中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

COMSOL模拟各向异性电介质的极化

报告人：毕书显

1

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

2

一. 各向异性电介质的性质

极化强度与电位移矢量的关系

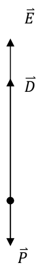
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

在各向异性电介质中，各个方向电场对极化都有贡献

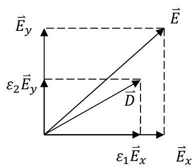
$$\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E}_x + \varepsilon_2 \vec{E}_y + \varepsilon_3 \vec{E}_z$$

介电常数的张量形式

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$



各向同性电介质



各向异性电介质

3

一. 各向异性电介质的性质

泊松方程形式的改变

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \longrightarrow \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \varepsilon_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = -\rho$$

进行一次坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_0}} y_1 \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_0}} y_2 \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_3}}{\sqrt{\varepsilon_0}} y_3 \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_3^2} = -\frac{\rho(\overrightarrow{r_y'})}{\varepsilon_0}$$

回归各向同性电介质时的形式

4

一. 各向异性电介质的性质

电势的积分表达式

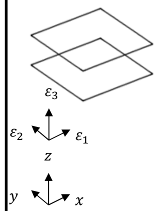
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}} \iiint \frac{\rho(\vec{r'})}{\left(\frac{x_1^2}{\varepsilon_1}+\frac{x_2^2}{\varepsilon_2}+\frac{x_3^2}{\varepsilon_3}\right)^{\frac{1}{2}}} dV$$

场强的积分表达式

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{\gamma}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}} \int_{\Omega} \frac{\frac{x_1}{\varepsilon_1}\vec{e_1}+\frac{x_2}{\varepsilon_2}\vec{e_2}+\frac{x_3}{\varepsilon_3}\vec{e_3}}{\left(\frac{x_1^2}{\varepsilon_1}+\frac{x_2^2}{\varepsilon_2}+\frac{x_3^2}{\varepsilon_3}\right)^{\frac{3}{2}}} \rho(\vec{r'})\,\mathrm{d}\Omega$$

二. 平行板电容器的简单求解

做一次广义柱坐标变换



$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\varepsilon_1} r \cos\theta \\ x_2 = \sqrt{\varepsilon_2} r \sin\theta \\ x_3 = \sqrt{\varepsilon_3} y_3 \end{cases}$$

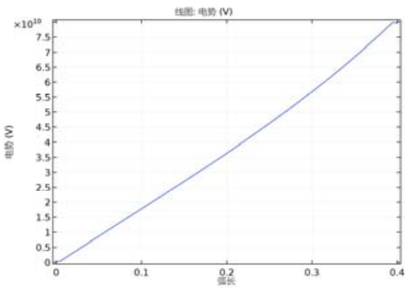
$$\vec{E}_z(\vec{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_3} \int_0^{+\infty} \frac{r y_3}{(r^2+y_3^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_3}$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_3} d \quad \xleftrightarrow{\text{对比各向同性}} \quad \varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon} d$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

二. 平行板电容器的简单求解



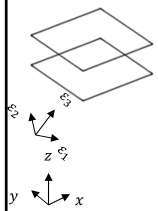
电势-距离关系

7

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

二. 平行板电容器的简单求解

如果错开一个夹角呢？



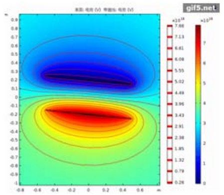
之前求解过程中利用的对称性失效，如果要得到解析解，需要求解复杂的数学物理方程。

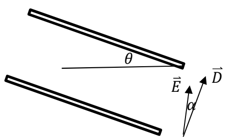
对于带电球面，圆柱面的求解同样面临了复杂的数学物理方程，如果我们只是想定性地了解各向异性电介质所带来的效应，不妨使用有限元的方法求得数值解分析即可。

8

三. COMSOL对于更复杂情况的模拟

平行板电容器错开夹角





在错开夹角后，等势线不与极板平行

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}_x}{\varepsilon_1} + \frac{\vec{D}_y}{\varepsilon_2} + \frac{\vec{D}_z}{\varepsilon_3}$$

$$\downarrow$$

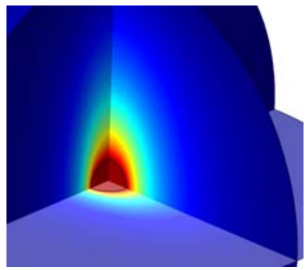
$$\cos\alpha\left(\vec{E},\vec{D}\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\varepsilon_2 sin^2\theta + \varepsilon_1 cos^2\theta}{{\varepsilon_2}^2 sin^2\theta + {\varepsilon_1}^2 cos^2\theta}$$

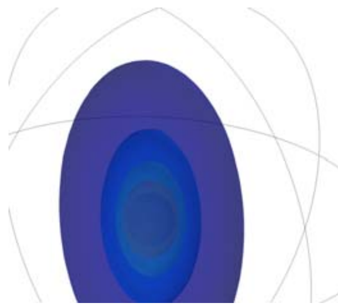
三. COMSOL对于更复杂情况的模拟

带电球面各个方向上的电势分布

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

带电球面的椭球面簇等势面

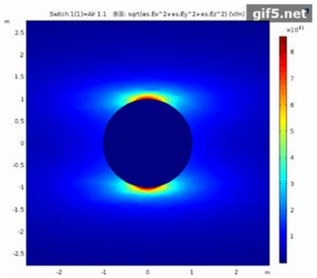




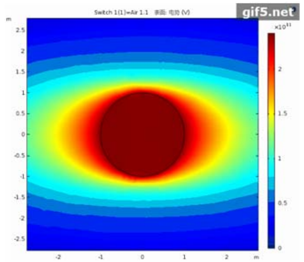
三. COMSOL对于更复杂情况的模拟

带电球面在不同介电常数下的解

ε_2从1—9变化，ε_1 =10



$E(V/m)$



$U(V)$

四. 结论

对于各向异性电介质来说，如果想要求出其场强、电势的解析解，需要解非常复杂的数学物理方程。但是定性的我们有：

1. 对于三个主轴方向，该方向的介电常数越大，则该方向的极化强度越大、电场强度越小。
2. 从一般到特殊的角度去考虑，根据COMSOL的模拟结果，可以认为带电球面在空间中的等势面为一簇椭球面；无限长带点导体在空间中的等势面为一簇椭圆柱面。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

THANK YOU!

13