中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

T H E E L E T R O M A G N E T I S M T H E S I S

稳恒β射线束中电子的分布

少年班学院 陈书航 答辩时间：2018年6月

目录 | CONTENTS

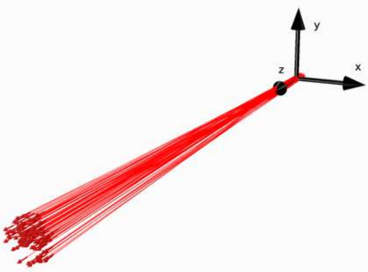
01

背景&摘要

THE ABSTACT AND BACKGROUND

- ✓ 选题背景
- ✓ 文章摘要

选题背景



Comsol模拟的电子传播示意图

本人所在的实验室小组想从电磁最原始的理论里寻求理论的突破，这就必须涉及到电磁波的粒子本质，我们想探究电磁波中光子的统计分布，但问题棘手至极，找不到突破口，工作就此停滞，小组濒临解散。

我对此日思夜寐，在课余提出一种新思路，能否用其他粒子传播中的分布来类比光子的统计分布？或许在其中会有惊喜的发现。

于是，从去年底我就此展开思考，但因时间有限没有深入探究，又恰逢电磁学小论文，从而深入调研。

文章摘要

摘要

摘 要：β射线在真空无外场条件下由于静电斥力的作用，它在传输时总是扩散的。本文根据相对论洛伦兹变换以及牛顿运动定律，研究了β射线束在其自场下的传输和扩散现象，给出了在束流相空间中传输时的传输位相方程和扩散位相方程。然后基于经典统计力学的基本理论，给出了β射线传播时电子统计分布函数满足的微分方程，并讨论了在这个问题中费米-狄拉克分布的合理性。同时对电磁波中光子的分布做了类比的猜想。希望能对研究带电粒子束传播技术提供合理的科学依据。

关键词：β射线；电子束；传输；束流扩散；统计分布函数

Abstract：The electron beam tends to diverge and disperse when it propagates beyond the exit port of the accelerator owing to the mutually repulsive force exerted by the beam's similarly electrons in the absence of an external field and in the environment of a vacuum. The author study the spreading of β-ray propagating in the vacuum of outer space in the effect of self –generated space charge force on the basis of Lorentz Transformation of Relativity Theory and Newtonian Mechanics and deduce a spread phase equation of propagation of electrons in phase space. And based on the theory of classic statistical mechanics, I deduce a differential equation of the distribution function of electrons in β-ray, and I analyze the rationality of Femi-Dirac distribution function in this problem. Then I analogy the distribution of photons in the propagating of electromagnetic wave. I hope it would be useful in the beam of charged particle spreading technology.

Keywords: β-ray; electron beam; propagation; diverge of beam; distribution function

02

研究思路

THE IDEAS IN THE RESEARCH

- ✓ 文章的结构
- ✓ 思路的梳理
- ✓ 模型合理性分析

文章结构

01 建立力学模型

对这样一个稳恒的且高能的β射线模型做出合理适当的简化处理，使得问题可以入手

02 建立扩散方程

通过经典的电磁学理论分析，建立一个含有未知分布函数的扩散方程表达式，并研究其能量

03 建立统计方程

基于经典统计力学的研究，初步确定分布函数大致的形式，并最终得出方程

04 对方程的讨论

探讨国内外文献中关于均匀分布的合理性，探讨费米分布方程的合理解，以及解的形式和性质。

05 思考和类比

利用类似的方法，讨论光子的统计分布方程，并讨论方程的合理性

思路梳理

01 从经典静电学建立模型

先从经典静电学的角度建立起动力学方程，主要是分析动系中的电势和电场，以及静电库仑力

02 应用狭义相对论修正

再利用狭义相对论，在实验室坐标系下的电场修正一个γ，分布函数需要修正一个γ，静电力则修正γ^2

03 运用经典统计力学

运用经典统计力学的基本思想，把统计力学中的分布和模型中的电子分布建立等式联系

04 数学简化计算

将分布函数代入能量表达式中，再利用微分和含参变量积分函数的性质简化方程，得到最简形式

03

文章内容

THE CONTENTS

- ✓ 位相方程
- ✓ 电子能量
- ✓ 统计方程
- ✓ 几点讨论

物理模型和位相方程的建立

圆柱模型

设圆截面方程满足：

$\zeta^2+\eta^2=R^2$ （1）

其中，R是圆的半径.在计算过程中，R可视为束流初始尺寸，电荷密度ρ是ξ的函数，其中ξ满足方程：

$x^2+y^2=\xi^2R^2$ （2）

x和y是流动坐标[2]. 如图1所示，取一薄壁束，其外表面是一个半径为ξ的圆柱面，其内表面是一个半径为$(\xi-\mathrm{d}\xi)R$的圆柱面. 为方便起见，这边的ρ和e都小于0.

电场形式

经过一系列计算和简化电场形式

$$E_r=\frac{\mathrm{r}\mathrm{R}^2}{2\epsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\rho(\frac{r^2}{R^2+s})}{(R^2+s)^2}ds. \quad （3）$$

进一步化简，并令$\frac{r^2}{R^2+s}=k$，则有

$$E_r=\frac{\mathrm{r}\mathrm{R}^2}{2\epsilon_0}\int_0^{\frac{r^2}{R^2}}\frac{1}{r^2}\rho(k)\,dk$$

$$=\frac{R^2}{2\epsilon_0 r}\int_0^{\frac{r^2}{R^2}}\rho(k)\,dk. \quad （4）$$

修正到实验室系

运用狭义相对论修正到实验室系，得

$$F_r=\mathrm{e}\mathrm{E}_r=\frac{\mathrm{e}\mathrm{R}^2}{2\epsilon_0 r}\int_0^{\frac{r^2}{R^2}}\rho(k)\,dk. \quad （5）$$

在实验室坐标系中，根据相对论力学的Lorentz变换[3][4]，则

$$F_r=\frac{\mathrm{e}\mathrm{R}^2}{2\epsilon_0\mathrm{r}\gamma^2}\int_0^{\frac{r^2}{R^2}}\rho(k)\,dk. \quad （6）$$

其中γ是相对论伸缩因子，有

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\beta=\frac{v}{c} \quad （7）$$

位相方程的建立

由牛顿力学得到其传播的位相方程有

$$r'=\pm\sqrt{A\int\phi(r)\frac{\mathrm{dr}}{r}-\mathrm{A}\phi(r_0)\ln\mathrm{r}_0} \quad （8）$$

从而传播方程为

$$z=\pm\frac{1}{\sqrt{A}}\int(\int\phi(r)\frac{\mathrm{dr}}{r}-\phi(r_0)\ln\mathrm{r}_0)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dr} \quad （9）$$

特别地，其扩散方程为（λ为边界位置）

$$z=\pm\frac{1}{\sqrt{A}}\int(\int\phi(\lambda)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}-\phi(R)\ln\mathrm{R})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda \quad （10）$$

其中$\frac{\mathrm{e}\mathrm{R}^2}{2\epsilon_0\gamma^3\beta^2 m_e c^2}=A$，$\int_0^{\frac{r^2}{R^2}}\rho(k)\,dk=\phi(r)$

电子的能量和动量

电子势能的计算

$$U_r = \int_0^r E_l \mathrm{dl} = \int_0^r [\frac{R^2}{2\epsilon_0 l}\int_0^{\frac{l^2}{R^2}} \rho(k)\, dk]\mathrm{dl}. \quad (11)$$

对这个二重积分交换积分次序，得到

$$U_r = \frac{R^2}{2\epsilon_0}\int_0^{\frac{r^2}{R^2}} \rho(k)\ln\frac{r}{R\sqrt{k}}dk. \quad (12)$$

进一步，则可得到势能$\epsilon_p(r)$，有$\epsilon_p(r) =$

$$\frac{\mathrm{eR}^2}{2\epsilon_0}\int_0^{\frac{r^2}{R^2}} \rho(k)\ln\frac{r}{R\sqrt{k}}dk. \quad (13)$$

电子的动量

接下来在运动系中考虑横向动量.首先在实验室系中我们有r'的位相方程，而

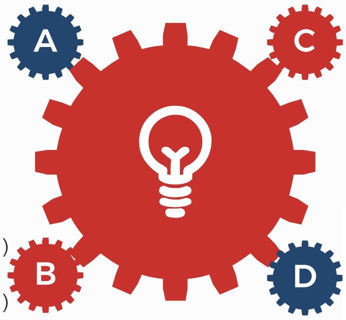
$$r' = \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dz}}, 则 \mathrm{v}_r = \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dz}}\cdot\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = r'v \quad (14)$$

则在运动系中，由Lorentz变换，有

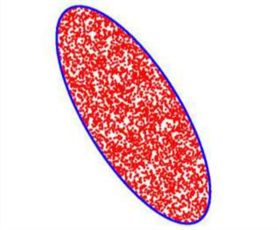
$$v'_r = \frac{v_r}{\gamma} = \frac{r'v}{\gamma} = \frac{r'\beta c}{\gamma} \quad (15)$$

则在运动系中的横向动量

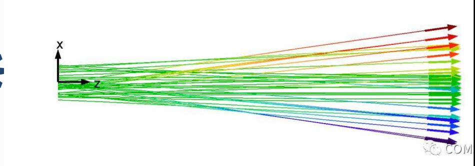
$$p'_r = m_e v'_r = m_e\frac{r'\beta c}{\gamma} \quad (16)$$



电子分布示意图



Comsol模拟的二维电子传播图



统计分布微分方程的建立

电荷体密度函数改写成分布函数的形式

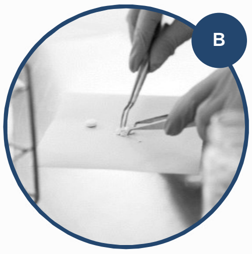
此这里实际上用到在微小改变dz内，λ视为不变. 设在某处体积元dV内有$f(k)$个电子，则由电荷守恒有

$\mathrm{dQ} = \mathrm{ef}(k)\mathrm{dV} = \rho(k)\mathrm{dV}$

故$\mathrm{ef}(k) = \rho(k)$.

事实上，由前述结论就很容易看出. 在前面我们已经得到在r处单个电子的能量$\epsilon(r)$，我们只需要知道在这个体积元dV内的电子总个数，根据分布函数，有

$\mathrm{dN} = f(\frac{r^2}{R^2})\mathrm{dV}$



用回代法建立方程

我们不能断言它的分布就是费米分布，也许对费米分布需要进行修正，但这里毋庸置疑的是，这个未知的分布是关于能量的函数，即$f' = f'(\epsilon(r))$.这个式子的含义是在能级为$\epsilon(r)$处的粒子个数. 令$f'(\epsilon(r)) = n(r)$.从粒子数守恒的角度去讨论$n(r)$和$f(k)$之间的关系. 在一个宽度为dr、长度为dz的小圆柱薄壁中，电子数满足

$$\mathrm{dN} = n(r)\mathrm{drdz} = \int_0^{2\pi} f(\frac{r^2}{R^2})\mathrm{rd\theta drdz} =$$

$$2\pi\mathrm{f}(\frac{r^2}{R^2})\mathrm{rdrdz} \quad (17)$$

故有$n(r) = 2\pi\mathrm{f}(\frac{r^2}{R^2})r$ (18)

而 $n = f' \circ \epsilon$

因此 $f(k) = \frac{f'\circ\epsilon(R\sqrt{k})}{2\pi\mathrm{R}\sqrt{k}}$ (19)

代回（13）式有

$$\epsilon(r) = \frac{e^2R^2}{4\pi\epsilon_0\gamma^2}\int_0^{\frac{r^2}{R^2}} \frac{f'\circ\epsilon(R\sqrt{k})}{R\sqrt{k}}\ln\frac{r}{R\sqrt{k}}dk \quad (20)$$

令$l = R\sqrt{k}$，作换元后，有

$$\epsilon(r) = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0\gamma^2}\int_0^r f'(\epsilon(l))\ln\frac{r}{l}dl \quad (21)$$

很快可以求出右边对r的导数

$$\epsilon'(r) = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0\gamma^2}\int_0^r \frac{f'(\epsilon(l))}{r}dl \quad (22)$$

将r移至左边，再求导得

$$\epsilon'(r) + \mathrm{r}\epsilon''(r) = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0\gamma^2}f'(\epsilon(r)) \quad (23)$$

对于方程的讨论

D 对其他文献的质疑

在文献[4]给出的算例中，能量E=1000MeV，流强I=1kA，出口初始半径R=10cm，在真空中传输距离z=1000km，由扩散方程得到的扩散半径为10.9m.我们假设这样系统的源发出均匀分布的带电射线，则在经过一段纵向位移z后，显然，由于存在不可避免的扩散，分布的体电荷密度ρ会在不同位置呈现不同的值.说明像[4][5][6]中这样的扩散理论在远距离下肯定是十分不准确的，甚至在更大的空间尺度下是失效的.而若能得到具体的分布函数，就能根据扩散方程（10）式得到更精确的扩散半径.

F 费米狄拉克分布

对于费米−狄拉克分布函数，有

$$f'(\epsilon(r)) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon(r)-\mu}{\mathrm{kT}}}+1} \qquad (24)$$

对于费米分布函数，（23）式改写成

$$\epsilon'(r) + \mathrm{r}\epsilon''(r) = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0\gamma^2}\frac{1}{e^{\frac{\epsilon(r)-\mu}{\mathrm{kT}}}+1}$$

（25）

费米分布如果自洽，（25）式应有合理解.这里合理解的含义是，解出的$\epsilon(r)$在区间$[0,\lambda]$上必须是关于r的有限单调函数并取值有意义. 事实上，在常微分方程和计算数学的理论中，这个方程是没有解析解的，但是可以用函数项级数逼
这里由于笔者水平有限，暂不能做进一步的讨论.

内涵

若后续解出（23）式的函数系，或者能找到一个满足（23）式的合理近似解，并代回扩散方程式（10），这将更精确地给出在给定源出口半径R及传输距离z的情形下的扩散半径，在带电粒子束光学和粒子束传播学中将会有一定的意义。这是一个不够成熟的理论，之后需要做的修正和弥补工作是很多的。

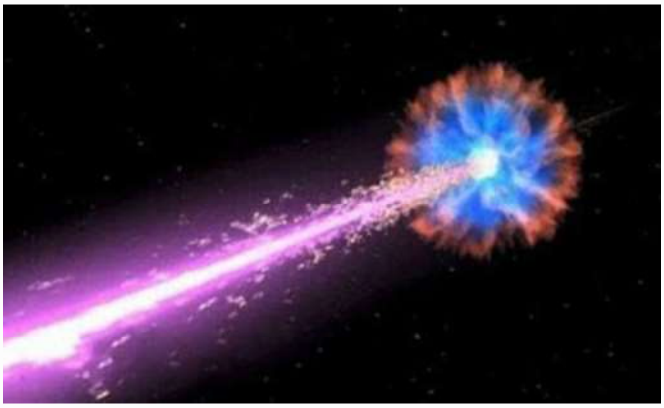
04

分析与类比

THE ANALYSIS AND ANALOGY

- ✓ 研究合理性分析
- ✓ 电磁波
- ✓ 统计微分方程
- ✓ 光子的统计

研究合理性分析



01 圆柱模型分析的合理性

在文章中从圆柱模型入手，不失其合理性，因为这样的粒子扩散作用微小的纵向延伸内，在横向的变动是很微弱的，这可以根据文献[4]给出的估计看出，也可以从后面的分析看出。另外文献[2]也给出了同样的简化

02 关于分布函数的合理性

文章中假设的分布函数是径向的分布，而和纵向无关。由相对论的角度可以得知，纵向的洛伦兹变化显含时间变量的，这其实与稳恒矛盾，故，这样的假设在系统稳恒的条件下是合理的

03 统计分布函数形式的合理性

由于系统是非完全自由的电子，其在自场中受到自场势的约束，故假设分布和势能之间的函数关系完全合理

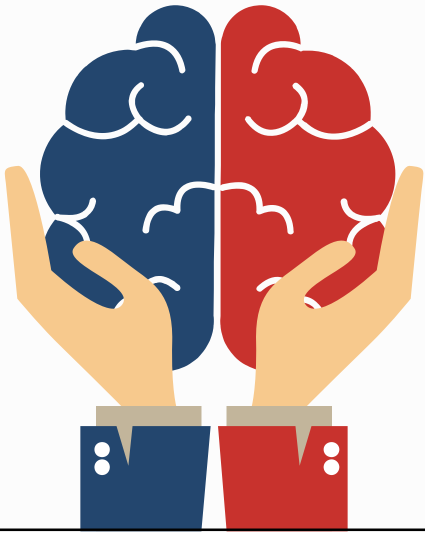
类比思考

基于经典模型

先假设出分布函数，再利用经典模型求出能量的表达式

运用经典的统计

运用经典的统计建立方程，得出分布和能量之间的微分方程的联系。再尝试对具体的分布形式得到它的位置分布



基于麦克斯韦的理论

基于麦克斯韦的理论可以求出具体未知的能量密度，并先假设出分布函数的形式

从粒子的角度

最后从粒子的角度，统计某处的光子数个数，通过能量的广延性建立联系

光子的统计

1 **电磁波的能量密度**

在电磁学的课程中我们已经得到一个清晰的结果，

即 $w(\vec{r})=\frac{1}{2}\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r})+\frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{H}(\vec{r})$ （26）

2 **统计方程**

对于天线系激发的电磁波，在$\vec{r}$处，假设分布函数为f，则f为w的函数，即$f= f(w(\vec{r}))$，则在$\vec{r}$处，粒子数个数为，$dN=f\left(w\left(\vec{r}\right)\right)dV$设电磁波频率为$\nu=\nu(w(\vec{r}))$，则能量为[12]

$dE=h\nu\, dN=h\nu(w(\vec{r}))f(w(\vec{r}))\,dV$ （27）

3 **建立方程**

由（27）式，可以得出$h\nu(w(\vec{r}))f(w(\vec{r}))=w(\vec{r})$（28）

这就是光子统计分布函数方程，这里就止步于此，不再做过多讨论了。

05

意义&不足

THE PROSPECT AND WEAKNESS

- ✓ 意义和创新
- ✓ 前景
- ✓ 不足之处
- ✓ 参考文献

意义和创新

01

实验室的科研工作

通过研究β射线中的电子分布，运用类比的方式，为小组的科研工作提出一种新的思路。

02

国内外粒子束扩散的研究

入手此题后，通过不断地阅读文献，发现国内外关于带电粒子束扩散的研究屡见不鲜，但几乎都有一个致命错误，他们视分布函数为常数来研究，必然带来很大的误差。

03

动系中的统计分布

本文基于狭义相对论，对一个稳恒的β射线系统展开统计分布的研究，这种基于在运动的系统中的统计是几乎没有文献可借鉴的，在此无论对错与否，暂先给出这样的讨论。

04

加速器粒子动力学

在加速器粒子动力学和粒子束传播技术的不断发展下，带电粒子束在空间中传播时的扩散效应越来越重要，本文基于稳恒β射线研究，为加速器粒子动力学的相关问题提供思路。

不足之处

1

模型不够普适

本文所讨论的是稳恒β射线系统的模型，这样一来，不会在纵向产生分布的影响。然而这样的稳恒条件在科学研究中并不普适，只有在太空中长距离传播的β射线束可能适合，对于其他模型，还需进一步修正。

2

没有得到方程的最终解

本文基于统计力学的理论分析，得到了一个微分方程，限于数学能力和时间问题，没有在后面进一步讨论方程的解。

3

对光子模型的分析没有深入

本文末尾研究了光子的统计方程，但是对于这个方程也没有进一步地去解，但在后面的工作中，会着重于此，并基于其它理论试验证方程形式的正确性。

参考文献

[1] 吕建钦. 带电粒子束光学[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
[2] 罗应雄. 带电粒子束的自场[M]. 北京：科学技术文献出版社，1994
[3] 刘辽，费保俊，张允中. 狭义相对论[M]. 第2版. 北京：科学出版社，2008.
[4] 戴宏毅，王同权，肖亚斌. 带电粒子束自生力对束流扩散的影响[J]. 国防科技大学学报，2000，第22卷 第4期.
[5] Bekefi G, et al. Particle Beam Weapons; A Technical Assessment[R]. Nature，1980.
[6] Parmentola J,Tsipis K. Particle Beam Weapons[J]. Scientific American, 1979.
[7] 高执棣，郭国霖. 统计力学导论[M]. 北京：北京大学出版社，2004.
[8] 张玉明. 热学[M]. 第2版. 北京：科学出版社，2006.
[9] 朱晓东. 热学[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2014.
[10] （美）大卫J. 格里菲斯. 电动力学导论：翻译版[M]. 北京：机械工业出版社，2014.
[11] 胡友秋，程福臻，叶邦角，刘之景. 电磁学与电动力学[上册][M]. 第2版. 北京：科学出版社，2014.
[12] 章冠人. 光子流体动力学理论基础[M]. 北京：国防工业出版社，1996.
[13] 常庚哲，史济怀. 数学分析教程.下册[M]. 北京：高等教育出版社.

THANK YOU FOR LISTENING

答辩完毕 谢谢

感谢各位老师、同学的批评指正