简单的场（譬如向心力场）来说，这个方法理应是十分有效的。但是为什么在这里达不到效果，其原因是磁场的构成十分复杂，这个方法只能找到一个靠近偏差极小值的一个点。而磁场强度的分布比较“坑洼”，很难找到最小值。所以，这样的办法可行性还是较低的。

三、动态规划的自动化算法

- 3.使用数据库样本自主构造磁场
- （1）样本采集和使用的简单介绍

线圈组具有柱对称性。只需记录线圈的z轴位置以及到轴线的距离就可确定点。

x轴和y轴方向上的磁场相对强度一般小于 10^8 ，非常微弱，可以予以忽略。

三、动态规划的自动化算法

▪ 3.使用数据库样本自主构造磁场

一组采样点的构成：

5个double字段，分别存储：

- 1、中心的磁场强度大小
- 2、x轴上取样点的磁场强度大小
- 3、x轴线圈间距
- 4、z轴上取样点的磁场强度大小
- 5、z轴线圈间距

三、动态规划的自动化算法

▪ 3.使用数据库样本自主构造磁场

将线圈位置相同的采样点归为一组，作为整体运算。在不同的组中，如果我们能够找到两组或者多组“互补”。那么我们就可以将这两组数据合成一组新的数据，这组新数据的凹凸水平更低。然后利用各个新的线圈数据合成更好的数据。以此往复。

尽管经过了一系列的简化，这样操作的数据量依旧非常大。

另外的一个问题就是在整合的过程中线圈数目增加，导致结果使用的线圈数目繁多。

三、动态规划的自动化算法

▪ 3.使用数据库样本自主构造磁场

(2) 枚举法调取采样构造

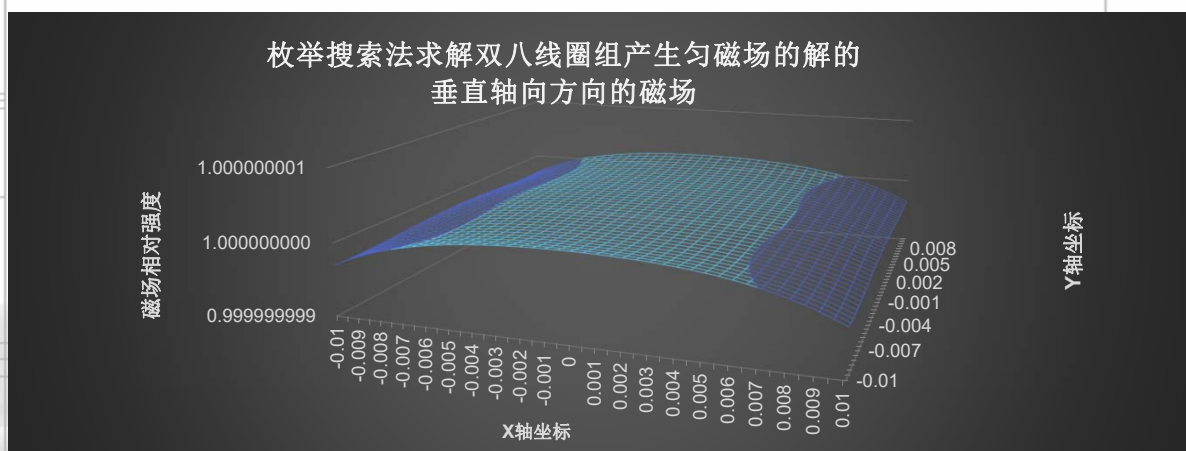
我们选取x轴和z轴的线圈间隔均在3个单位长度内的各种线圈组，x轴和z轴线圈的间隔每隔0.01个单位测试并记录一组，写入数据库，共9万组数据。

每一组数据，我们仅记录场中心的磁场、目标区域内沿x轴和沿z轴方向偏离0.5个区域长度处的磁场，共三个字段。接下来，读取这些数据，通过逐个比较x轴和z轴磁场偏移量，使用上一小节所述的凹凸填补法来枚举搜索出最优秀的解。

这样的算法的确能找到数据库中的最优解，但是数据库内容过于单薄，精度非常低。要寻求更好的解法就必须扩充数据库，不过这将是一项非常耗时的工作。

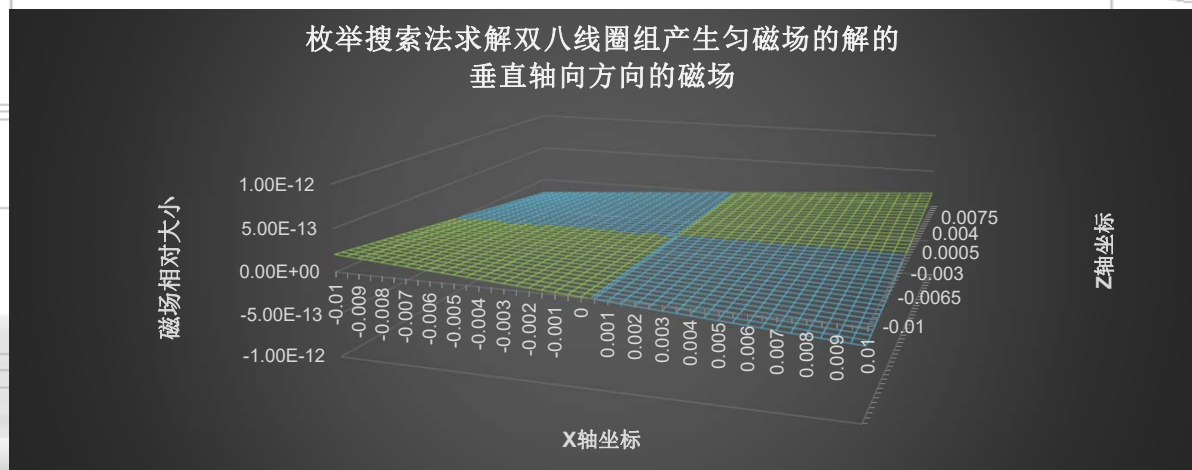
三、动态规划的自动化算法

▪ 3.使用数据库样本自主构造磁场



三、动态规划的自动化算法

▪ 3.使用数据库样本自主构造磁场



三、动态规划的自动化算法

▪ 3.使用数据库样本自主构造磁场

计算结果与上一小节的十分相似，其原因是上一节中计算出的结果中，我们并没有利用到亥姆霍兹线圈中央部分较为平缓的磁场，因为中央磁场的梯度不符合我们的要求，会导致结果磁场“凸起”，因此，计算出的最优解实际上是通过叠加线圈两侧的高梯度磁场而成的。在这一部分的磁场中，亥姆霍兹线圈在这处的磁场和单线圈在这处的磁场十分相似，故将一组线圈替换成单线圈会有类似的效果。

三、动态规划的自动化算法

▪ 4.关于插值法优化

插值法可以运用于大多数类似的问题中，但在该实验中，以失败告终，其原因是复合磁场不够平坦，对于插值处的磁场数值预测不够准确。测试表明，使用线性插值反而会增大结果的不均匀性。

可行办法补充：

我们可以用二次数据库法代替插值的办法，即在上一节数据库采样法的计算结果点附近再次以更精确的间隔进行第二步采样，再使用先前的办法寻找更好的解。

四、附录

▪ 最终计算结果：

共16个线圈，朝向均朝向Z轴。坐标分别为：

(1.81, 1.81, 1.03) (1.81, -1.81, 1.03) (1.81, 1.81, -1.03) (1.81, -1.81, -1.03) (-1.81, 1.81, 1.03) (-1.81, -1.81, 1.03) (-1.81, 1.81, -1.03) (-1.81, -1.81, -1.03) (0.95, 0.95, 1.96) (0.95, -0.95, 1.96) (0.95, 0.95, -1.96) (0.95, -0.95, -1.96) (-0.95, 0.95, 1.96) (-0.95, -0.95, 1.96) (-0.95, 0.95, -1.96) (-0.95, -0.95, -1.96)

它们在范围(-0.01, -0.01, -0.01)到(0.01, 0.01, 0.01)为对顶点的立方体内产生的磁场的平均不均匀度不超过 3×10^{-10} 。

▪ 参考资料：

- 1.《电磁学与电动力学》 胡友秋 程福臻 叶邦角 刘之景 科学出版社
- 2.《CLR via C#》 Jeffrey Richter 清华大学出版社
3. Microsoft开发文档 <https://docs.microsoft.com/zh-cn/>
- 4.《电磁学》 赵凯华 陈熙谋 高等教育出版社

谢谢！