平行板电容器边缘效应的讨论

莫海歌

边缘效应

- 电容式传感器极板之间存在静电场，使边缘处的电场分布不均匀，造成电容的边缘效应，这相当于在传感器的电容里并联了一个电容，这就叫边缘效应。
- 不利影响：会引起极板间的电场分布不均，导致非线性问题仍然存在，且灵敏度下降。

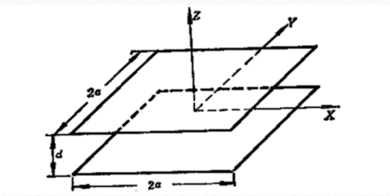
问题分析

- 极板为无穷大平面时，电荷分布是均匀的，直接对平面进行积分即可。但是当极板有限时，电荷就不是均匀分布的。根据经验，电荷一般分布在尖端处，平缓的地方电荷反而较少。
- 根据一块极板的电势处处相等，可以列出积分方程：

$$V=\iint_{S_{上}}\frac{\sigma(x',y')}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}dx'\,dy'+\iint_{S_{下}}\frac{-\sigma(x',y')}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+d^2}}dx'\,dy'$$

方程说明

- 根据对称性，上下极板对应的面电荷密度应该相反。即 $\sigma_{上}(x',y')=-\sigma_{下}(x',y')$。
- 极板上一点处的电势可通过对上下极板的全电荷积分得到，根据电势处处相等的性质，此积分结果设为V。
- 原方程是一个积分方程，可以采用矩量法计算其数值解。



若非齐次方程

$$L(f) = g \qquad (1)$$

式中L是线性算子，g为已知函数，f为未知函数。令f在L定义域中被展开为f_1, f_2, f_3 ...的组合：

$$\sum_n \alpha_n f_n = f \qquad (2)$$

式中α_n是系数，将(2)代入(1)得：

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g \qquad (3)$$

在 L 的值域上定义一个权函数$W_1, W_2, \ldots$的集合，并对每个W_m取式(3)的内积，则

$$\sum_n \alpha_n < W_m, L(f_n) > = < W_m, g > \qquad (4)$$

式中$m = 1,2,3 \ldots$ 此方程组写成矩阵形式： $[l_{\mathrm{mn}}][\alpha_n] = [g_n]$ (5)

其中 $$[L_{\mathrm{mn}}] = \begin{pmatrix} < W_1, L(f_1) > & < W_1, L(f_2) > & \ldots \\ < W_2, L(f_1) > & < W_2, L(f_2) > & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad (6)$$

$$[g_m] = \begin{pmatrix} < W_1, g > \\ < W_2, g > \\ \ldots \end{pmatrix} \quad , \quad [\alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \end{pmatrix} \qquad (7)$$

若矩阵非奇异，则存在逆矩阵$[L^{-1}]$，则便为$[\alpha_n] = [l_{\mathrm{mn}}^{-1}][g_m]$ (8)

F 的解由(2)得出。

矩量法

- 将待求函数分解成n个基函数之和，即把原函数方程分解成n个方程之和。其中基函数和变换后的函数均已知，只需求n个未知系数。
- 此时可选取n个不同的检验函数对方程求内积，将函数方程转化为普通的代数方程，n个检验函数将产生n个方程，便可以解出n个系数。
- 基函数分为全域基函数和子域基函数：

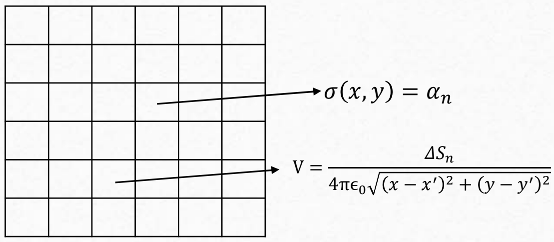
  1. 全域基函数：收敛快，但往往不事先了解特性，很难找到合适的基函数

  2. 子域基函数：简单灵活，不受未知函数的约束，但收敛较慢，需要更多的分段数。

矩量法

点匹配

- 若检验函数使用狄拉克函数，内积则变成该函数在一点处的取值。
- 实质上就是取函数的定义域内n个点，产生n个代数方程，便可解出n个系数。



设面电荷已知，对其积分，可得到电压

解题过程

- 1. 分解面电荷密度函数：$\sigma=\sum\alpha_n f_n$，其中 $f_n=\begin{cases}1 & 在\ \Delta S_n 内\\ 0 & 在其他\ \Delta S_m\end{cases}$ 。
- 2. 分解积分方程中的σ：$V=L_t\left(\sum\alpha_n f_n\right)-L_b\left(\sum\alpha_n f_n\right)=\sum(L_t(f_n)-L_b(f_n))\alpha_n$ ，得到一个含有n个未知量的新方程。
- 3. 代入n个点坐标，产生n个方程，并计算出这些方程的系数。
- 4. 根据方程解出α_n，此即为σ在区域ΔS_n内的值。

- f_n只在相应的块ΔS_n内定义为1，其余为0。故

$$L_t(f_n)=\iint\limits_{S_上}\frac{f_n(x',y')}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}dx'\,dy'$$

只在ΔS_n内对$\frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}$积分，可近似为

$$L_t(f_n)=\frac{\Delta S_n}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}$$，其中 x' y' 已知，为ΔS_n的中心坐标。下面对每个分量f_n分别代入ΔS_n的坐标即可计算出方程系数。

系数计算

- 然而在将n个(x,y)坐标代入$L_t(f_n)$时遇到了分母为零的情况，原因在于当(x,y)的坐标与f_n定义域内的ΔS_n坐标(x',y')相重合时，$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$为零。但显然，此时$L_t(f_n)$表示的是该ΔS_n在自身处所产生的电势，应单独计算。

$$\int_{-b}^{b}dx\int_{-b}^{b}dy\frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{b*\mathrm{ArcCosh}(17)}{2\pi\epsilon_0}=\frac{2b*0.8814}{\pi\epsilon_0}$$

特殊处理

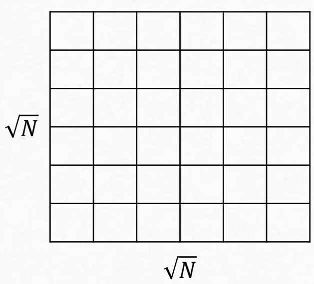
特殊处理

- 同理，当$d \to 0$时，$L_b(f_n)$也会发散，此时也应单独计算，即$\varDelta S_n$在其上方距离为d处产生的电势。简单起见，$\varDelta S_n$用相同面积的圆来近似。结果为

$$\int_0^{\frac{2b}{\sqrt{\pi}}} d\theta \int_0^{2\pi} dr \frac{r}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+d^2}} = \frac{-d+\sqrt{d^2+\frac{4b^2}{\pi}}}{2\epsilon_0} = b * \frac{\frac{-d}{b}+\sqrt{(\frac{d}{b})^2+\frac{4}{\pi}}}{2\epsilon_0}$$

编程实现

- 把正方形平行板分成$\sqrt{N} \times \sqrt{N}$的小块，每块均为边长为$2b = \frac{2a}{\sqrt{N}}$的小正方形。再取得各小块坐标，根据坐标代入前式，算出L_{mn}^t和L_{mn}^b的项，相减求逆再与$[g_n]$相乘即可得到系数矩阵，也就是各块ΔS_n的上的面电荷密度。



capdoublesquare.m C_d.m test.m

```
function C=capdoublesquare(a,d,N)
n1=sqrt(N);
b=a/n1;
e1=1e-9;
E=1/36/pi*e1;
x=zeros(1,n1);
y=zeros(1,n1);
for i=1:n1
    for j=1:n1
        k=n1*(i-1)+j;
        x(k)=2*(i-1/2)*b-a;
        y(k)=2*(j-1/2)*b-a;
    end
end
ltt=zeros(N,N);
ltb=zeros(N,N);
for m=1:N
    for n=1:N
        if m==n
            ltt(m,n)=2*b/pi/E*0.8814;
            ltb(m,n)=b/2/E*(sqrt(4/pi+(d/b)^2)-d/b);
        else
            ltt(m,n)=b^2/pi/E/sqrt((x(m)-x(n))^2+(y(m)-y(n))^2);
            ltb(m,n)=b^2/pi/E/sqrt((x(m)-x(n))^2+(y(m)-y(n))^2+d^2);
        end
    end
end
L1=ltt-ltb;
L2=inv(L1);
Lsum=sum(sum(L2));
C=4*b^2*Lsum;
```

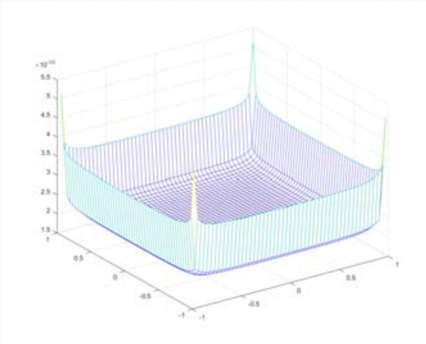
程序代码

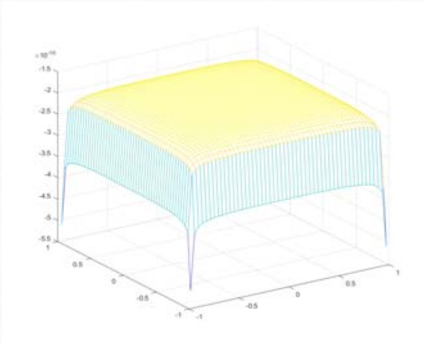
capdoublesquare.m C_d.m test.m

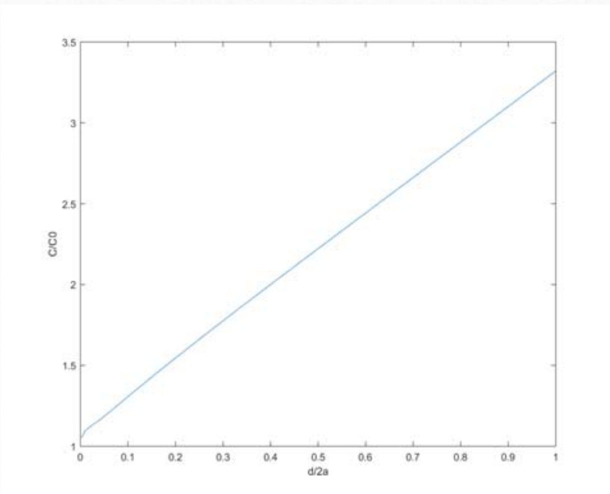
```
C=zeros(1,20);
C0=zeros(1,20);
E=8.85418782e-12;
d=(0:0.05:1).^2*2;
for i=1:20
    C(i)=capdoublesquare(1,d(i+1),2500);
    C0(i)=4*E/d(i+1);
end
plot(d(2:end)/2,C);
plot(d(2:end)/2,C./C0);
```

程序代码

结果分析







电容趋势

结论

上述推导过程使我对于电容器的边缘效应及其影响有了更深的认识，也给如何减少电容器的边缘效应提供了一些借鉴。

首先尽量增加面积或者减少板间距，以使电容器更加接近无限大的平行板电容。其次由于边缘效应的存在使得电容器的电容值出现偏差，实际使用过程中应该考虑到这一点，进行相应的补偿措施。最后，由于尖端效应导致的电荷大量聚集在边缘和尖角而产生漏电、存在较强的边缘场等问题在应用中应采取相应的防护，或者可以采用圆形平行板电容器降低尖端效应。

谢谢大家