



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

最小作用量原理 在电磁学中的几个应用

PB17010421 邵锋

目录



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

- 引言
- 光学与力学中的最小作用量原理
- 用最小作用量原理简释静电平衡
- 一个常用结论的严格证明
- 最小作用量原理在电路中的应用
- 磁作用量与洛伦兹力
- Maxwell方程组与最小作用量原理的联系
- 总结



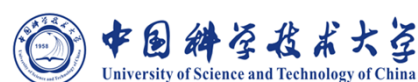
引言



最小作用量原理是物理学中描述客观事物规律的一个重要原理。其内容是说：从某一个特定角度比较客体一切可能的运动（经历），认为客体的实际运动（经历）可以由作用量求极值得出，作用量最小的那个经历即为客体的实际经历。

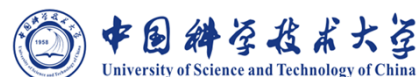
最小作用量原理起初由几何光学和牛顿力学共同启蒙，最后却发展为适用于整个物理学和自然运动规律的基础性理论。其重要性是不言而喻的，传言费曼（Richard Phillips Feynman, 1918~1988）上高中时听到老师讲最小作用量原理的时候被深深震撼了，好像是窥见了上帝设计世界的图纸。

引言



我们将先从光学与力学的角度来介绍一下最小作用量原理，然后尝试利用最小作用量原理来解释一些电磁学中的现象，并解决一些电磁学中的基本问题。

光学与力学中的最小作用量原理



在物理学中成功使用“最小作用量”观念的最早一个例子，是几何光学中的费马（Pierre de Fermat, 1601~1665）原理[1]：光沿所需时间为极小值的路径传播。

在费马原理中，“作用量”为光程：折射率×光经过的距离。用费马原理可以推导出下面三条定律：

- a) 光线在真空中的直线传播。
 - b) 光的反射定律：光线在界面上的反射，入射角必须等于出射角。
 - c) 光的折射定律（斯涅尔定律）。
- 这三条定律是几何光学的基础。

[1] 崔宏滨，李永平，段开敏. 光学[M]. 北京：科学出版社. 2011: 234.

光学与力学中的最小作用量原理



在力学中，力学系统运动规律的最一般表述由最小作用量原理（或者哈密顿（William Rowan Hamilton, 1805~1865）原理）给出[1]。根据这个原理，每一个力学系统都可以用一个确定的函数

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$$

表征，并且系统的运动还要满足下面的条件：

假设在时刻 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 系统的位置由两组坐标 $q(1)$ 和 $q(2)$ 确定，那么，系统在这两个位置之间的运动使得积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

取最小值。在哈密顿原理中，作用量就是这个积分。

[1]（俄）朗道，栗弗席兹. 译者：李俊峰，鞠国兴. 理论物理学教程第一卷——力学（第五版）[M]. 北京：高等教育出版社. 2010: 2.

用最小作用量原理简释静电平衡



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

静电平衡是指导体中的电荷处于稳定状态.均匀导体达到静电平衡的条件是导体内部的合场强处处为零.导体中（包括表面）没有电荷定向移动的状态叫做静电平衡状态.

如图1所示，半径分别为 r 和 R 的同心金属球面以细导线相连，已知整个系统带有电荷 Q ，当系统处于静电平衡时，求内球所带的电荷 q 。

显然 $q=0$,我们现在用静电能最低来证明.

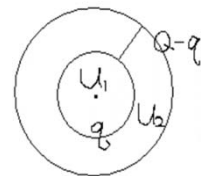
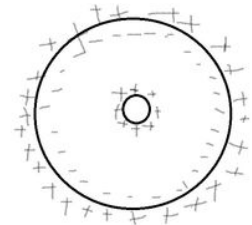


图1

用最小作用量原理简释静电平衡



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

设系统的静电能为 W ，根据对称性，内外球面上的电荷都是均匀分布的，则

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} q U_1 + \frac{1}{2} (Q - q) U_2 \\ &= \frac{1}{2} q \left(\frac{kq}{r} + \frac{k(Q - q)}{R} \right) + \frac{1}{2} (Q - q) \left(\frac{kq}{R} + \frac{k(Q - q)}{R} \right) \\ &= \frac{1}{2} kq^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{2} \frac{kQ^2}{R} \end{aligned} \quad W' = kq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

由 $W'=0$ 可得， $q=0$.又当 $q=0$ 时， $W'' = k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) > 0$ ，于是系统的静电能 W 取得最小值.

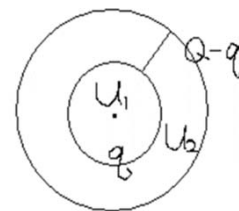
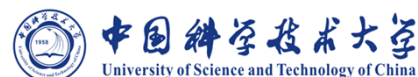
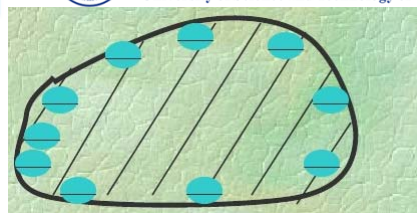


图1

用最小作用量原理简释静电平衡



对于一般的导体，可以证明静电平衡时导体的能量一定处于唯一的最低状态，在此只做定性分析，不给出严格证明。



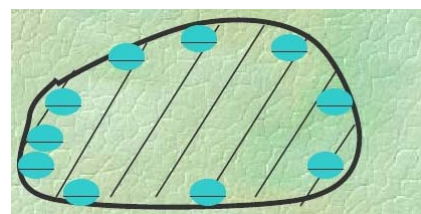
假设我们已知某一导体系统静电平衡时的电荷分布（可以认定分布在一定范围内是连续的），则在这个平衡态附近的非平衡态必将自发地向这个平衡态靠拢，最终达到这个平衡态。在这一过程中，从宏观上看电荷在电场作用下发生运动从而产生电流，达到平衡态时，电荷不再有宏观移动，从而电流消失。

用最小作用量原理简释静电平衡



无论从电荷运动角度还是从宏观电流角度分析，系统均有能量的耗散：

- 从电荷运动的角度来看，电荷移动的停止意味着电荷的平动动能消失；
- 从宏观电流的角度来看，系统在调整电荷分布的过程中，产生的电流以焦耳热效应消耗能量。



系统平衡态的电场能小于在它附近非平衡态的电场能，即静电平衡时导体的静电能取得极小值。由静电场的唯一性定理可知，这个极值点是唯一的。

一个常用结论的严格证明

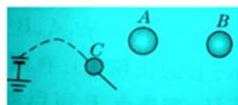


我们的电磁学课堂中，曾遇到过这样的问题：

- 半径相同的两个金属球A、B相距很远，原来不带电，金属球C先与远处的电池正极接触(负极接地)，接着与A接触，再与B接触，然后又与电池正极接触，不断重复上述过程。已知球C第一次与电池接触后的带电量为 q ，第一次与接触A球后A球的带电量为 Q_1 ，求：

(1) A球与B球最后的带电量 Q_A 与 Q_B ；

(2) 设 $Q_1/q=9/10$ ，至少经过几次与C球接触后，A球的带电量可以达到最后带电量的一半？



- 设A、B的半径为 R ，C的半径为 r ，C与A或B接触时，电荷发生转移，直至达到静电平衡。
- C与A第一次接触，电荷分配比例为： $k = \frac{q - Q_1}{Q_1}$
- 此后，C与A、B接触时电荷分配比例维持为 k 不变。
- 当C与A、B接触不再有电荷转移时：

$$\frac{q}{Q_A} = \frac{q}{Q_B} = k \quad \therefore Q_A = Q_B = \frac{q}{k} = \frac{Q_1}{q - Q_1} q$$

一个常用结论的严格证明



如右图所示，有两个分隔很远的导体球A和B，刚开始A带电量为 Q ，B不带电，现用无限长的细导线将它们连接起来，则稳定后有

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (1) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$



其中 Q_1 和 Q_2 分别是球A和球B上分配的电荷量， σ_1 和 σ_2 分别表示其电荷面密度.因为两个小球离得很远，导线对两小球的影响可以忽略不计，所以可认为两小球之间没有互能.设两个小球的电容分别为 C_1 和 C_2 ，则系统的能量为

一个常用结论的严格证明



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} \quad \text{s.t.} \quad Q_1 + Q_2 = Q.$$

构造Lagrange函数

$$L(Q_1, Q_2) = W + \lambda(Q - Q_1 - Q_2) = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} + \lambda(Q - Q_1 - Q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = \frac{Q_1}{C_1} - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \lambda,$$

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}, \quad \text{即 } U_1 = U_2. \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = \frac{Q_2}{C_2} - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{Q_2}{C_2} = \lambda.$$

一个常用结论的严格证明



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

Hessian阵 $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{pmatrix}$ 是正定的, 所以W确实取到了极小值.

式(3)表明, 两个导体球上最终的电荷分布使两球的电势相等. 将导体球的电容公式 $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1, C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2$ 带入(3)即可得到(1) (2).

汤姆孙 (Joseph John Thomson, 1856~1940) 定理[1]:

对一个线性的带电体体系, 当其中各导体的电荷分布使导体分别成为等势体时, 体系的静电能最小.

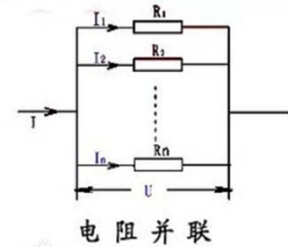
[1] 李书民. 电动力学概论[M]. 合肥: 中国科技大学出版社. 2010:39-40.

最小作用量原理在电路中的应用



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

n 个阻值分别为 R_1, R_2, \dots, R_n 的电阻构成了如图2所示的并联电路，将电路一端通入电流 I ，设 R_1, R_2, \dots, R_n 各自所在支路上的电流分别为 I_1, I_2, \dots, I_n ，那么这些电流该如何分布呢？根据最小作用量原理，电流分布应使得并联电路的耗散功率取极小值。



$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + \dots + I_n^2 R_n \quad \text{s.t.} \quad I_1 + I_2 + \dots + I_n = I \quad \text{图2}$$

$$\begin{aligned} L &= P + \lambda(I - (I_1 + I_2 + \dots + I_n)) \\ \text{构造Lagrange函数} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + \dots + I_n^2 R_n + \lambda(I - I_1 - I_2 - \dots - I_n) \\ &= (I_1^2 R_1 - \lambda I_1) + (I_2^2 R_2 - \lambda I_2) + \dots + (I_n^2 R_n - \lambda I_n) + \lambda I \end{aligned}$$

最小作用量原理在电路中的应用



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

$$\frac{\partial L}{\partial I_1} = 2I_1 R_1 - \lambda = 0 \Rightarrow I_1 R_1 = \frac{\lambda}{2}$$

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = \dots = I_n R_n = \text{常量} \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial I_2} = 2I_2 R_2 - \lambda = 0 \Rightarrow I_2 R_2 = \frac{\lambda}{2}$$

由欧姆定律，式(4)中的常量就是图2中的电压 U 。由此得到耗散功率取极值时，电路中的电流分布为

$$\frac{\partial L}{\partial I_n} = 2I_n R_n - \lambda = 0 \Rightarrow I_n R_n = \frac{\lambda}{2}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, \dots, I_n = \frac{U}{R_n} \quad (5)$$

式(4)和式(5)是我们早已熟悉的并联电路的基本特征。这是耗散功率 P 取极值的必要条件，为了证明它也是充分条件，我们来考察Lagrange函数 L 在式(5)处的Hessian方阵 H 。

最小作用量原理在电路中的应用



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

$$H = \begin{pmatrix} 2R_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2R_n \end{pmatrix} \quad \text{正定!}$$

并联电路中电流的实际分布使电路的耗散功率取极小值

最小作用量原理在电路中的应用



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

由 n 只电容器 C_1, C_2, \dots, C_n 串联构成了如图3所示的串联电路， U 是加在电路两端的电压，设电路稳定时各电容器两端的电压分别为 U_1, U_2, \dots, U_n ，则有

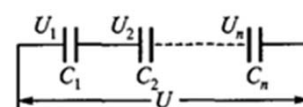


图3

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = U.$$

电路储存的静电能量为 $E = \frac{1}{2}C_1U_1^2 + \frac{1}{2}C_2U_2^2 + \dots + \frac{1}{2}C_nU_n^2.$

$$L = E + \lambda(U - U_1 - U_2 - \dots - U_n)$$

构造Lagrange函数 $= \frac{1}{2}C_1U_1^2 + \frac{1}{2}C_2U_2^2 + \dots + \frac{1}{2}C_nU_n^2 + \lambda(U - U_1 - U_2 - \dots - U_n)$

$$= \left(\frac{1}{2}C_1U_1^2 - \lambda U_1\right) + \left(\frac{1}{2}C_2U_2^2 - \lambda U_2\right) + \dots + \left(\frac{1}{2}C_nU_n^2 - \lambda U_n\right) + \lambda U,$$

最小作用量原理在电路中的应用



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

$$\frac{\partial L}{\partial U_1} = C_1 U_1 - \lambda = 0 \Rightarrow C_1 U_1 = \lambda$$

$$C_1 U_1 = C_2 U_2 = \dots = C_n U_n = \lambda = \text{常量.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial U_2} = C_2 U_2 - \lambda = 0 \Rightarrow C_2 U_2 = \lambda$$

由电容的定义即可知，该常量就是各个电容器的带电量 Q .此时电压的实际分配为

.....

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, U_2 = \frac{Q}{C_2}, \dots, U_n = \frac{Q}{C_n}. \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial U_n} = C_n U_n - \lambda = 0 \Rightarrow C_n U_n = \lambda$$

式(6)是我们早已熟悉的电容器串联电路的基本特征.我们来考察Lagrange函数 L 在式(6)处的Hessian方阵 H .

最小作用量原理在电路中的应用



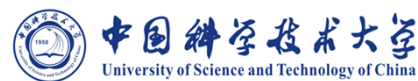
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

$$H = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n \end{pmatrix}$$

正定!

串联电容器中电压的实际分配使电容器总储能极小值

磁作用量与洛伦兹力



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

之前我们介绍的电学中的作用量都与静电能有关，也就与势能有关。而在磁场中的带电粒子不再有势能的概念，那么最小作用量原理还有用武之地吗？答案是肯定的，麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831~1879）找到了这样的作用量，并利用最小作用量原理得到了完整的电磁学定律。

磁作用量与洛伦兹力

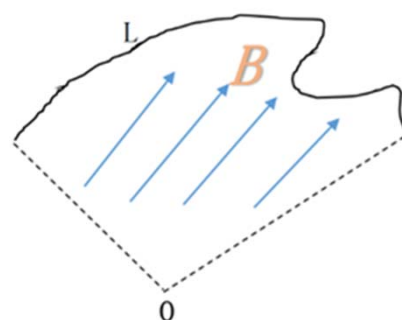


中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

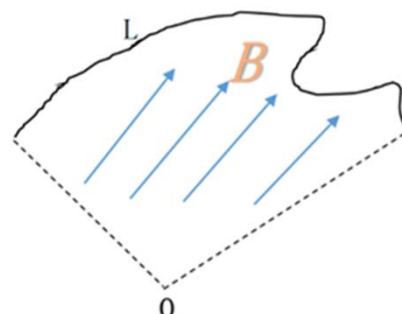
定义通过某已知开曲线L和曲线外任意一点O所构成曲面的磁通量为开曲线L的通量 Φ_L 。则磁场中带电运动粒子的磁作用量I可定义为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} E_k dt + q \cdot \Phi_L$$

其中 E_k 表示粒子的动能， q 表示粒子的带电量， L 是粒子的运动轨迹。

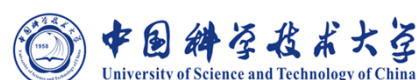


磁作用量与洛伦兹力



显然选取的不同的 O 点会得到不同的通量 Φ_L ，但可以证明：若粒子轨迹的端点一定，则无论 O 点如何选取，在所有可能的路径中磁作用量最小的路径是唯一的。也就是说，如果粒子的一条路径对空间中某个 O 点的变分为0，则该条路径对空间中其余 O 点的变分也为0。而变分计算的结果正对应着带电粒子受到的洛伦兹力。

磁作用量与洛伦兹力



如图7所示，匀强磁场 B 垂直纸面向内，一带正电的粒子 q 于 t_1 时刻从 C 点以速度 v 出发， t_2 时刻粒子移动到了 D 点，可以证明，当粒子的运动轨迹为圆弧时， I 取到极小值。

我们选取合适的 O 点，使得 O 点位于线段 CD 的垂直平分线上，并且使初速度 v 与 OC 垂直。我们已学的电磁学知识告诉我们，粒子的运动轨迹就是以 O 点为圆心的位于 C 、 D 之间的圆弧 L_1 。以 O 点为中心、 OC 方向为正方向建立极坐标系，设 L_1 的方程为 $S_0(t)=(r_0(t),\theta_0(t))=(R, \omega t)$ 。任取另一在 C 点与 v 相切且以 D 为终点的与 L_1 很接近的路径 L_2 ，设其方程为 $S(t)=(r(t),\theta(t))$ ，且 $r(t)=r_0(t)+r_1(t)$, $\theta(t)=\theta_0(t)+\theta_1(t)$

磁作用量与洛伦兹力


 中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} B q r^2 \frac{d\theta}{dt} dt \\
 \delta I &= I(L_2) - I(L_1) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{d(r_0 + r_1)}{dt} \right)^2 + \left((r_0 + r_1) \frac{d(\theta_0 + \theta_1)}{dt} \right)^2 \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} B q (r_0 + r_1)^2 \frac{d(\theta_0 + \theta_1)}{dt} dt \\
 &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2 + \left(r_0 \frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} B q r_0^2 \frac{d\theta_0}{dt} dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m (2r_0 r_1' + 2r_0 r_1 \theta_0'^2 + 2r_0^2 \theta_0' \theta_1') - \frac{1}{2} B q (2r_0 r_1 \theta_0' + r_0^2 \theta_0') dt \quad (\text{已经取了一级近似}) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} m R r_1' dt + \int_{t_1}^{t_2} (m R \omega^2 - B q R \omega) r_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} (m R^2 \omega - \frac{1}{2} B q R^2) \theta_1' dt
 \end{aligned}$$

磁作用量与洛伦兹力


 中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} m R r_1' dt + \int_{t_1}^{t_2} (m R \omega^2 - B q R \omega) r_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} (m R^2 \omega - \frac{1}{2} B q R^2) \theta_1' dt$$

因为 $r_1(t_1) = r_2(t_2) = 0$, $\theta_1(t_1) = \theta_2(t_2) = 0$, 所以上式第一个和第三个积分均为0; 要使一级近似 δI 为零, 就必须让第二个积分对任何 r_1 都要为零, 所以有 $qB = m\omega$

另一方面, 由电磁学知识易知, 粒子沿 L_1 运动时, 洛伦兹力提供向心力, 有 $qvB = m\omega v$

磁场中磁作用量选取的成功说明了最小作用量原理比能量守恒具有更普遍的意义。

从最小作用量原理审视Maxwell方程组



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \bar{D} &= \rho \\ \bar{D} &= \epsilon_0 \bar{E} \\ \bar{E} &= -\nabla \phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

假设空间中电荷密度 ρ 和电势 ϕ 处处已知(此时选取无穷远处为零势能点), 考虑作用量

$$I = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \phi)^2 dV - \int \rho \phi dV$$

这是一个对全空间定义的体积分, 我们可以通过 I 取极小值导出上面得到的Poisson方程。

三. 麦克斯韦方程组

积分形式	微分形式
$\oiint \bar{D} \cdot d\bar{S} = \iiint \rho_v dV,$	$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v,$
$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\iint_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S},$	$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$
$\oiint \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0,$	$\nabla \cdot \bar{B} = 0,$
$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \iint_S (\bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) \cdot d\bar{S}.$	$\nabla \times \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}.$

图 8

从最小作用量原理审视Maxwell方程组



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

现在假定选取任一函数 ϕ , 现在要证明: 若所取的这个函数 ϕ 是正确的势 ϕ_0 加上一个小歧离 f , 则在第一级上作用量 I 的变化为零. 因此我们记作

$$\phi = \phi_0 + f$$

在这里我们可以假设 ϕ 与 ϕ_0 在足够远处为零, 且 f 有界. 一级误差为

$$\delta I = I(\phi) - I(\phi_0) = \int (\epsilon_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla f - \rho f) dV$$

由格林公式可得 $\delta I = -\int (\epsilon_0 \nabla^2 \phi_0 + \rho) f dV$

要使一级近似 δI 为零, 就必须让上式右边的积分对任何 f 都要为零, 这样我们就有了

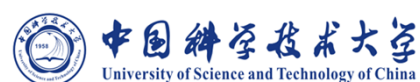
$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

总结



爱因斯坦(Albert Einstein, 1879~1955)指出, 一切科学发现的伟大目标在于“寻找一个能把观察到的事实联系在一起的思想体系, 他将具有更大可能的简单性。”最小作用量原理不仅几乎把已知的事实, 而且也将未知的事实纳入到一个思想体系中, 它简单、优美, 既具有高度的抽象概括性, 又不乏诸如本文中形象具体的案例.

最小作用量原理无疑已成为物理学的最高理论.

A photograph of a stone statue of Sun Wukong, the Monkey King, is centered on the slide. The statue is a large, stylized figure of a monkey sitting on a pedestal. The pedestal has the Chinese characters '孙王牛' (Sun Wukong) inscribed on it. The background of the photo shows a building and trees.

谢谢大家!
敬请批评指正!!!

孙王牛